

# Elastisitet

## FYS 2150 – Modul 3

Fysisk institutt, Universitetet i Oslo  
(Dated: 2005)  
(Redigert 26. april 2018)

I denne øvelsen vil dere bestemme elastisitetsmodulen til messing på to forskjellige måter. Resultater fra statisk nedbøying av en sylindrisk messingstav skal sammenlignes med en dynamisk bestemmelse ved måling av lydshastigheten i staven.

### I. INTRODUKSJON

Et kjennetegn av en god teori, eller modell for et fysisk system, er at flere fenomener kan beskrives med et mindre antall parametre. Dere skal undersøke her om både statisk nedbøying av en messingstav og hastigheten av lyd i samme stav kan beskrives med en felles elastisitetsmodul  $E$ .

Dere vil ha bruk for måleteknikk og dataanalyse som der har brukt tidligere i kurset.

### II. EN BJELKES NEDBØYING

I følge wikipedia [1] er defleksjon  $h(m)$  midt i en bjelke støttet på to punkter med avstand  $l$  og last  $mg$  midt i bjelken gitt ved

$$h(m) = \frac{mgl^3}{48EI}, \quad (1)$$

der  $E$  er elastisitetsmodulen ("Young' Modulus") og  $I$  er andre arealmomentet ("second moment of area") på tvers av bjelken:

$$I = \int \int z^2 dy dz, \quad (2)$$

der lasten er i  $z$ -retning og bjelken strekker seg i  $x$ -retning. For en sylinder av diameter  $d = 2R$  blir arealmomentet

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R (r \sin \theta)^2 r dr d\theta = \frac{\pi d^4}{4 \cdot 2^4}. \quad (3)$$

Dere skal måle stigningsforholdet  $A$  mellom defleksjonen  $h(m)$  og en variert masse  $m$ :

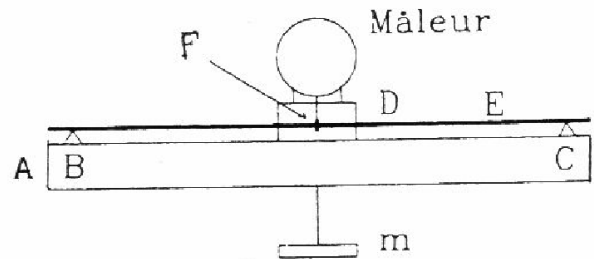
$$h(m) = Am + B, \quad (4)$$

der verdien av  $B$  skal være konsistent med 0, gitt usikkerheten i målingene. Løser vi likning 1 for  $E$ , setter inn  $I$  for sylinder-staven vi skal bruke, og erstatter  $h(m)/m$  med  $A$ , får vi et uttrykk for elastisitetsmodulen vi kan teste:

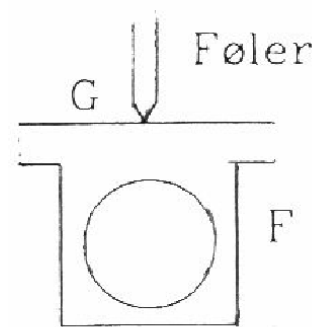
$$E = \frac{4l^3 g}{3\pi |A| d^4}. \quad (5)$$

### III. APPARATUR FOR MÅLING AV EN BJELKES NEDBØYING

Apparaturen er vist skjematisk i fig. 1. En bjelke A med u-profil er utstyrt med to kniver B og C og et stativ D med måleaur. Knivene og stativet kan forskyves langs A. Prøven E (messingstaven) som skal undersøkes, hviler på knivene. På prøven er montert en holder F, se fig. 1.



Figur 1: Apparatur for måling av en bjelkes nedbøying.



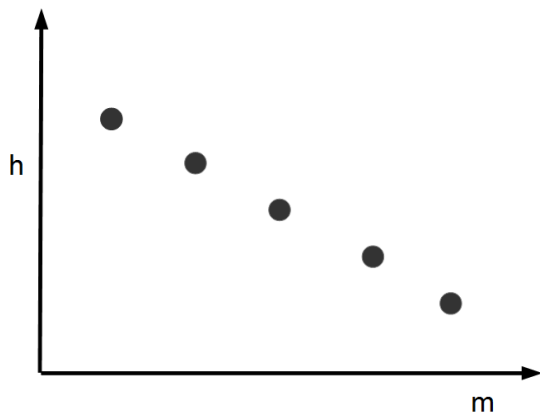
Figur 2: Detalj fra fig. 1. Tverrsnitt gjennom prøven ved holderen.

Måleurets føler registrerer den vertikale posisjonen til holderens anleggsflate G, se fig. 2. En vekt, grove lodd, presisjonslodd, et målebånd og et mikrometer inngår i apparaturen.

### Oppgave 1. Bøying av en messingstav med sirkulært tverrsnitt

- a) Legg staven slik at avstandene mellom holderen F og knivene B og C blir like store. Drei staven til anleggsflaten G blir horisontal.
- b) Bestem anleggsflatens vertikale posisjon  $h(m)$  som funksjon av belastningen  $m$ , for  $m = \{0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5\}$  kg. Fremstill måleresultatene grafisk. Lasten (de grovde loddene) må kalibreres på vekten mot presisjonsloddene.

Sammenhengen mellom  $m$  og  $h$  er forventet å være lineær, som antydnet i fig. 3. Vi ønsker å legge en rett linje  $h = Am + B$  på beste måte gjennom målepunktene, og bestemme linjens stigningsforhold  $A$  med usikkerhet  $s_A$ . Dette gjøres ved hjelp av minste kvadraters metode (se prelab-oppgavene 3 og 4).



Figur 3: Målte verdier av  $h$  ved ulike belastninger  $m$ .

### Oppgave 2. Utjevning etter minste kvadraters metode

Bestem stigningsforholdet  $A$  med usikkerhet  $s_A$ . Er avvikene mellom tilpasset linje og datapunktene i overensstemmelse med måleusikkerheten?

### Oppgave 3. Bestemmelse av elastisitetsmodulen

- a) Mål stavens diameter  $d$  og avstanden  $l$  mellom knivene. Anslå usikkerhetene i  $d$  og  $l$ .

- b) Beregn  $E$  og den totale usikkerheten  $s_E$  ved hjelp av hhv. likning 5 og uttrykket

$$s_E = E \sqrt{\left(\frac{s_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{4s_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{3s_l}{l}\right)^2}.$$

### IV. DYNAMISK BESTEMMELSE AV $E$ VED MÅLING AV LYDHASTIGHET

Denne metoden for bestemmelse av  $E$  beror på at utbredelses-hastigheten  $v$  for longitudinalbølger i en stav er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

der  $\rho$  er mediets tetthet. Utbredeshastigheten  $v$  kan bestemmes ved å måle sammenhørende verdier av frekvens  $f$  og bølgelengde  $\lambda$  idet vi har sammenhengen

$$v = \lambda f.$$

Bølgelengde og frekvens kan bestemmes ved måling på en stående bølge i staven. Det kan vises (se Appendiks) at ved frie longitudinelle svingninger i en homogen stav med lengde  $L$  opphengt i midtpunktet og med frie ender, får vi stående bølger slik at

$$L = n \frac{\lambda}{2} \text{ der } n = 1, 3, 5, \dots$$

Ved å gi staven et slag i aksial retning, eksiteres flere av disse stående bølgene (egensvingninger), men den med lengst bølgelengde,  $\lambda = 2L$ , blir den sterkeste og dempes minst. Etter en kort tid er derfor dette den dominerende bølgen i staven. Ved passende valg av  $L$  gir disse svingningene hørbar lyd i luften omkring staven.

Frekvensen  $f$  kan bestemmes ved å sammenlikne lyden fra staven med lyden fra en høyttaler som er koplet til en tonegenerator. Sammenlikningen foregår ved å observere svingninger mellom lyden fra staven og lyden fra høyttaleren. Målingen går ut på å innstille høyttaleren slik at svevefrekvensen blir så liten som mulig (i grensetilfellet 0), og så måle høyttalerfrekvensen som da er lik frekvensen  $f$  for bølgen i staven (grunntonen). Svevningene blir mest utpreget og lettest å høre når de to lydene er omtrent like sterke.

Frekvensen kan også måles ved opptak av lydsignalet med en mikrofon koblet til PCen og en analyse av signalets frekvensspektrum. Koden dere brukte i øvelsen "Lengde, hastighet og aksellerasjon" kan gjenbrukes her med små modifikasjoner. Hva begrenser presisjonen for denne metoden?

For hastigheten  $v$  har vi da

$$v = 2Lf.$$

Tettheten  $\rho$  til materialet i staven kan bestemmes ved å måle stavens lengde  $L$ , diameter  $d$  og masse  $M$ . Da er

$$\rho = \frac{4M}{\pi d^2 L}.$$

For  $E$  får vi uttrykket

$$E = \frac{16MLf^2}{\pi d^2}, \quad (6)$$

slik at vi kan bestemme  $E$  ved å måle grunnfrekvensen  $f$  og stavens lengde, diameter og masse.

#### Oppgave 4. Dynamisk bestemmelse av elastisitetsmodulen

- Mål stavens lengde  $L$ , diameter  $d$  og masse  $M$ . Anslå usikkerhetene i  $L$ ,  $d$  og  $M$ .
- Bruk verdiene for  $L$ ,  $d$  og  $M$  sammen med verdien for  $E$  funnet ved bøyingsforsøk til å beregne en tilnærmet verdi for grunnfrekvensen  $f$  fra likning 6. Innstill denne frekvensen på tonegeneratoren.
- La staven henge horisontalt og gi den et aksialt slag med en plasthammer. Etter kort tid er det grunnfrekvensen man hører fra staven.

Reguler styrken på høyttaleren slik at man tydelig kan høre svingninger mellom lydene fra høyttaleren og staven. Reguler så høyttalerfrekvensen til svingningsfrekvensen er tilnærmet lik null. Den frekvensen man da måler tas som den beste verdi for grunnfrekvensen  $f$ . Anslå usikkerheten i  $f$ . Beregn verdien av  $E$  fra likning 6, og usikkerheten i

$E$  som er gitt ved

$$s_E = E \sqrt{\left(\frac{2s_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{2s_f}{f}\right)^2 + \left(\frac{s_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{s_M}{M}\right)^2}.$$

- Mål frekvensen med lydopptak og FFT-analyse. Sammenlign resultatetene med sveve-metoden.

#### Vurdering av overensstemmelse

“Full overensstemmelse” mellom to måleresultater skulle tilsi at differansen  $D$  mellom dem er null. På grunn av måleusikkerhet aksepterer vi “overensstemmelse” selv om  $D$  er noe forskjellig fra null. Usikkerheten i  $D = E_1 - E_2$  er gitt ved

$$s_D = \sqrt{s_{E_1}^2 + s_{E_2}^2}.$$

Hvis  $|D| < s_D$  er det derfor stor sannsynlighet for at forskjellen bare skyldes tilfeldige avvik på grunn av måleusikkerhet. I slike tilfeller må vi akseptere at det er “overensstemmelse innenfor måleusikkerheten”. Er  $|D| > 2s_D$ , er det på den annen side liten sannsynlighet for at forskjellen beror på måleusikkerhet.

#### Oppgave 5. Sammenlikning av verdier for elastisitetsmodulen

Undersøk om dine to verdier for elastisitetsmodulen kan anses som like innenfor måleusikkerhetene.

[1] Three point bending: [https://en.wikipedia.org/wiki/EulerBernoulli\\_beam\\_theory#Three-point\\_bending](https://en.wikipedia.org/wiki/EulerBernoulli_beam_theory#Three-point_bending).

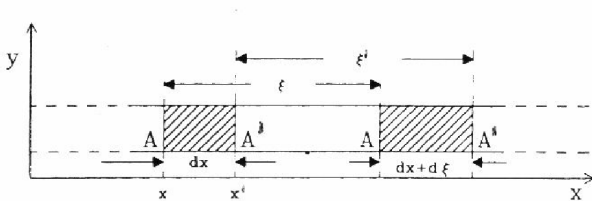
[2] Squires, G. L. 2001. *Practical Physics*, 4th ed., Cambridge University Press.

## Appendiks

### Elastiske bølger i en stav

Fig. 4 viser et utsnitt av en rett, jevntykk og homogen stav. Staven befinner seg opprinnelig i en likevektstilstand. Et aksialt støt bringer staven ut av likevektstilstanden ved at hvert tverrsnitt forskyves en strekning  $\xi$  i stavens lengderetning. Forskyvningen er en funksjon av tverrsnittets likevektsposisjon  $x$ . Den nye tilstanden er vanligvis ikke en likevektstilstand. Staven vil derfor være i bevegelse. Bevegelsen vil være fullstendig beskrevet når vi kjenner  $\xi$  som funksjon av posisjonen  $x$  og tiden  $t$ , dvs.  $\xi = \xi(x, t)$ . For å bestemme denne funksjonen, tar vi for oss et utsnitt (skravert) av staven mellom tverrsnittene  $A$  og  $A'$ , som i likevektstilstanden har posisjonene  $x$  og  $x + dx$ , se fig. 4. Ved tiden  $t$  er forskyvningene av de to tverrsnittene gitt ved  $\xi = \xi(x)$  og  $\xi' = \xi(x + dx) = \xi + d\xi$ . Massen til det skraverte utsnittet er  $dm = \rho_0 A dx$ , der  $\rho_0$  er stavens opprinnelige tetthet. Utsnittets akselerasjon i  $x$ -retningen er

$$a = \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2}.$$



Figur 4: Parametre for beskrivelse av elastiske bølger i en stav.

Resultantkraften  $dF$  på utsnittet i  $x$ -retningen skyldes normalspenningen  $R$  som virker over  $A$  og  $A'$ . Normalspenningen er en funksjon av tverrsnittets likevektsposisjon  $x$  og  $t$ ,  $R = R(x, t)$ . På tverrsnittene  $A$  og  $A'$  virker følgelig kreftene  $AR(x, t)$  og  $AR(x + dx, t)$ , som gir

$$dF = AR(x + dx, t) - AR(x, t) = A \frac{\partial R(x, t)}{\partial x} dx.$$

Avstanden mellom  $A$  og  $A'$  er etter forskyvningen

$$(x' + \xi') - (x + \xi) = dx + d\xi.$$

Den skraverte delen av staven har derfor en relativ forlengelse

$$e = \frac{d\xi}{dx} = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}.$$

Ifølge definisjonslikningen for elastisitetensmodulen har vi

$$R = Ee = E \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

slik at  $dF = AE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$ . Vi benytter til slutt Newtons 2. lov  $dF = adm$  og finner bølgelikningen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{der} \quad v^2 = \frac{E}{\rho_0}.$$

Bølgelikningen har løsninger av formen  $\xi(x, t) = f(x \pm vt)$ , det vil si longitudinelle bølger med forplantningshastighet  $v$ .

### Stående bølger i en stav festet i midtpunktet.

Vi legger  $x$ -aksens origo i stavens midtpunkt som skal ligge fast, slik at  $\xi(0, t) = 0$ . Kraftene som virker i stavens endepunkter  $x = \pm \frac{L}{2}$  er lik null, hvilket medfører at

$$\left( \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \right)_{x=\pm \frac{L}{2}} = 0.$$

Funksjonen  $\xi = \frac{\xi_0}{2} [\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)] = \xi_0 \sin kx \cos \omega t$  tilfredsstiller bølgelikningen og den første grensebetingelsen såfremt  $\frac{\omega}{k} = v$ . For å tilfredsstille de andre grensebetingelsene må vi kreve at

$$k \frac{L}{2} = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

det vil si  $k = (2n + 1) \frac{\pi}{L}$ . Bølgelengdene  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  svarende til de forskjellige egensvingningene ("normal modes") blir

$$\lambda = 2L, \frac{2L}{3}, \frac{2L}{5}, \dots$$

Grunntonens frekvens er

$$f = \frac{d}{4} \sqrt{\frac{\pi E}{ML}}.$$

### Svevninger

En harmonisk løsning av bølgelikningen har formen

$$\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

der  $\frac{\omega}{k} = v$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  og  $\omega = 2\pi f$ . For en bølge som er sammensatt av to harmoniske bølger, blir

$$\xi = \xi_0 [\sin(kx - \omega t) + \sin(k'x - \omega't)] \quad (7)$$

$$= 2\xi_0 \cos \frac{(k' - k)x - (\omega' - \omega)t}{2} \quad (8)$$

$$\times 2 \sin \frac{(k' + k)x - (\omega' + \omega)t}{2} \quad (9)$$

Hvis  $k' \approx k$  og  $\omega' \approx \omega$ , får vi tilnærmet

$$\xi \approx 2\xi_0 \cos \frac{(\Delta k x - \Delta \omega t)}{2} \sin(kx - \omega t),$$

der  $\Delta k = k' - k$  og  $\Delta\omega = \omega' - \omega$ . Vi ser at bølgen kan oppfattes som et produkt av en raskt svingende del,  $2\xi_0 \sin(kx - \omega t)$ , og en langsomt svingende del,

$$\cos \frac{(\Delta kx - \Delta\omega t)}{2},$$

med forplantningshastighet  $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ . Variasjonene i amplity-

den til den raskt svingende delen kalles sjevninger (eng. beats). Sjevningenes frekvens  $f_S$  er

$$f_S = \frac{|\omega - \omega'|}{2} \frac{1}{2\pi}.$$