FYS2150: Usikkerhet og statistikk

Alex Read

Januar 2018

Emner

- Introduksjon
- Tilfeldige og systematiske "feil" (usikkerheter), Presisjon og nøyaktighet
- Måling med usikkerhet -> Gaus/normal-fordelingen
- Feil/usikkerhets-forplantning
- Usikkerhet i en måling -> usikkerheten i gjennomsnittet for flere målinger
- Linje-tilpasning
- I backup: Poisson-fordelingen (telle-eksperiment)
- I backup: Eksponential-fordelingen

Introduksjon

“Practical Physics” - Squires

“Practical Physics” - Squires

- Obligatorisk å lese Squires Del 1 (helst før lab 1)!

“Practical Physics” - Squires

- Obligatorisk å lese Squires Del 1 (helst før lab 1)!
  - ~50 sider om eksperimentell fysikk, grunnleggende statistikk og usikkerhet

“Practical Physics” - Squires

- Obligatorisk å lese Squires Del 1 (helst før lab 1)!
    - ~50 sider om eksperimentell fysikk, grunnleggende statistikk og usikkerhet
- Les PREFACE og!

"Practical Physics" - Squires

- Obligatorisk å lese Squires Del 1 (helst før lab 1)!
    - ~50 sider om eksperimentell fysikk, grunnleggende statistikk og usikkerhet
- Les PREFACE og!
- Del 3 er nyttig for journal- og rapport-skriving

“Practical Physics” - Squires

- Obligatorisk å lese Squires Del 1 (helst før lab 1)!
  - ~50 sider om eksperimentell fysikk, grunnleggende statistikk og usikkerhet
- Les PREFACE og!
- Del 3 er nyttig for journal- og rapport-skriving
- Still spørsmål om ting som ikke er klare!

Fysikk-eksperiment i et nøtteskall

Fysikk-eksperiment i et nøtteskall

- Identifiser de viktige egenskaper i et system ("degrees of freedom")

Fysikk-eksperiment i et nøtteskall

- Identifiser de viktige egenskaper i et system ("degrees of freedom")
- Generalisere/lage en teori/modell

Fysikk-eksperiment i et nøtteskall

- Identifiser de viktige egenskaper i et system (“degrees of freedom”)
- Generalisere/lage en teori/modell
- Kartlegg konsekvensene/form hypothese(r)

Fysikk-eksperiment i et nøtteskall

- Identifiser de viktige egenskaper i et system (“degrees of freedom”)
- Generalisere/lage en teori/modell
- Kartlegg konsekvensene/form hypothese(r)
- Test hypotesen(e) i eksperiment(er)

Fysikk-eksperiment i et nøtteskall

- Identifiser de viktige egenskaper i et system ("degrees of freedom")
- Generalisere/lage en teori/modell
- Kartlegg konsekvensene/form hypothese(r)
- Test hypotesen(e) i eksperiment(er)
- Sil ut komplikasjoner/rot i virkeligheten - bl.a. usikkerheter

Hvem er i føresetet, teori eller eksperiment?

Hvem er i føresetet, teori eller eksperiment?

- Brout, Higgs, Englert, Guralnik, Hagen, Kibble (1964): skal vi ha en konsistent teori med tunge spin-1 partikler (W,Z 1983 på CERN)- er det nødt til å finnes minst en tung partikkel med spin=0

Hvem er i føresetet, teori eller eksperiment?

- Brout, Higgs, Englert, Guralnik, Hagen, Kibble (1964): skal vi ha en konsistent teori med tunge spin-1 partikler (W,Z 1983 på CERN)- er det nødt til å finnes minst en tung partikkel med spin=0
- ATLAS og CMS-eksperimentene på CERN (2012): Vi har funnet en massiv partikkel med spin-0 og flere andre riktige egenskaper

Hvem er i føresetet, teori eller eksperiment?

- Brout, Higgs, Englert, Guralnik, Hagen, Kibble (1964): skal vi ha en konsistent teori med tunge spin-1 partikler (W,Z 1983 på CERN)- er det nødt til å finnes minst en tung partikkel med spin=0

- ATLAS og CMS-eksperimentene på CERN (2012): Vi har funnet en massiv partikkel med spin-0 og flere andre riktige egenskaper

- Penzias og Wilson klarte ikke å kvitte seg med 4.2 K bakgrunn da de skulle drive med radioastronomi og satellitt-kommunikasjon ved måling av mikrobølge-stråling (1964).

Hvem er i føresetet, teori eller eksperiment?

- Brout, Higgs, Englert, Guralnik, Hagen, Kibble (1964): skal vi ha en konsistent teori med tunge spin-1 partikler (W,Z 1983 på CERN)- er det nødt til å finnes minst en tung partikkel med spin=0

- ATLAS og CMS-eksperimentene på CERN (2012): Vi har funnet en massiv partikkel med spin-0 og flere andre riktige egenskaper

- Penzias og Wilson klarte ikke å kvitte seg med 4.2 K bakgrunn da de skulle drive med radioastronomi og satellitt-kommunikasjon ved måling av mikrobølge-stråling (1964).

- På 1970-tallet kom konsensus at de hadde observert rester av det store smellet (big bang).

Usikkerhet er **viktig**!!

Usikkerhet er **viktig**!!

- Kvantifisere test av teori

Usikkerhet er **viktig**!!

- Kvantifisere test av teori
- Sammenligne to resultater

Usikkerhet er **viktig**!!

- Kvantifisere test av teori
- Sammenligne to resultater
- Lever resultater til videre bruk av andre

Usikkerhet er **viktig**!!

- Kvantifisere test av teori
- Sammenligne to resultater
- Lever resultater til videre bruk av andre
- "...the idea of errors [usikkerheter] is not something of secondary or peripheral interest in an experiment. On the contrary, it is related to the purpose of the experiment, the method of doing it, and the significance of the results."

  \- G.L. Squires

"Wordle" for oppdagelsen av Higgs-partikkelen i ATLAS-eksperimentet ved CERN (2012)

Tilfeldig og systematisk usikkerhet, Presisjon og nøyaktighet

Tilfeldig og systematisk usikkerhet, Presisjon og nøyaktighet

"We can publish errors, but not mistakes."
- J.G. Smith (min PhD-veileder)

Usikkerheter

Usikkerheter

- Feil/**usikkerheter** - errors/**uncertainties**

Usikkerheter

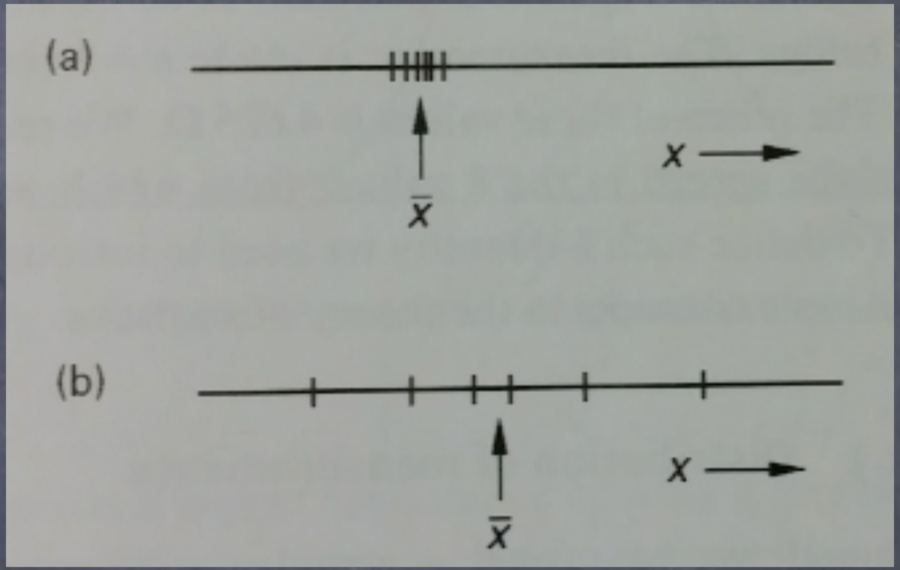
- Feil/**usikkerheter** - errors/**uncertainties**
- Tilfeldige (“random”, “statistical”)
    - Ikke reproduserbar
    - Kan (i prinsipp) undersøkes med gjentatte forsøk

Usikkerheter

- Feil/**usikkerheter** - errors/**uncertainties**
- Tilfeldige ("random", "statistical")
  - Ikke reproduserbar
  - Kan (i prinsipp) undersøkes med gjentatte forsøk
- Systematisk ("eksperimentelle", "teoretiske")
  - Reproduserbar (hjelper ikke med gjentatte forsøk)
  - Ofte vanskelig å kvantifisere, studere, avdekke (effekter som er avdekket blir korrigert for)

Spredning og avvik

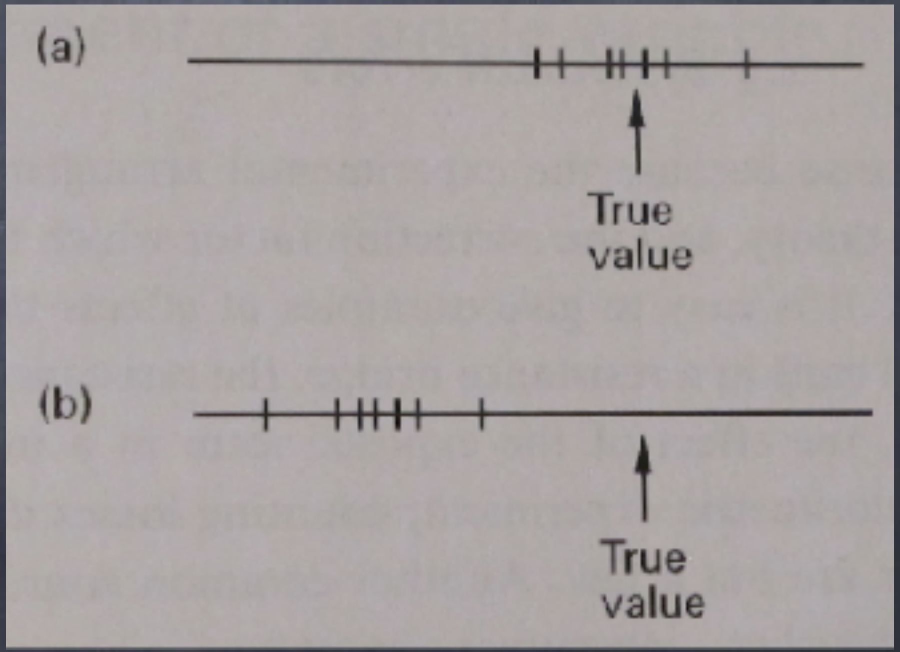
- Presisjon ("precision") - liten spredning i resultatene/små tilfeldige feil



G.L. Squires - Practical Physics

- Nøyaktighet ("accuracy") - fri for systematisk feil/avvik

  NB! Det er utrolig fort gjort å blande "nøyaktighet" og "presisjon" i en tekst!!



Tilfeldig kan bli systematisk

Tilfeldig kan bli systematisk

- Pass på - tilfeldig usikkerhet i en måling kan bli til en systematisk usikkerhet hvis resultatet er brukt i en serie av sekundære målinger.

Tilfeldig kan bli systematisk

- Pass på - tilfeldig usikkerhet i en måling kan bli til en systematisk usikkerhet hvis resultatet er brukt i en serie av sekundære målinger.
- Eksempel 1: 10.000 stoppeklokker gir spredte (reproduserbar for hver klokke individuelt) verdier for en standard tid, men vi kjøper **én** av disse stoppeklokkene og bruker den i alle våre eksperimenter.

Tilfeldig kan bli systematisk

- Pass på - tilfeldig usikkerhet i en måling kan bli til en systematisk usikkerhet hvis resultatet er brukt i en serie av sekundære målinger.
- Eksempel 1: 10.000 stoppeklokker gir spredte (reproduserbar for hver klokke individuelt) verdier for en standard tid, men vi kjøper **én** av disse stoppeklokkene og bruker den i alle våre eksperimenter.
- Eksempel 2: En datasimulering med "begrenset statistikk" (sjargon for for få simulerte forsøk) brukes til å finne ut hvor mange Higgspartikkler ATLAS-eksperimentet burde fanges opp av de som produseres i proton-proton kollisjoner ved LHC. Når vi sammenligner det observerte antallet med hypotesen, har den siste en systematisk usikkerhet pga simuleringens statistisk usikkerhet.

Systematisk kan bli tilfeldig

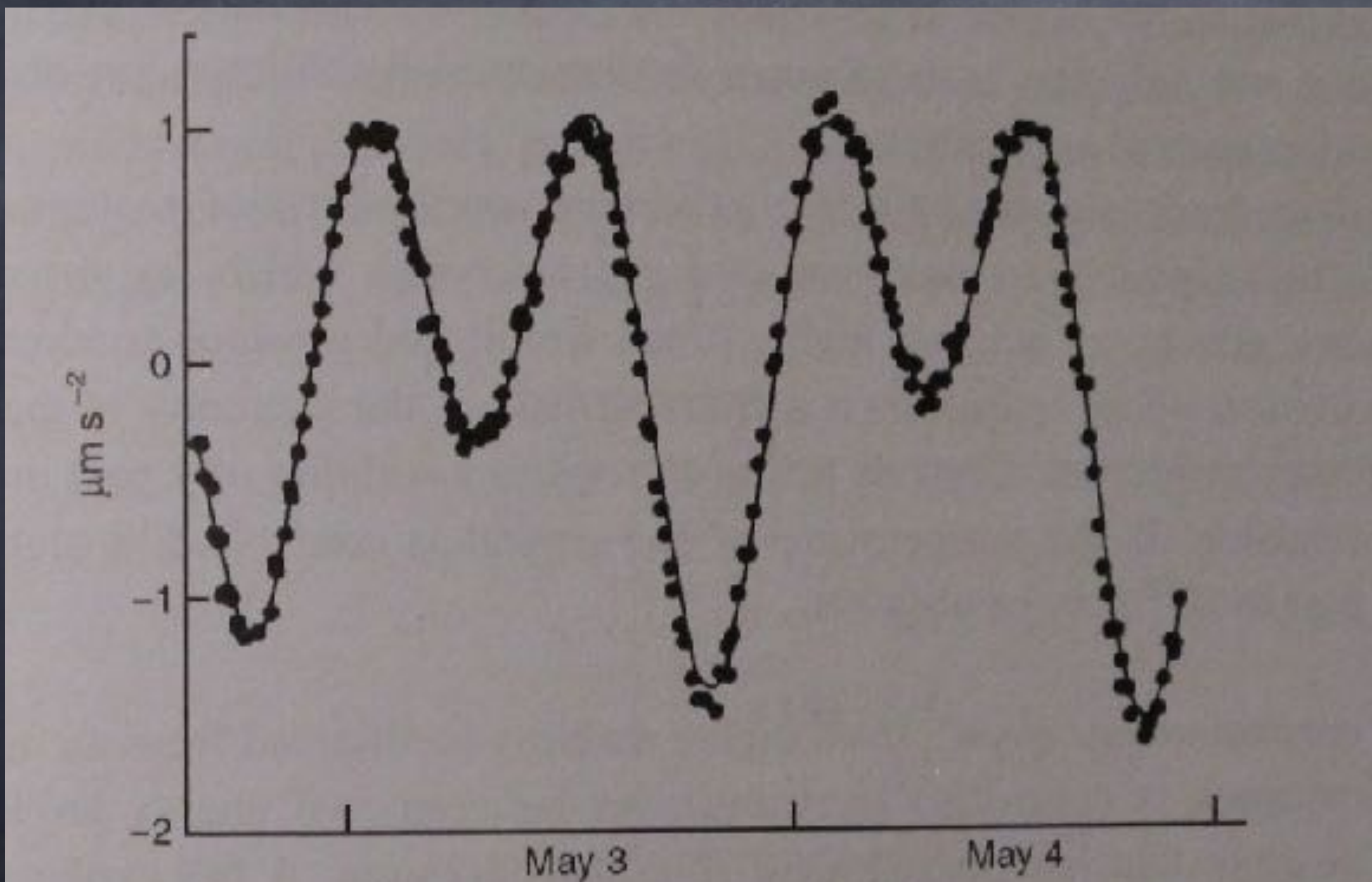


Fig. 7.18. The tidal variation of g at Boulder, Colorado measured with the apparatus of Zumberge, Rinker, and Faller in May 1981. The curve shows the theoretical variation. G.L. Squires - Practical Physics

- Hvis vi gjentar presisjonsmålinger av f.eks. pendelperiode uten å måle "stardate", overser vi en (liten!) systematisk variasjon av g

Måling med usikkerhet

Hva mener vi med

$$x \pm \sigma_x$$

?

Hva mener vi med

$$x \pm \sigma_x$$

?

$$x \pm \Delta x \text{ eller } x \pm \delta x$$

Måling med usikkerhet

Måling med usikkerhet

- Det finnes en sann (men ukjent) verdi X.

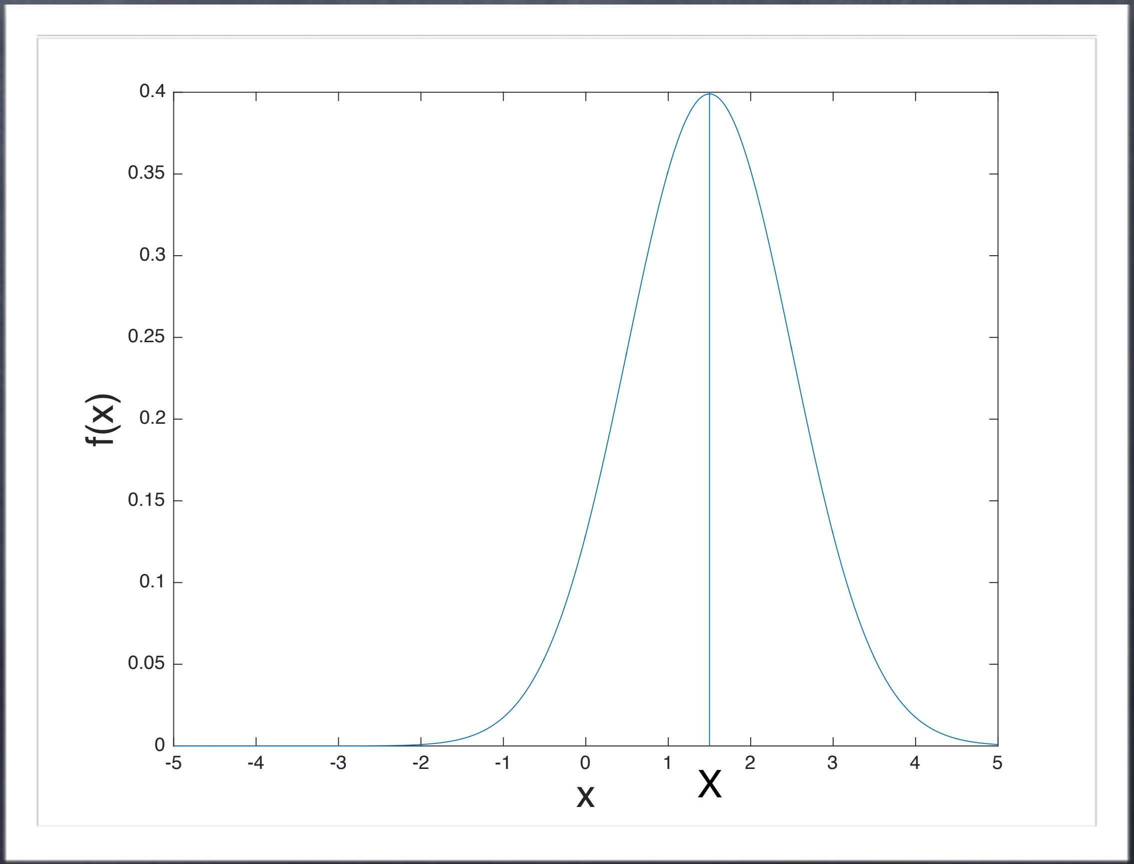
Måling med usikkerhet

- Det finnes en sann (men ukjent) verdi X.
- Vi estimerer verdien av X med en måling x fra en fordeling $f(x)$ slik at

$$\sigma_x^2 = \langle (x - X)^2 \rangle$$

er minst mulig, og helst også

$$\langle x \rangle = X$$



Måling med usikkerhet

- Det finnes en sann (men ukjent) verdi X.

$$< x > \equiv \int x f(x) dx$$

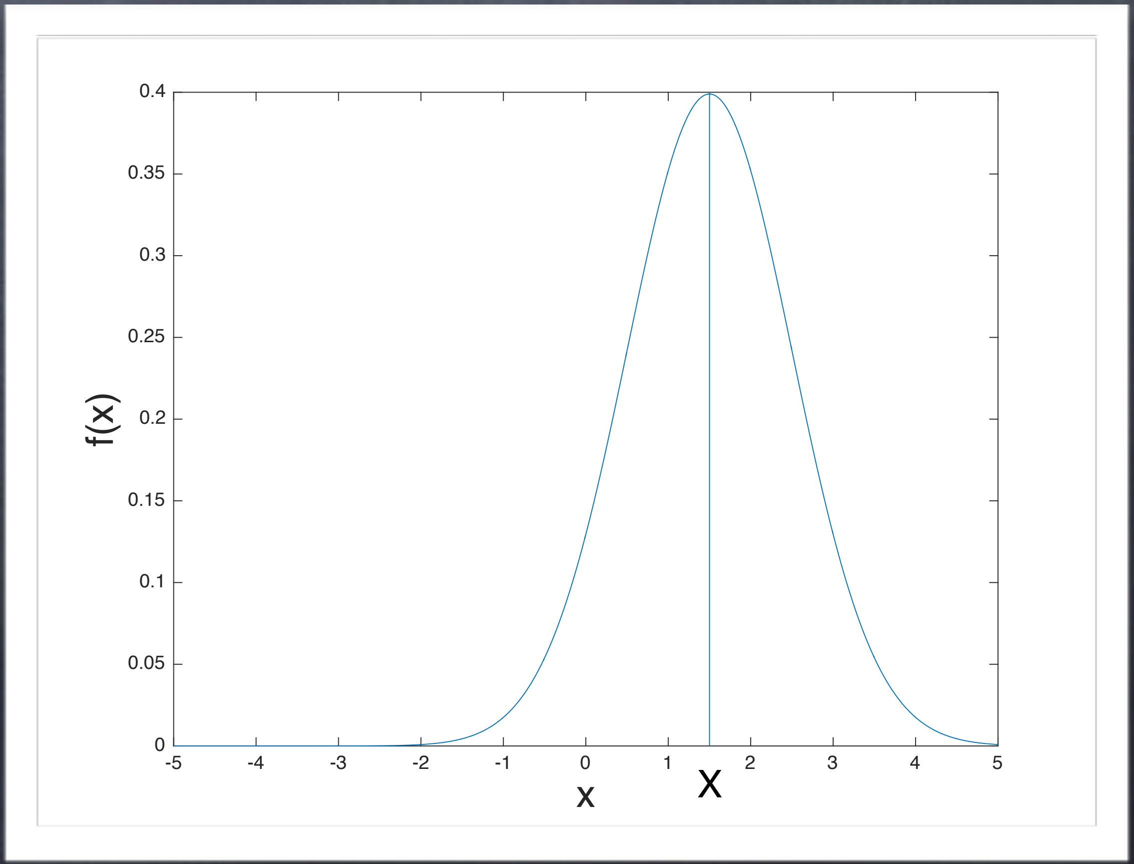
NB! $\int f(x) dx \equiv 1$

- Vi estimerer verdien av X med en måling x fra en fordeling $f(x)$ slik at

$$\sigma_x^2 = \langle (x - X)^2 \rangle$$

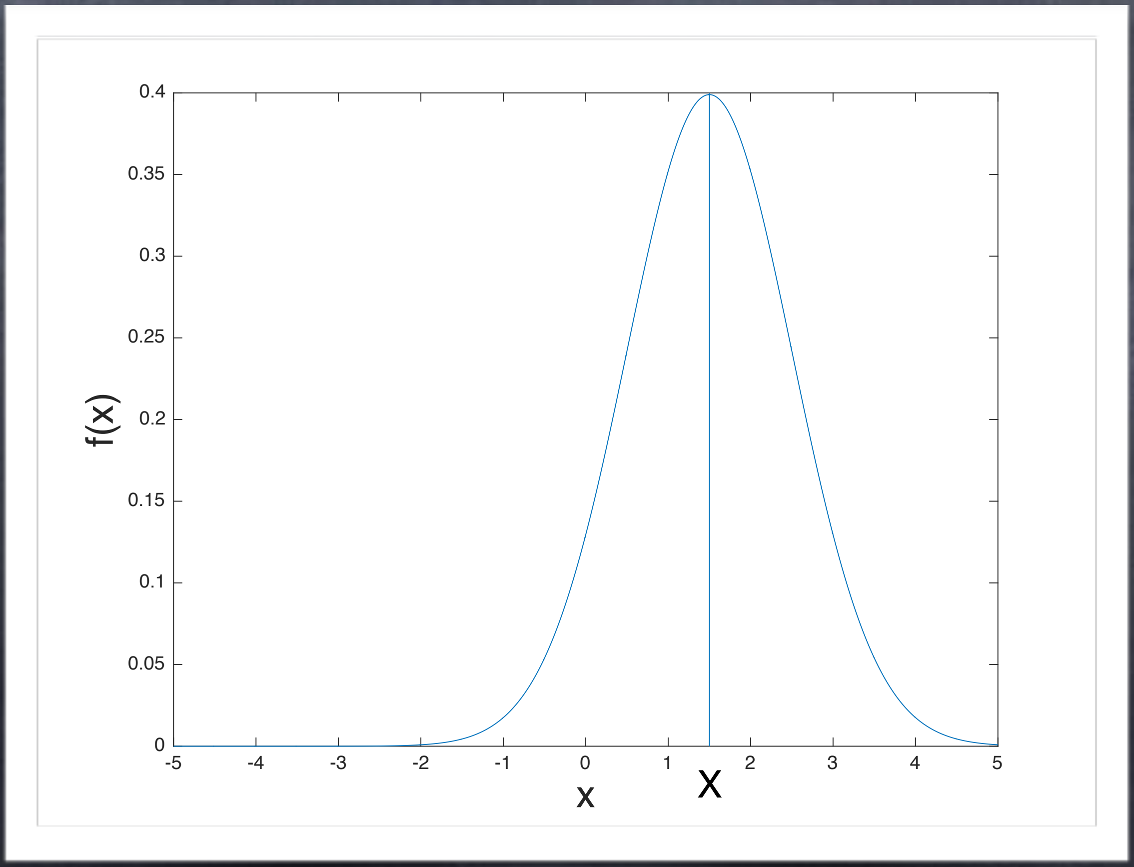
er minst mulig, og helst også

$$\langle x \rangle = X$$



Gauss(normal)fordelingen

Gauss(normal)fordelingen



Hvorfor Gauss-fordelingen?!

Hvorfor Gauss-fordelingen?!

- Central limit theorem - gjennomsnitt av tall fra flere fordelinger med veldefinert gjennomsnitt og varians går mot en gaussisk-fordeling

Hvorfor Gauss-fordelingen?!

- Central limit theorem - gjennomsnitt av tall fra flere fordelinger med veldefinert gjennomsnitt og varians går mot en gaussisk-fordeling
- Dukker opp i fysikken (e.g. Brownske bevegelser, ideell gass)

Hvorfor Gauss-fordelingen?!

- Central limit theorem - gjennomsnitt av tall fra flere fordelinger med veldefinert gjennomsnitt og varians går mot en gaussisk-fordeling
- Dukker opp i fysikken (e.g. Brownske bevegelser, ideell gass)
- Selve telle-fordelinger (Poisson, binomial) blir gaussiske under visse (nokså vanlig) forhold

Hvorfor Gauss-fordelingen?!

- Central limit theorem - gjennomsnitt av tall fra flere fordelinger med veldefinert gjennomsnitt og varians går mot en gaussisk-fordeling
- Dukker opp i fysikken (e.g. Brownske bevegelser, ideell gass)
- Selve telle-fordelinger (Poisson, binomial) blir gaussiske under visse (nokså vanlig) forhold
- Empirisk er det ofte en utmerket beskrivelse av data-fordelinger

Hvorfor Gauss-fordelingen?!

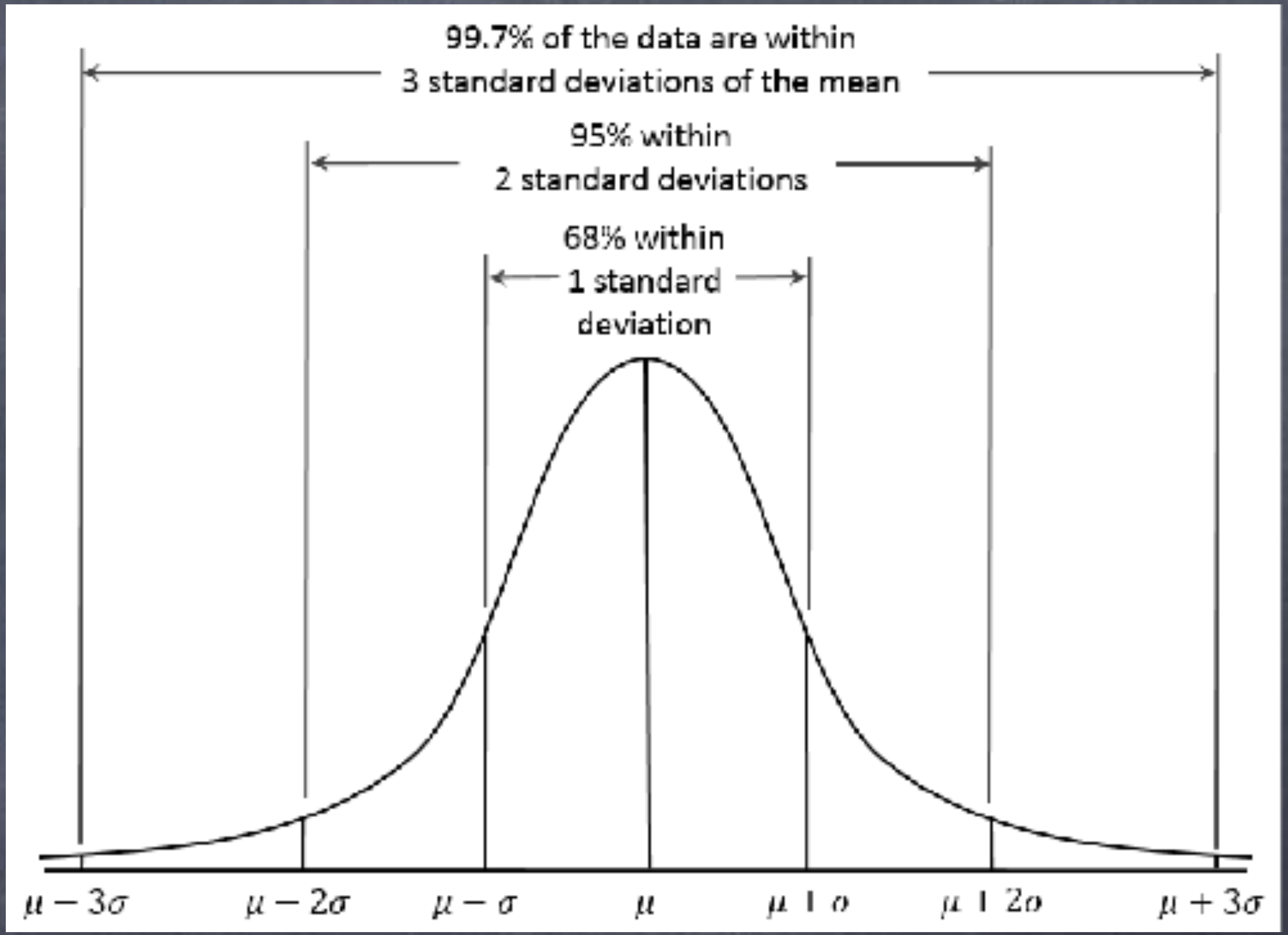
- Central limit theorem - gjennomsnitt av tall fra flere fordelinger med veldefinert gjennomsnitt og varians går mot en gaussisk-fordeling
- Dukker opp i fysikken (e.g. Brownske bevegelser, ideell gass)
- Selve telle-fordelinger (Poisson, binomial) blir gaussiske under visse (nokså vanlig) forhold
- Empirisk er det ofte en utmerket beskrivelse av data-fordelinger
- **Relativ enkelt å jobbe med matematisk :-)**

Gauss(normal)fordelingen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

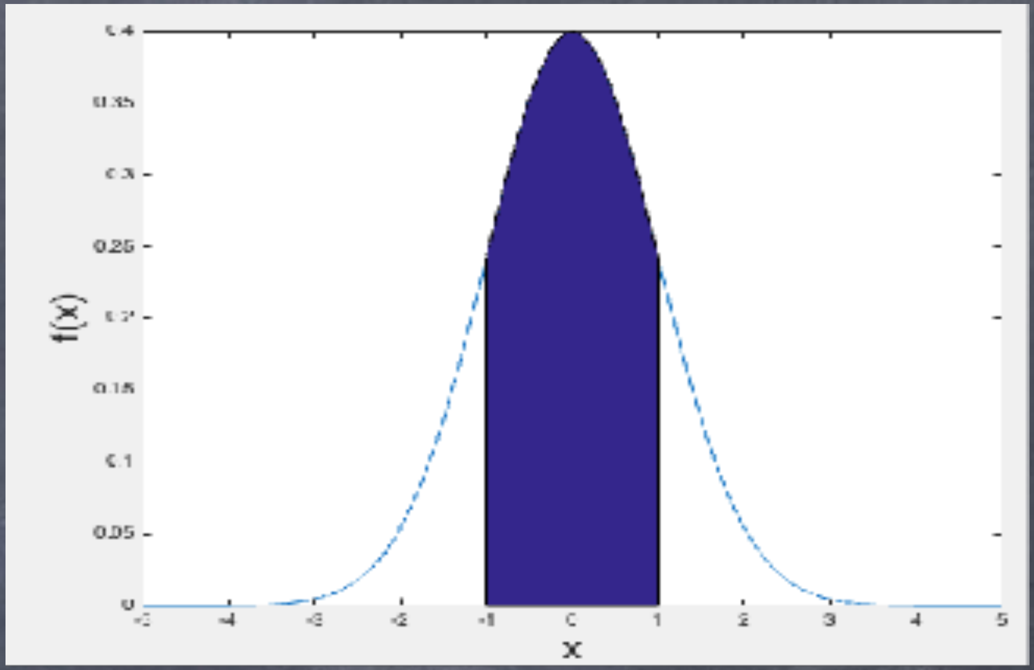
$$< x >= \mu$$

$$< (x-\mu)^2 >= \sigma^2$$



"Empirical Rule" by Dan Kernler - Own work. Licensed under CC BY-SA 4.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Empirical_Rule.PNG#mediaviewer/File:Empirical_Rule.PNG

Hva mener vi med $x \pm \sigma_x$?

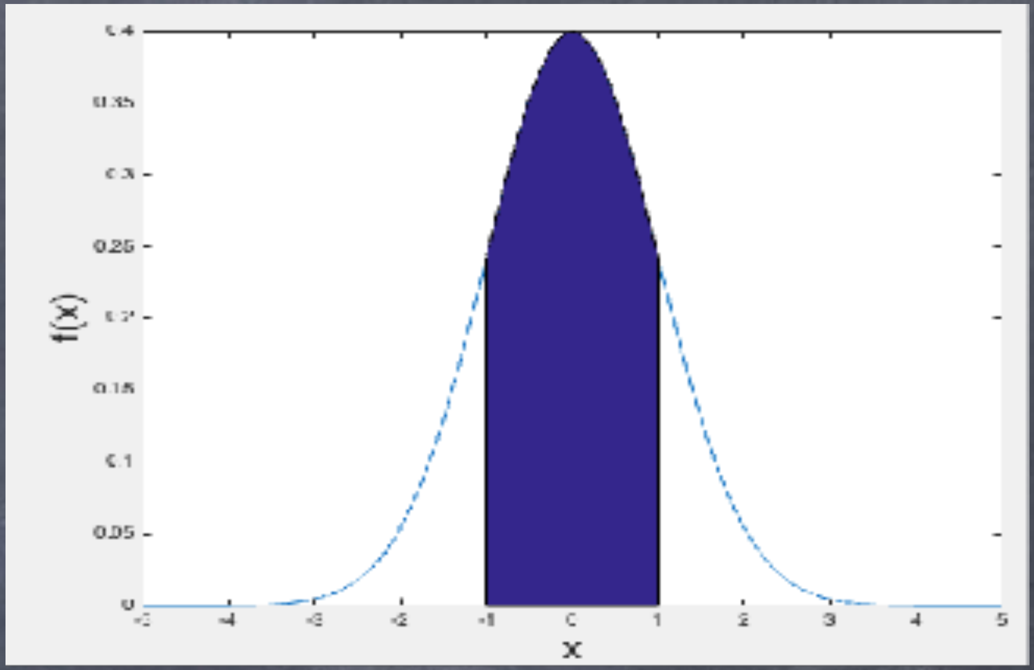


$$x - 1 \cdot \sigma_x < X < x + 1 \cdot \sigma_x$$

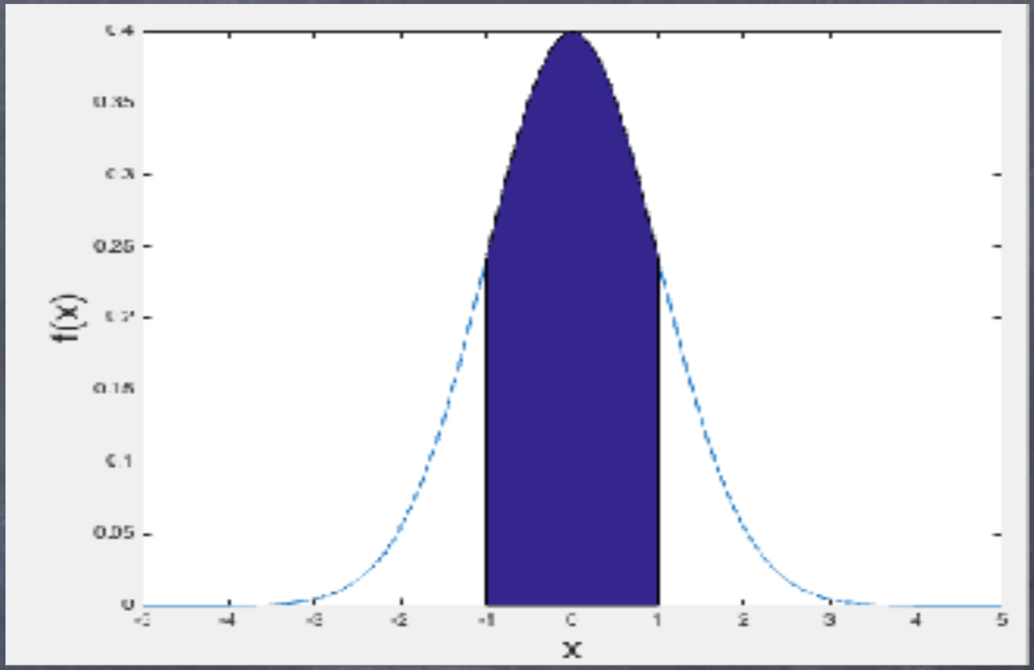
Hva mener vi med $x \pm \sigma_x$?

- 68% sannsynlig at

$$x - 1 \cdot \sigma_x < X < x + 1 \cdot \sigma_x$$



Hva mener vi med $x \pm \sigma_x$?



- 68% sannsynlig at

$$x - 1 \cdot \sigma_x < X < x + 1 \cdot \sigma_x$$

- (Vi gjør som Squires og ser bort fra diskusjonen mellom Bayesisk og klassisk statistikk)

MATLAB er din venn

`Y = normpdf(X,mu,sigma)` computes the pdf at each of the values in X using the normal distribution with mean `mu` and standard deviation `sigma`. X, `mu`, and `sigma` can be vectors, matrices, or multidimensional arrays that all have the same size. A scalar input is expanded to a constant array with the same dimensions as the other inputs. The parameters in `sigma` must be positive.

The normal pdf is

$$y = f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

See Also

cdf | normfit | norminv | normlike | normpdf | normrnd | normstat

`p = normcdf(x,mu,sigma)` returns the normal cdf at each value in `x` using the specified values for the mean `mu` and standard deviation `sigma`. `x`, `mu`, and `sigma` can be vectors, matrices, or multidimensional arrays that all have the same size. A scalar input is expanded to a constant array with the same dimensions as the other inputs. The parameters in `sigma` must be positive.

What is the probability that an observation from a standard normal distribution will fall on the interval [-1 1]?

```
p = normcdf([-1 1]);
p(2)-p(1)
```

```
ans =
  0.6827
```

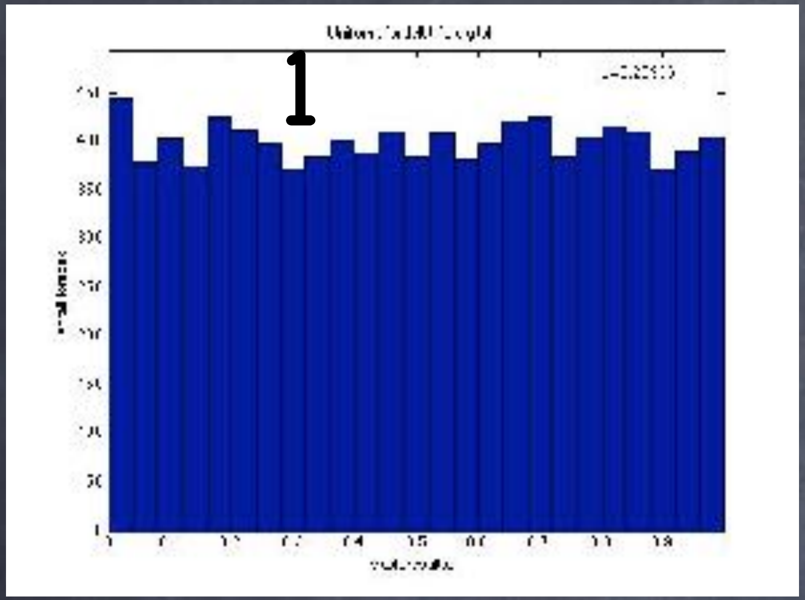
The normal cdf is

$$p = F(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Uniform -> gauss

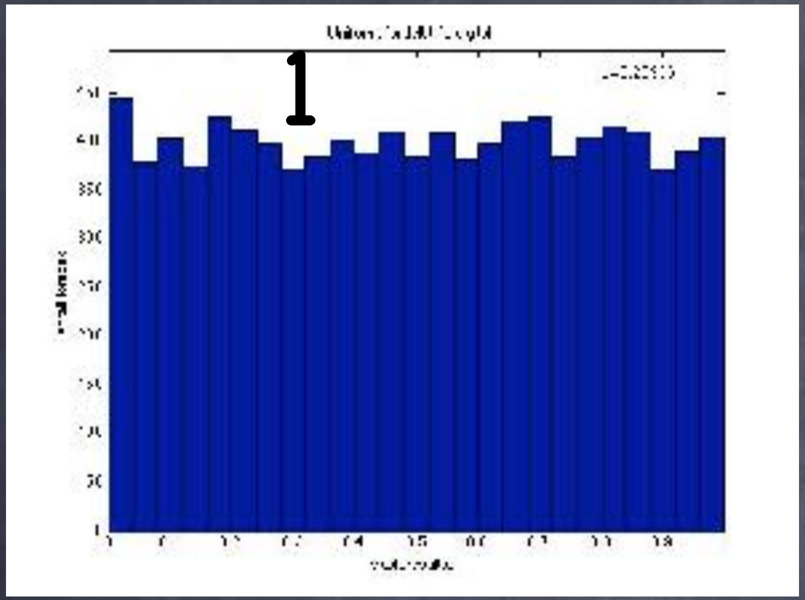
Sum av N=1,2,3,10 uniform-fordelte tilfeldige tall delt med N

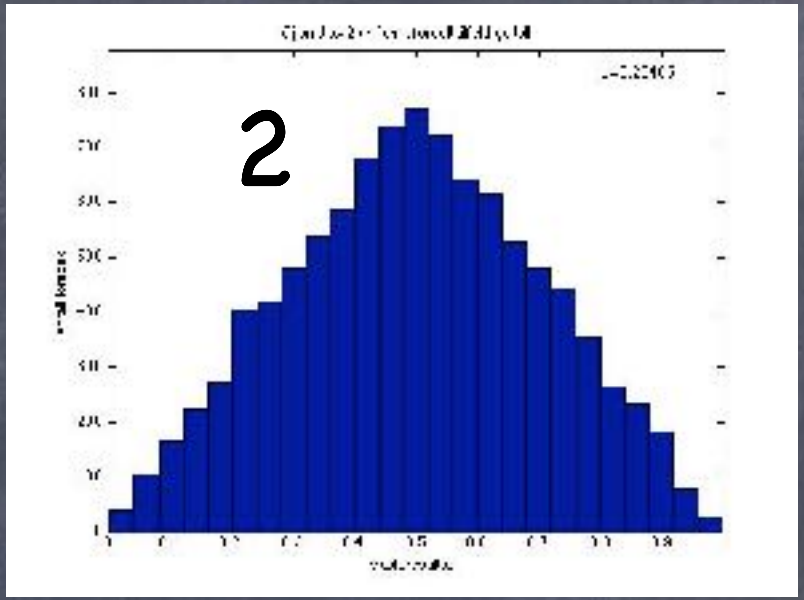
Uniform -> gauss



Sum av N=1,2,3,10 uniform-fordelte tilfeldige tall delt med N

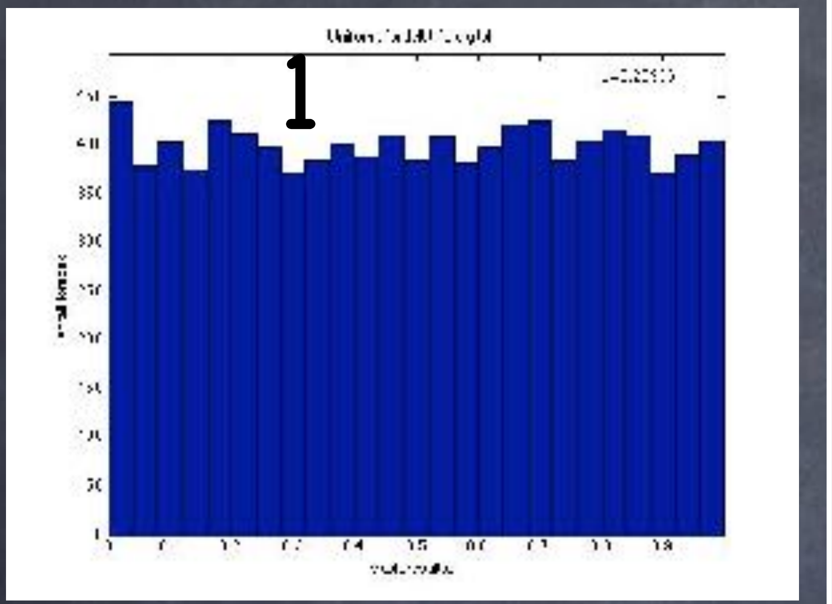
Uniform -> gauss

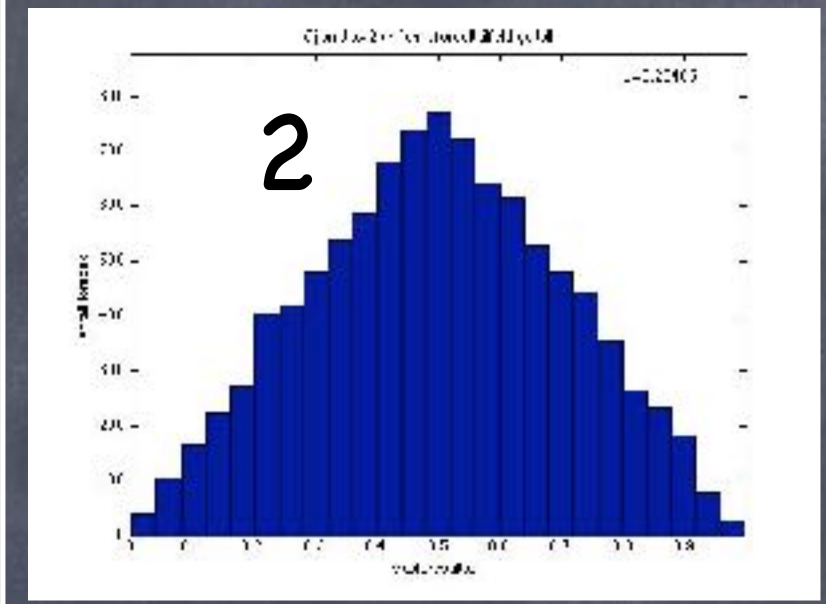


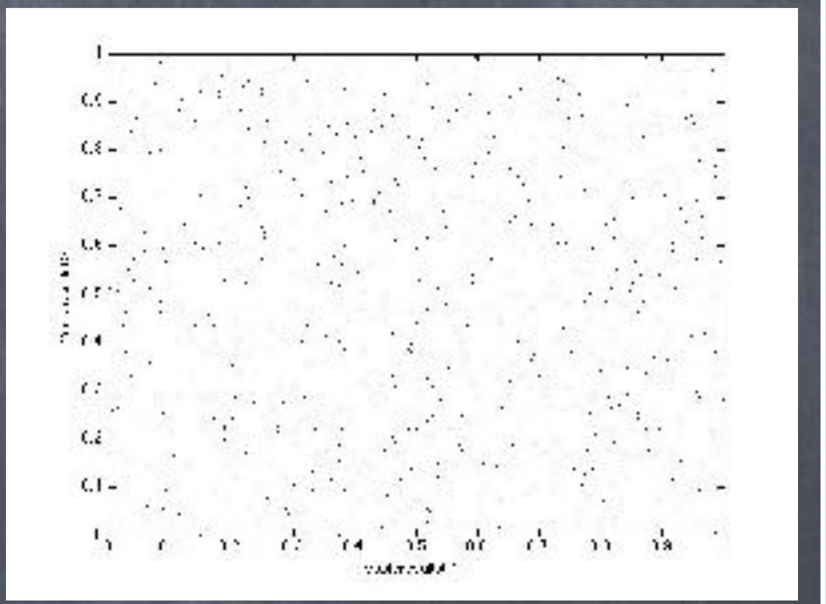


Sum av N=1,2,3,10 uniform-fordelte tilfeldige tall delt med N

Uniform -> gauss

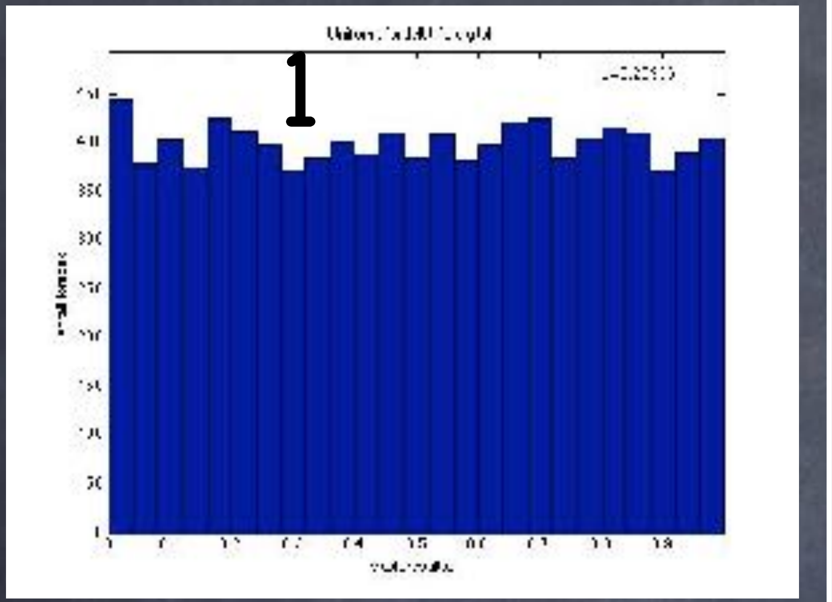


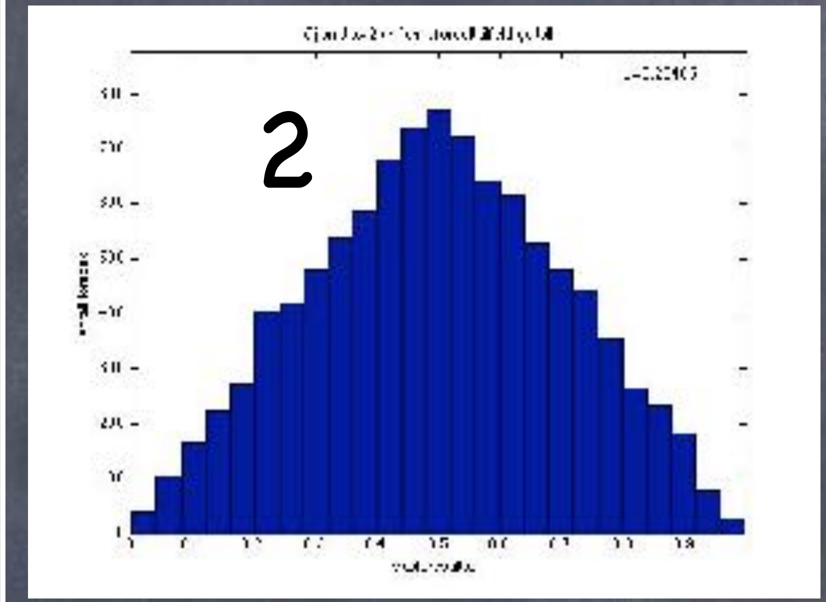


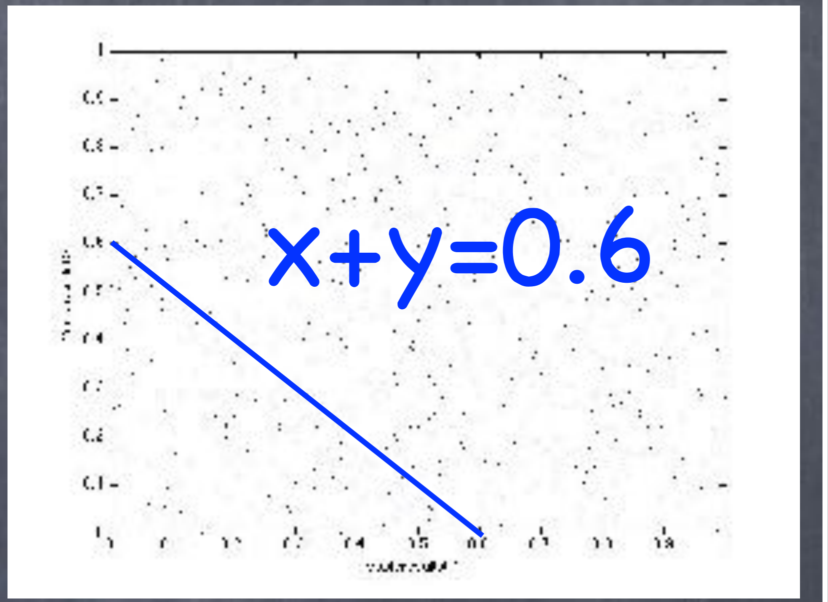


Sum av N=1,2,3,10 uniform-fordelte tilfeldige tall delt med N

Uniform -> gauss

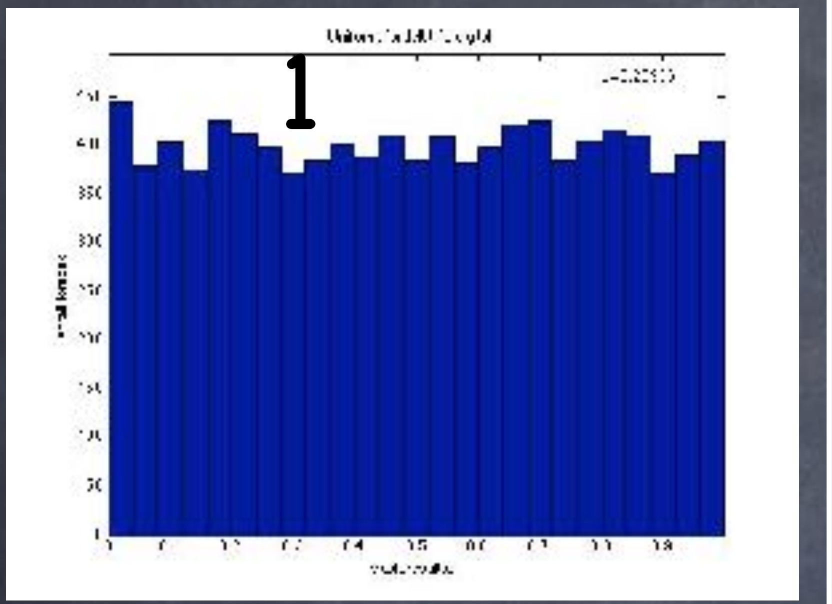


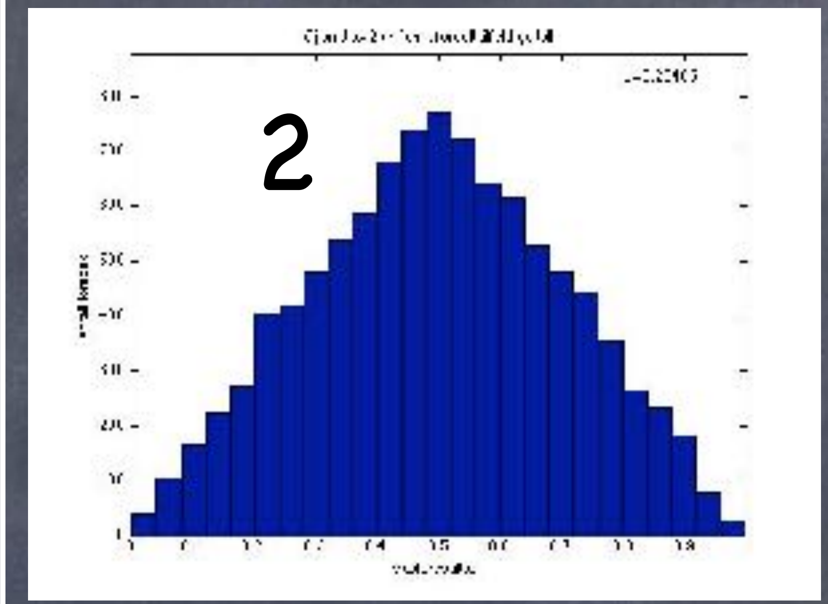


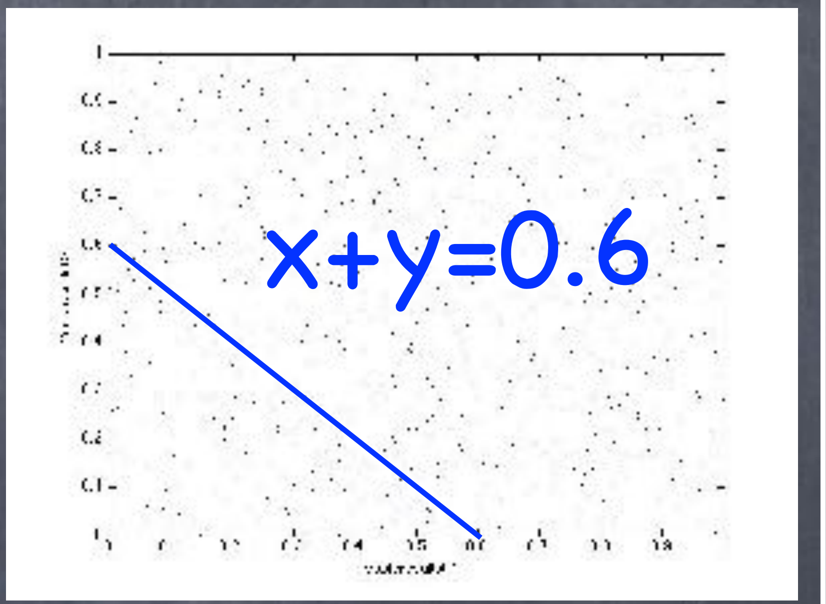


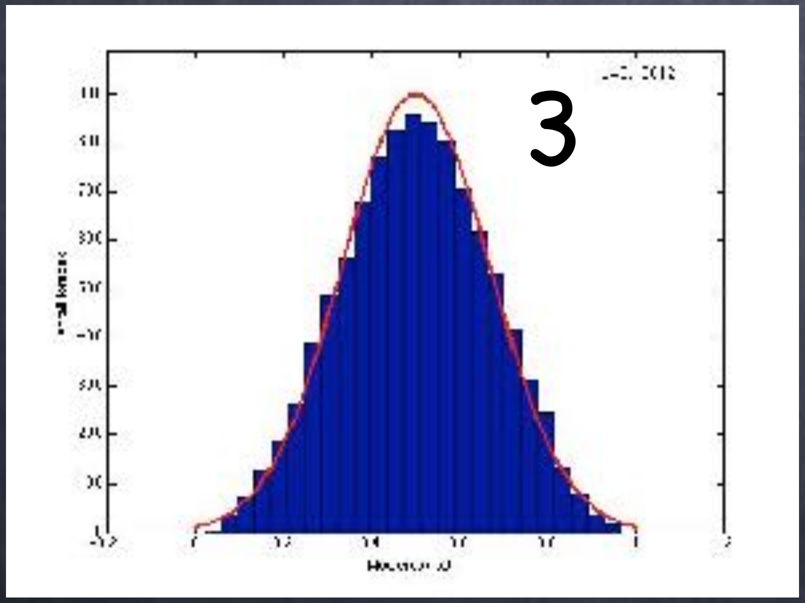
Sum av N=1,2,3,10 uniform-fordelte tilfeldige tall delt med N

Uniform -> gauss



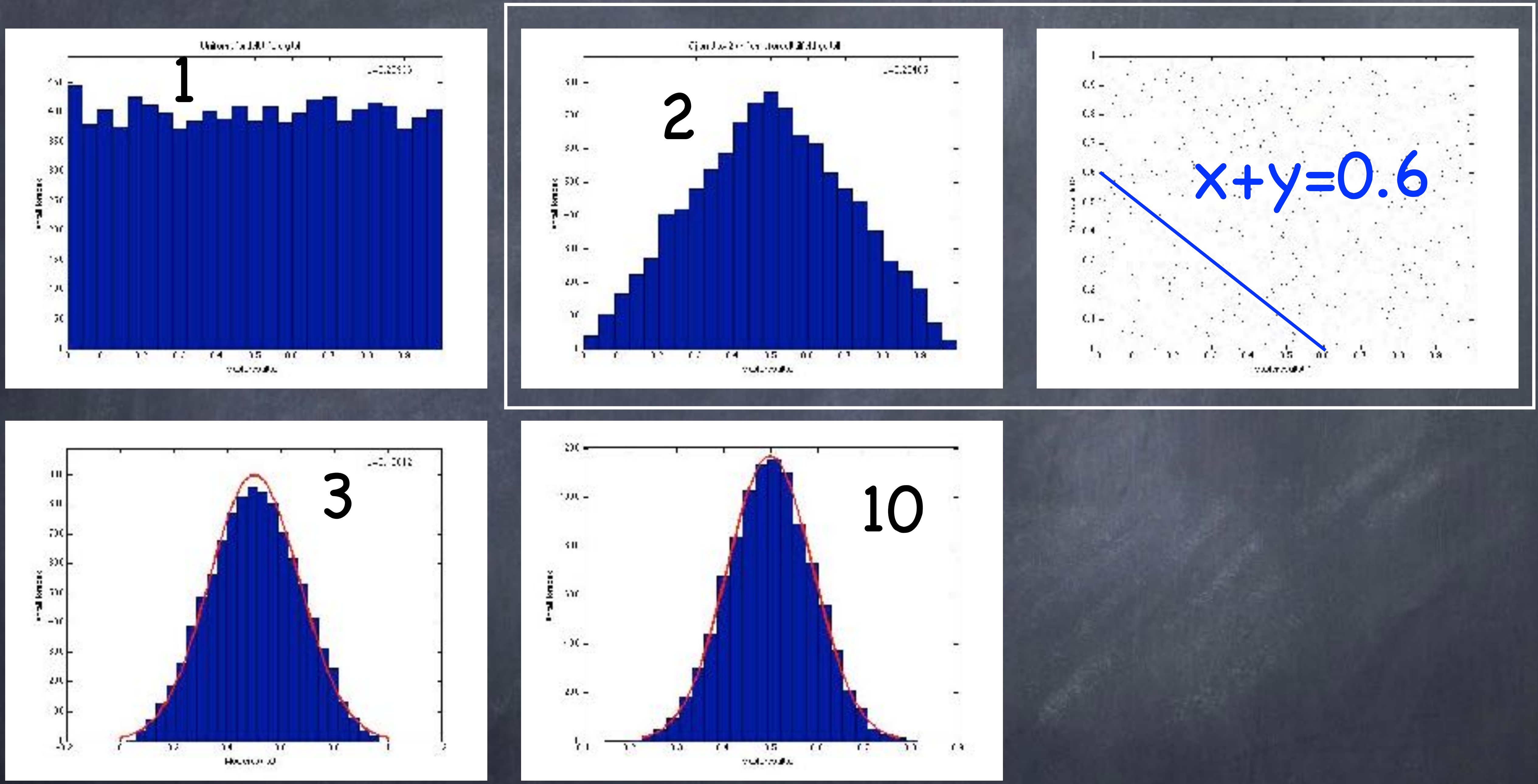






Sum av N=1,2,3,10 uniform-fordelte tilfeldige tall delt med N

Uniform -> gauss



Sum av N=1,2,3,10 uniform-fordelte tilfeldige tall delt med N

Konvolusjon av 2 gauss-fordelinger

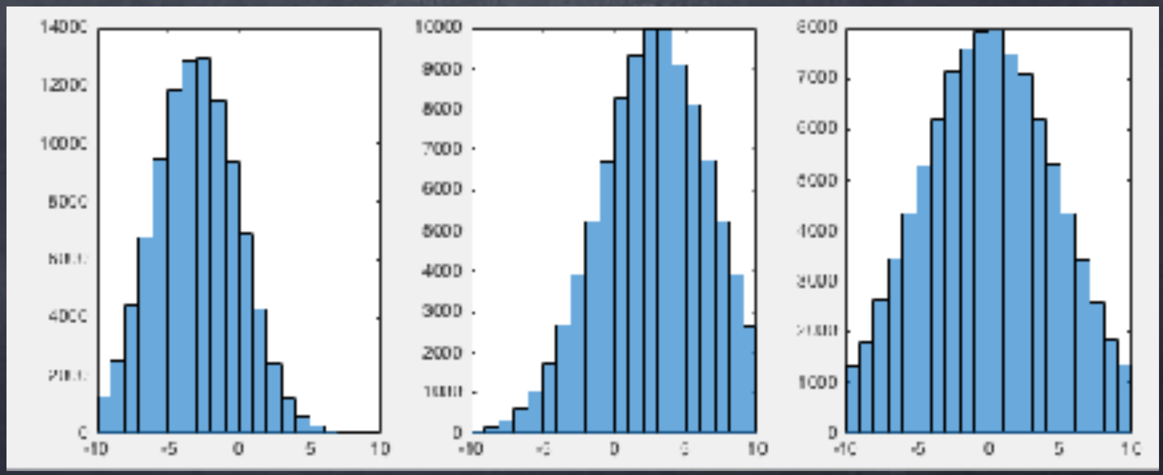
$$
\begin{aligned}
&z = x + y\\
&\rho_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-(x-\bar{x})^2/(2\sigma_x^2)}\\
&\rho_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-(y-\bar{y})^2/(2\sigma_y^2)}\\
&\rho_z(z) = \int\int \delta\left(z-(x+y)\right)\rho_y(y)\rho_x(x)\,dx\,dy\\
&= \int \rho_y(z-x)\rho_x(x)\,dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&z = x + y\\
&\rho_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-(x-\bar{x})^2/(2\sigma_x^2)}\\
&\rho_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-(y-\bar{y})^2/(2\sigma_y^2)}\\
&\rho_z(z) = \int\int \delta\left(z-(x+y)\right)\rho_y(y)\rho_x(x)\,dx\,dy\\
&= \int \rho_y(z-x)\rho_x(x)\,dx\\
&= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-(z-x-\bar{y})^2/(2\sigma_y^2)} e^{-(x-\bar{x})^2/(2\sigma_x^2)}\,dx\\
&x' = x-\bar{x},\ dx' = dx\\
&\rho_z(z) = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-(z-x'-\bar{x}-\bar{y})^2/(2\sigma_y^2)} e^{-x'^2/(2\sigma_x^2)}\,dx'\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \int e^{-(z-\bar{x}-\bar{y})^2/(2\sigma_y^2)-x'^2/(2\sigma_y^2)+2x'(z-\bar{x}-\bar{y})/(2\sigma_y^2)-x'^2/(2\sigma_x^2)}\,dx'\\
&1/\sigma^2 = 1/\sigma_x^2 + 1/\sigma_y^2,\ \sigma^2 = \frac{\sigma_x^2\sigma_y^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\\
&\rho_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} \int e^{-(z-\bar{x}-\bar{y})^2/(2\sigma_y^2)-x'^2/(2\sigma^2)+2x'(z-\bar{x}-\bar{y})/(2\sigma_y^2)}\,dx'\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-(z-\bar{x}-\bar{y})^2/(2\sigma_y^2)+\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\sigma_y^4}(z-\bar{x}-\bar{y})^2} \int e^{-\frac{1}{2}(x'/\sigma-\sigma(z-\bar{x}-\bar{y})/(\sigma_y^2)^2}\,dx' =\\
&\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}}\sqrt{2\pi\sigma^2}\, e^{-\frac{1}{2}(z-\bar{x}-\bar{y})^2(1/\sigma_y^2-\sigma^2/\sigma_y^2)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}} e^{-\frac{1}{2}(z-\bar{x}-\bar{y})^2/(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}} e^{-\frac{1}{2}(z-\bar{x}-\bar{y})^2/(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}
$$

- er også en gauss-fordeling, med std.avvik lik kvadratisk sum av std.avvikene
- dvs. for N **uavhengig** usikkerhetskilder i:

$$
\boxed{\sigma_{\text{tot}}^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2}
$$



Uavhengig/ukorrelerte målinger

$$\rho = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{var(x)var(y)}} \quad = \quad \frac{< (x-\bar{x})(y-\bar{y}) >}{\sqrt{< (x-\bar{x})^2 >< (y-\bar{y})^2 >}}$$

$$< xy > \quad \equiv \quad \int xyf(x,y)dxdy, \quad \int f(x,y)dxdy \equiv 1$$

Ukorrelerte: samme *g(x)* for alle *y*, samme *h(y)* for alle *x*

$$f(x,y) \quad = \quad g(x)h(y)$$

$$< (x-\bar{x})(y-\bar{y}) > \quad = \quad \int (x-\bar{x})g(x)dx \int (y-\bar{y})h(y)dy = 0 \ !$$

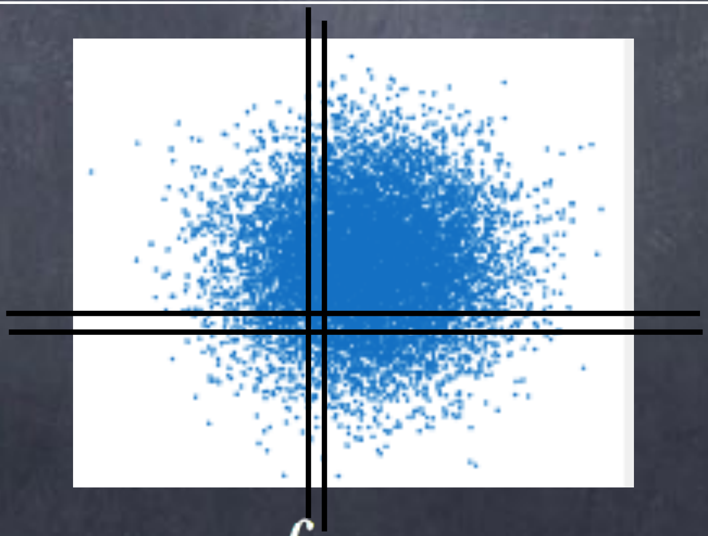
Uavhengig/ukorrelerte målinger

$$\rho = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{var(x)var(y)}} \quad = \quad \frac{<(x-\bar{x})(y-\bar{y})>}{\sqrt{<(x-\bar{x})^2><(y-\bar{y})^2>}}$$

$$<xy> \quad \equiv \quad \int xyf(x,y)dxdy, \quad \int f(x,y)dxdy \equiv 1$$

Ukorrelerte: samme *g(x)* for alle *y*, samme *h(y)* for alle *x*

$$f(x,y) \quad = \quad g(x)h(y)$$



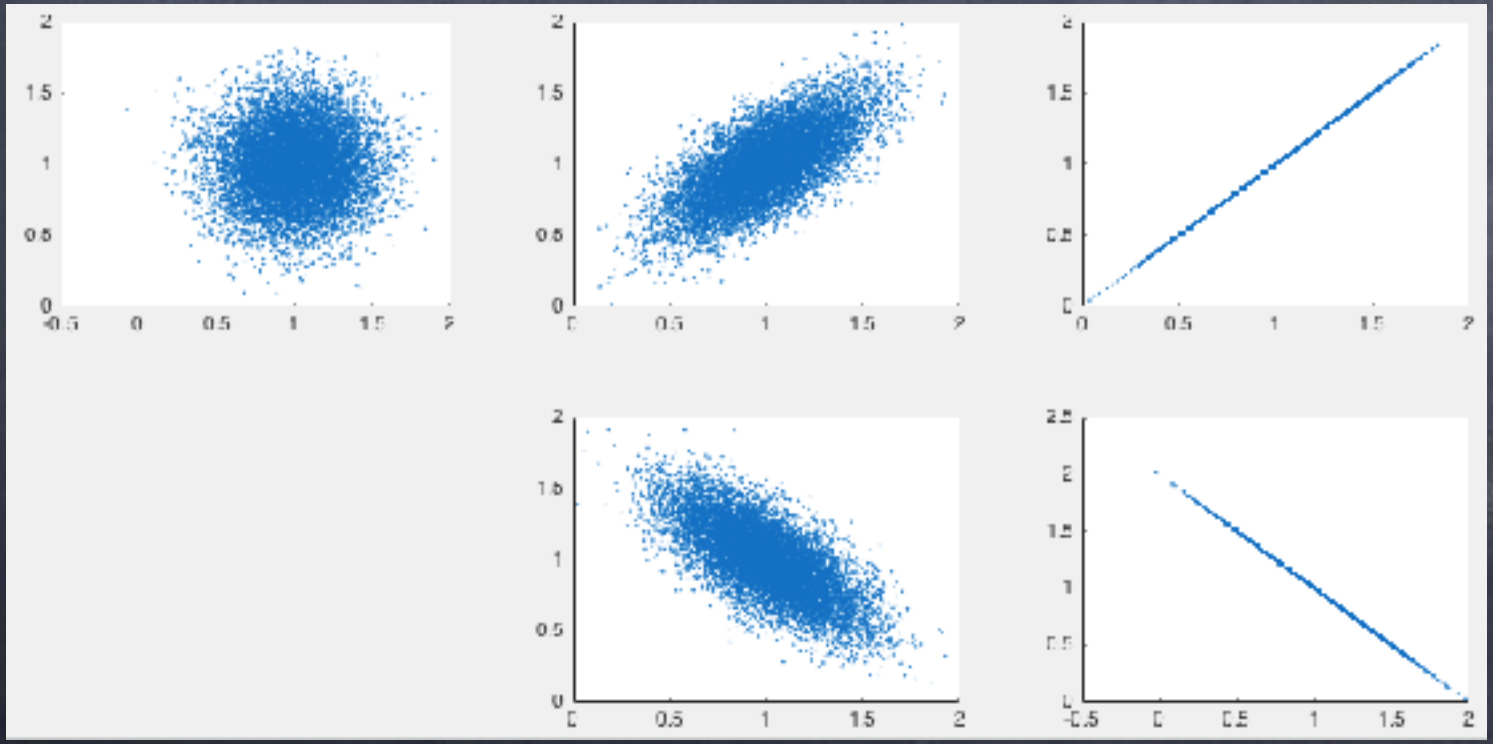
$$<(x-\bar{x})(y-\bar{y})> \quad = \quad \int (x-\bar{x})g(x)dx \int (y-\bar{y})h(y)dy = 0 \ !$$

Korrelasjoner

$\rho = 0$

$\rho = +0.7$

$\rho = -0.7$

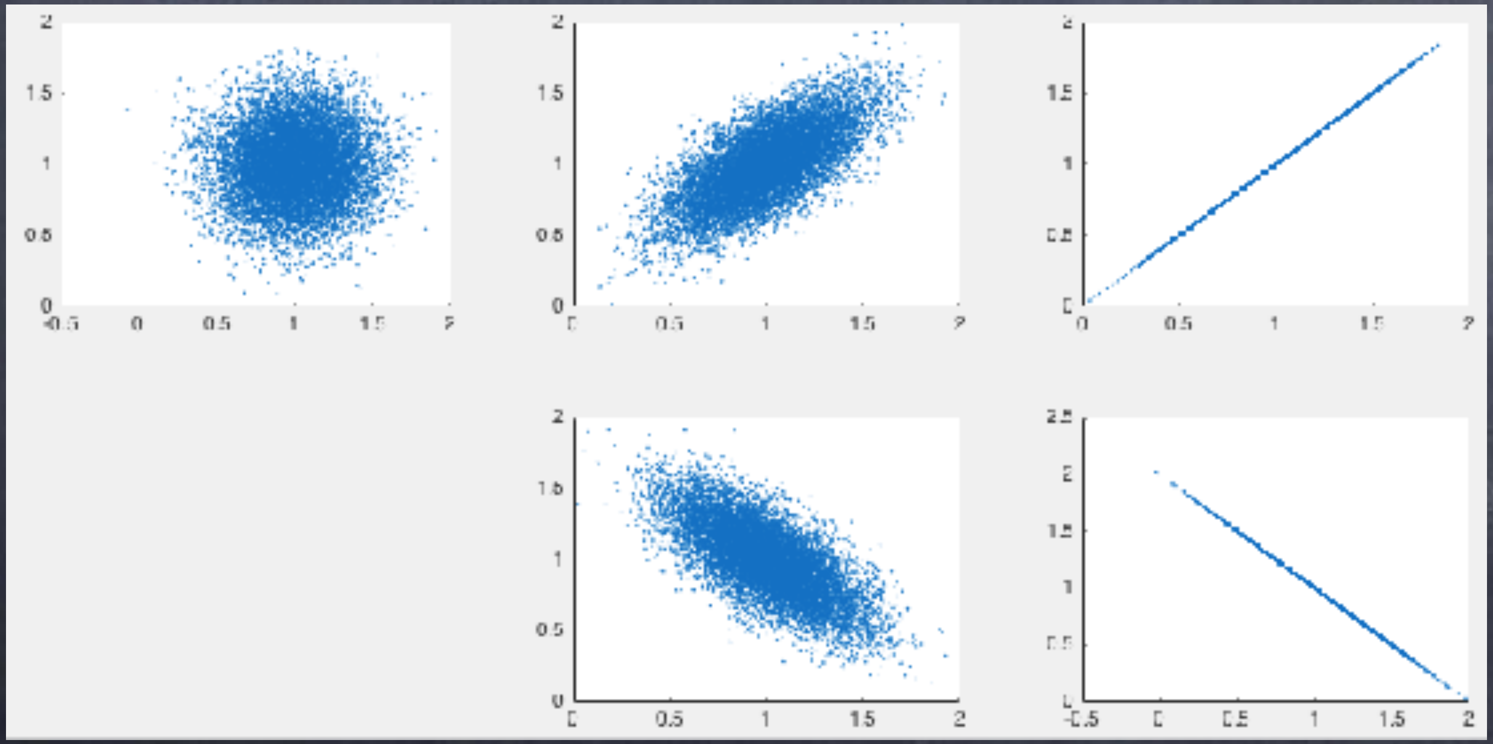


Korrelasjoner

$$\rho = 0$$

$$\rho = +0.7$$
$$\rho = -0.7$$

$$y = x \quad \rightarrow \quad \rho = 1$$
$$y = -x \quad \rightarrow \quad \rho = -1$$



Feil/usikkerhets-forplantning

Funksjoner av flere variabler

- Oftest består et resultat av målinger av flere størrelser og/eller at flere usikre faktorer inngår. Hva er da den totale usikkerheten?

$$\boxed{\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \\ \Delta L &= L_1 - L_2 \\ V &= xyz \end{aligned}}$$

Funksjoner av flere variabler

- Oftest består et resultat av målinger av flere størrelser og/eller at flere usikre faktorer inngår. Hva er da den totale usikkerheten?

$$\boxed{\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \\ \Delta L &= L_1 - L_2 \\ V &= xyz \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
f &= f(\vec{x}),\ \vec{x} \pm \Delta\vec{x} \\
df &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \\
\delta f &\simeq \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \text{H.O.} \\
(\delta f)^2 &\simeq \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i\right)\left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta x_j\right) \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (\delta x_i)^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta x_i \delta x_j \\
<(\delta f)^2> &\simeq \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2 + 0 \\
(\Delta f)^2 &\simeq \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2
\end{aligned}}$$

Funksjoner av flere variabler

- Oftest består et resultat av målinger av flere størrelser og/eller at flere usikre faktorer inngår. Hva er da den totale usikkerheten?

$$
\begin{aligned}
T &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \\
\Delta L &= L_1 - L_2 \\
V &= xyz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f &= f(\vec{x}),\ \vec{x} \pm \Delta\vec{x} \\
df &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \\
\delta f &\simeq \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i + \text{H.O.} \\
(\delta f)^2 &\simeq \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i\right)\left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\delta x_j\right) \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (\delta x_i)^2 + \sum_i \sum_{j\neq i} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\delta x_i \delta x_j \\
< (\delta f)^2 > &\simeq \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2 + 0 \\
(\Delta f)^2 &\simeq \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2
\end{aligned}
$$

- Når går det galt med denne approksimasjonen?

Enkle funksjoner av flere variabler

Squires

Table 4.1. *Combination of errors*

Relation between Z and A, B	Relation between standard errors	
$\left.\begin{matrix} Z = A + B \\ Z = A - B \end{matrix}\right\}$	$(\Delta Z)^2 = (\Delta A)^2 + (\Delta B)^2$	(i)
$\left.\begin{matrix} Z = AB \\ Z = A/B \end{matrix}\right\}$	$\left(\frac{\Delta Z}{Z}\right)^2 = \left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B}{B}\right)^2$	(ii)
$Z = A^n$	$\frac{\Delta Z}{Z} = n\frac{\Delta A}{A}$	(iii)
$Z = \ln A$	$\Delta Z = \frac{\Delta A}{A}$	(iv)
$Z = \exp A$	$\frac{\Delta Z}{Z} = \Delta A$	(v)

Eksempel: $Z = A^n B^m$

Eksempel: $Z = A^n B^m$

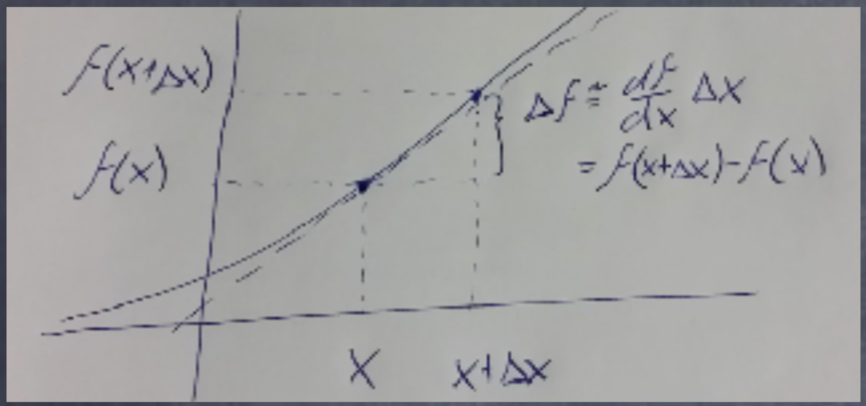
$$\left(\frac{\Delta Z}{Z}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\partial Z}{\partial A}\Delta A\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial B}\Delta B\right)^2}{(A^n B^m)^2}$$

$$= \left(n\frac{\Delta A}{A}\right)^2 + \left(m\frac{\Delta B}{B}\right)^2$$

Mer komplisert eksempel

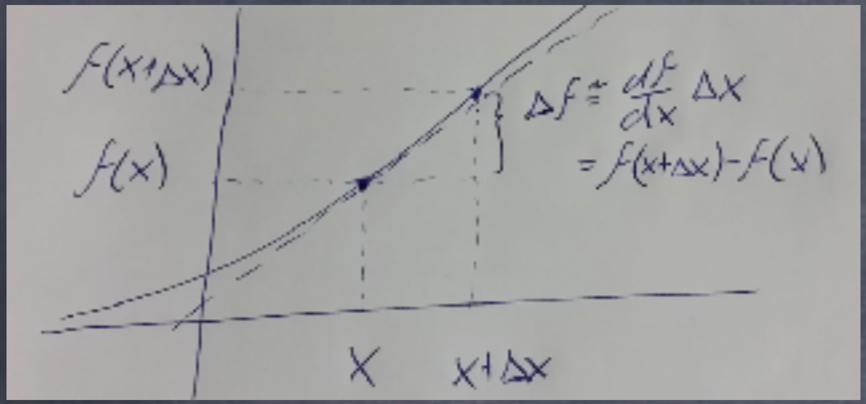
$$
\begin{aligned}
R &= \frac{\rho^2 + h^2}{2h},\ \rho \pm \Delta\rho,\ h \pm \Delta h \\
(\Delta R)^2 &\simeq (\rho/h)^2(\Delta\rho)^2 + \frac{1}{4}(1 - \rho^2/h^2)^2(\Delta h)^2
\end{aligned}
$$

Alternativ metode for kompliserte funksjoner



$$\frac{df}{dx}\Delta x \to \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}\Delta x = f(x+\Delta x) - f(x)$$

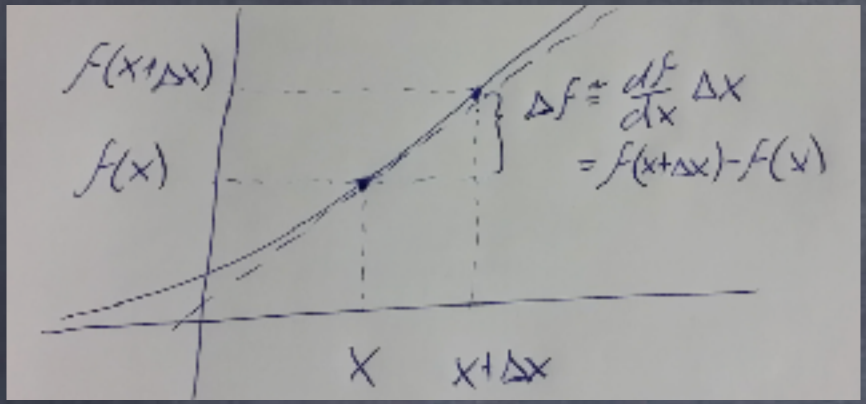
Alternativ metode for kompliserte funksjoner



$$\frac{df}{dx}\Delta x \to \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x - x}\Delta x = f(x+\Delta x)-f(x)$$

$$\begin{aligned}(\Delta R)^2 &\simeq [R(\rho+\Delta\rho,h)-R(\rho,h)]^2\\ &+ [R(\rho,h+\Delta h)-R(\rho,h)]^2\end{aligned}$$

Alternativ metode for kompliserte funksjoner

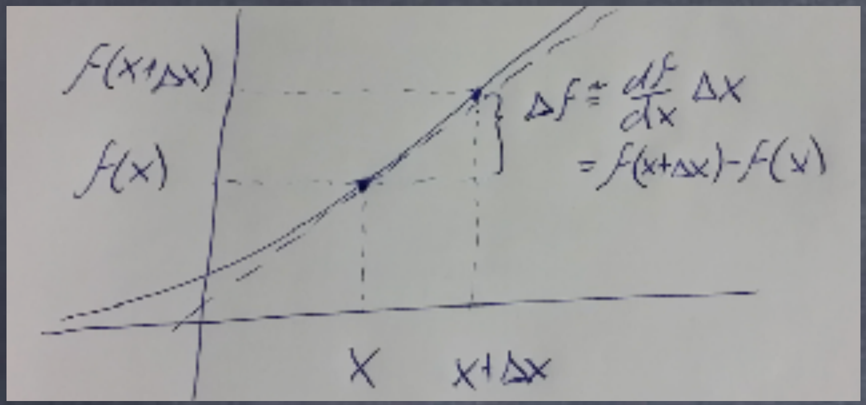


$$\frac{df}{dx}\Delta x \rightarrow \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x - x}\Delta x = f(x+\Delta x)-f(x)$$

$$\begin{aligned}(\Delta R)^2 &\simeq [R(\rho+\Delta\rho,h)-R(\rho,h)]^2 \\ &+ [R(\rho,h+\Delta h)-R(\rho,h)]^2\end{aligned}$$

- Denne metoden er ofte enklere/raskere å bruke

Alternativ metode for kompliserte funksjoner



$$\frac{df}{dx}\Delta x \to \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x - x}\Delta x = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\begin{aligned}(\Delta R)^2 \quad &\simeq \quad [R(\rho+\Delta\rho, h) - R(\rho, h)]^2 \\ &+ \quad [R(\rho, h+\Delta h) - R(\rho, h)]^2\end{aligned}$$

- Denne metoden er ofte enklere/raskere å bruke
- Hvis funksjonens krumning ikke er liten kan det hende at $\Delta R_+ \neq \Delta R_-$ er signifikant

Total usikkerhet

Total usikkerhet

- Hva gjør vi med "summen" av tilfeldige og systematisk usikkerhet (total usikkerheten)?

Total usikkerhet

- Hva gjør vi med "summen" av tilfeldige og systematisk usikkerhet (total usikkerheten)?
- Anvend $Z = (A \pm \Delta A) + (B \pm \Delta B) \text{ med } B = 0$

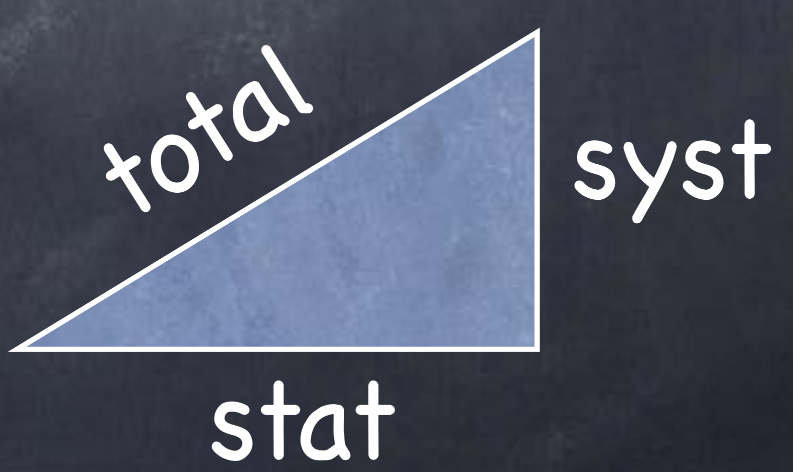
  der ΔA representerer tilfeldig usikkerhet og ΔB representerer systematisk usikkerhet

Total usikkerhet

- Hva gjør vi med "summen" av tilfeldige og systematisk usikkerhet (total usikkerheten)?
- Anvend $Z = (A \pm \Delta A) + (B \pm \Delta B) \text{ med } B = 0$

  der ΔA representerer tilfeldig usikkerhet og ΔB representerer systematisk usikkerhet

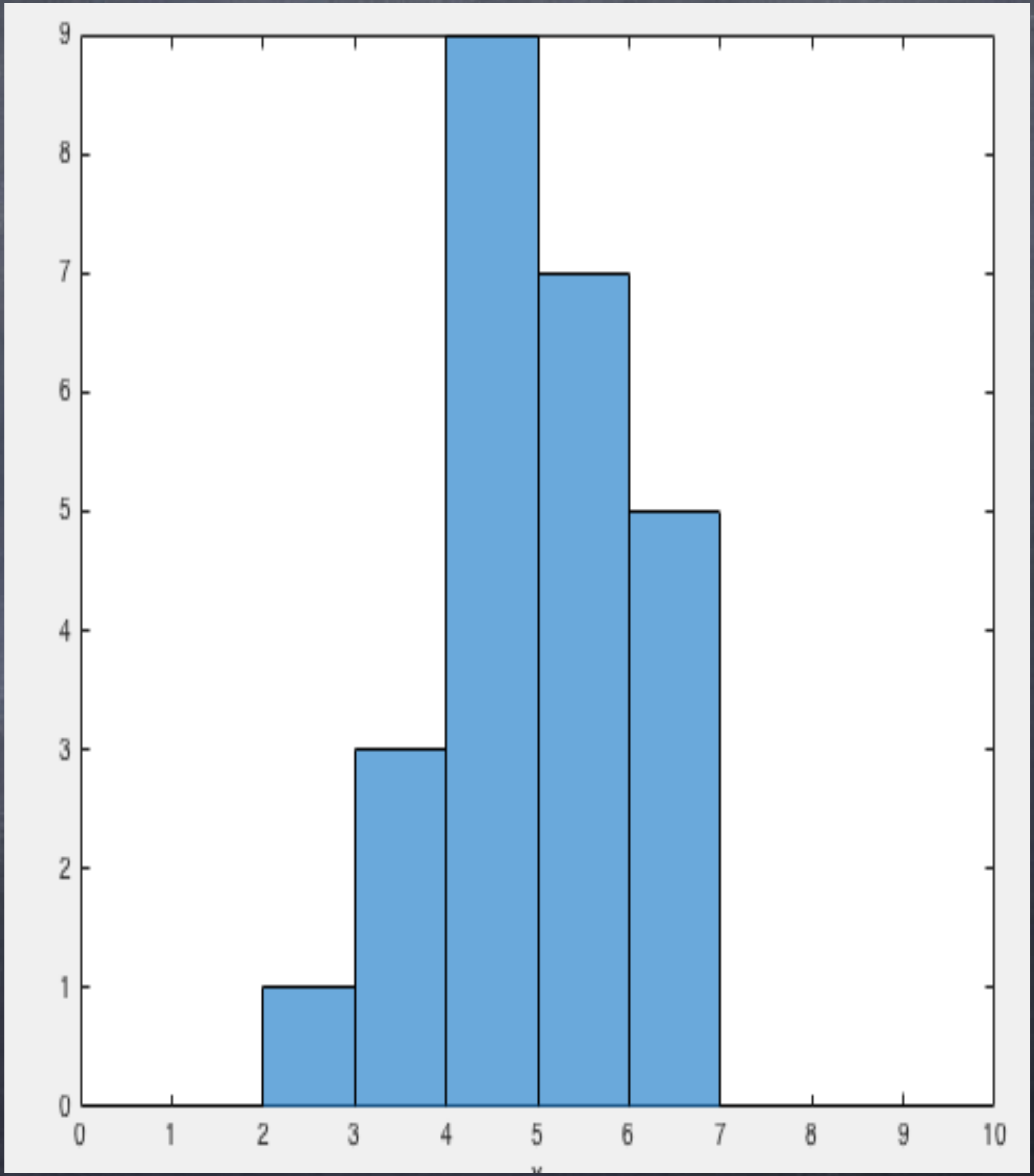
$$\boxed{(\Delta x)^2_{\text{tot}} = (\Delta x)^2_{\text{stat}} + (\Delta x)^2_{\text{syst}}}$$



Gjennomsnitt, varians, usikkerhet i gjennomsnittet

Gjennomsnitt, varians, σ, σ_m

6.034693009917860
5.726885133383238
4.696559075213984
5.293871467096658
4.212717196241362
5.888395631757642
3.852929893030850
3.931129541831968
4.190501305575125
2.055715838005104
6.438380292815099
5.325190539456198
4.245071680830296
6.370298540095228
3.288483581146302
4.897757553914509
4.758552958392642
5.319206739165502
5.312858596637429
4.135120082675543
4.969948703803731
4.835120980790962
5.627707287528726
6.093265669039484
6.109273297614397



Gjennomsnitt, varians, σ, σ_m

Gjennomsnitt, varians, σ, σ_{m}

- Sample mean (gjennomsnitt) $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

Gjennomsnitt, varians, σ, σ_{m}

- Sample mean (gjennomsnitt) $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
- Sample variance $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$

Gjennomsnitt, varians, σ, σ_{m}

- Sample mean (gjennomsnitt) $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
- Sample variance $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$
- **Unbiased** square of the standard deviation

$$\sigma^2 \simeq \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

Gjennomsnitt, varians, σ, σ_{m}

- Sample mean (gjennomsnitt) $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
- Sample variance $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$
- **Unbiased** square of the standard deviation

$$\sigma^2 \simeq \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

- Unbiased standard error (squared) in the mean

$$\sigma_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{N}\sigma^2$$

Gjennomsnitt, varians, σ, σ_{m}

- Sample mean (gjennomsnitt) $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
- Sample variance $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$
- **Unbiased** square of the standard deviation

$$\sigma^2 \simeq \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

- Unbiased standard error (squared) in the mean

$$\sigma_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{N}\sigma^2$$

(se sider 12-15 i Squires for forholdet s:σ:σ_{m})

Gjennomsnitt, varians, σ, σ_{m}

Model: x=5, σ=1, N=25

- Sample mean (gjennomsnitt) $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
- Sample variance $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$
- **Unbiased** square of the standard deviation

$$\sigma^2 \simeq \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

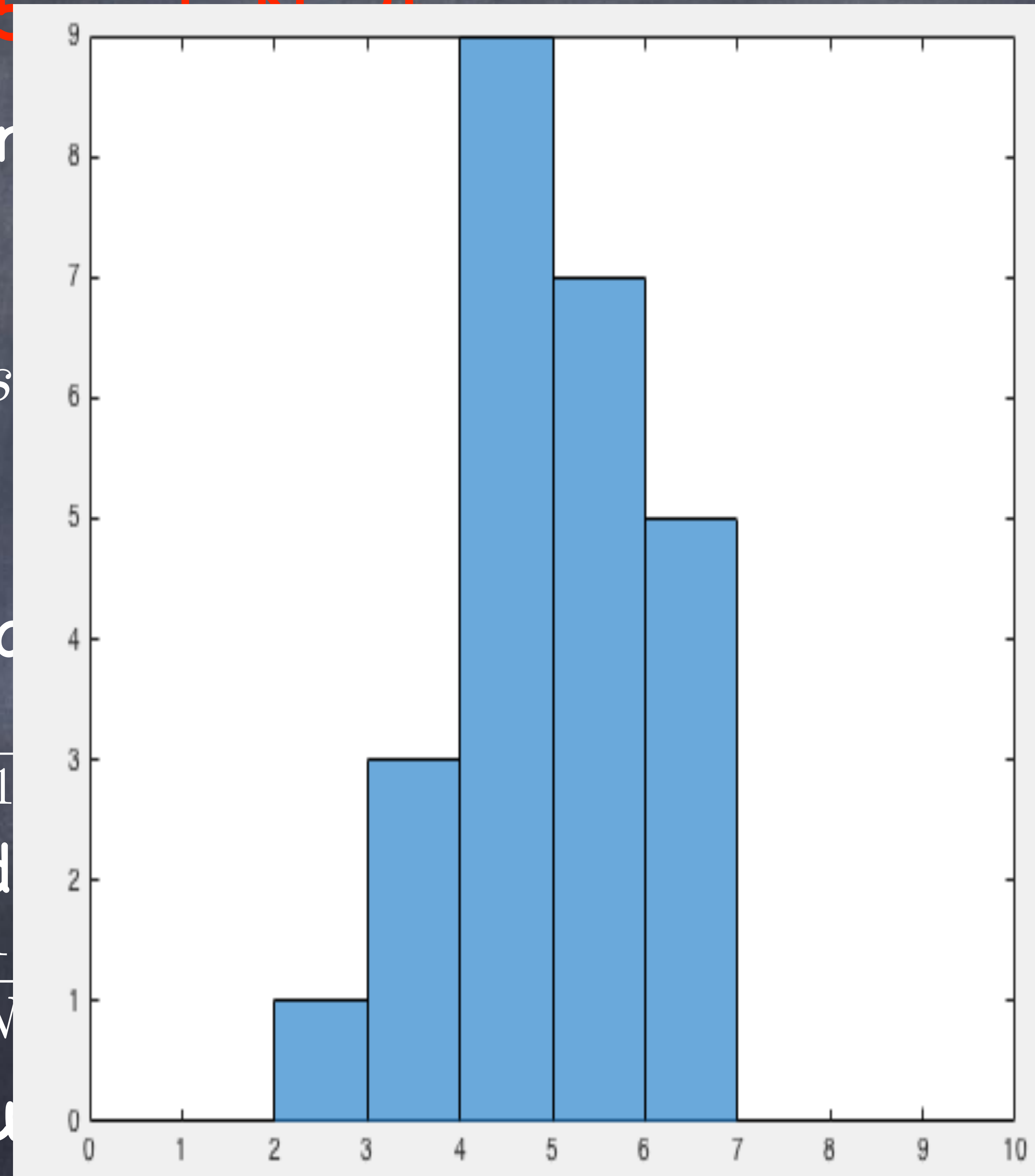
- Unbiased standard error (squared) in the mean

$$\sigma_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{N}\sigma^2$$

(se sider 12-15 i Squires for forholdet s:σ:σ_{m})

Gjennomsnitt, varians, σ, σ_m

6.034693009917860
5.726885133383238
4.696559075213984
5.293871467096658
4.212717196241362
5.888395631757642
3.852929893030850
3.931129541831968
4.190501305575125
2.055715838005104
6.438380292815099
5.325190539456198
4.245071680830296
6.370298540095228
3.288483581146302
4.897757553914509
4.758552958392642
5.319206739165502
5.312858596637429
4.135120082675543
4.969948703803731
4.835120980790962
5.627707287528726
6.093265669039484
6.109273297614397



Gjennomsnitt, varians, σ, σ_m

Model: x=5, σ=1, N=25

- Sample mean (gjennomsnitt) $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

- Sample variance $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$

- **Unbiased** square of the standard deviation

$$\sigma^2 \simeq \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

- Unbiased standard error (squared) in the mean

$$\sigma_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{N}\sigma^2$$

(se sider 12-15 i Squires for forholdet s:σ:σ_m)

Gjennomsnitt, varians, σ, $\sigma_{\rm m}$

Model: x=5, σ=1, N=25

- Sample mean (gjennomsnitt) $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ = 4.94

- Sample variance $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$

- **Unbiased** square of the standard deviation

$$\sigma^2 \simeq \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

- Unbiased standard error (squared) in the mean

$$\sigma_{\rm m}^2 = \frac{1}{N}\sigma^2$$

(se sider 12-15 i Squires for forholdet s:σ:$\sigma_{\rm m}$)

Gjennomsnitt, varians, σ, σ_{m}

Model: x=5, σ=1, N=25

- Sample mean (gjennomsnitt) $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ = 4.94
- Sample variance $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$ = 1.03^2
- **Unbiased** square of the standard deviation

$$\sigma^2 \simeq \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

- Unbiased standard error (squared) in the mean

$$\sigma_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{N}\sigma^2$$

(se sider 12-15 i Squires for forholdet s:σ:σ_{m})

Gjennomsnitt, varians, σ, σ_{m}

Model: x=5, σ=1, N=25

- Sample mean (gjennomsnitt) $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ = 4.94
- Sample variance $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$ = 1.03^2
- **Unbiased** square of the standard deviation

$$\sigma^2 \simeq \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$ = 1.05^2

- Unbiased standard error (squared) in the mean

$$\sigma_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{N}\sigma^2$$

(se sider 12-15 i Squires for forholdet s:σ:σ_{m})

Gjennomsnitt, varians, σ, σ_{m}

Model: x=5, σ=1, N=25

- Sample mean (gjennomsnitt) $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ = 4.94
- Sample variance $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$ = 1.03^2
- **Unbiased** square of the standard deviation

$$\sigma^2 \simeq \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = 1.05^2$$

- Unbiased standard error (squared) in the mean

$$\sigma_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{N}\sigma^2 = 0.21^2$$

(se sider 12-15 i Squires for forholdet s:σ:σ_{m})

Usikkerheten i usikkerheten (*)

$$var(x) \equiv < (x - \bar{x})^2 >$$

$$var(s^2) = \frac{2s^4}{n-1}$$

$$var(s) = \frac{s^2}{2(n-1)}$$

* Squires 3.7, Appendiks B

Usikkerheten i usikkerheten (*)

$$var(x) \equiv < (x - \bar{x})^2 >$$

$$var(s^2) = \frac{2s^4}{n-1}$$

$$var(s) = \frac{s^2}{2(n-1)}$$

- hva om n=10:

* Squires 3.7, Appendiks B

Usikkerheten i usikkerheten (*)

$$var(x) \equiv < (x - \bar{x})^2 >$$

$$var(s^2) = \frac{2s^4}{n-1}$$

$$var(s) = \frac{s^2}{2(n-1)}$$

- hva om n=10:

$$\frac{\delta s}{s} = \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}$$

$$= 24\%$$

* Squires 3.7, Appendiks B

Linjetilpasning

Linjetilpasning (*)

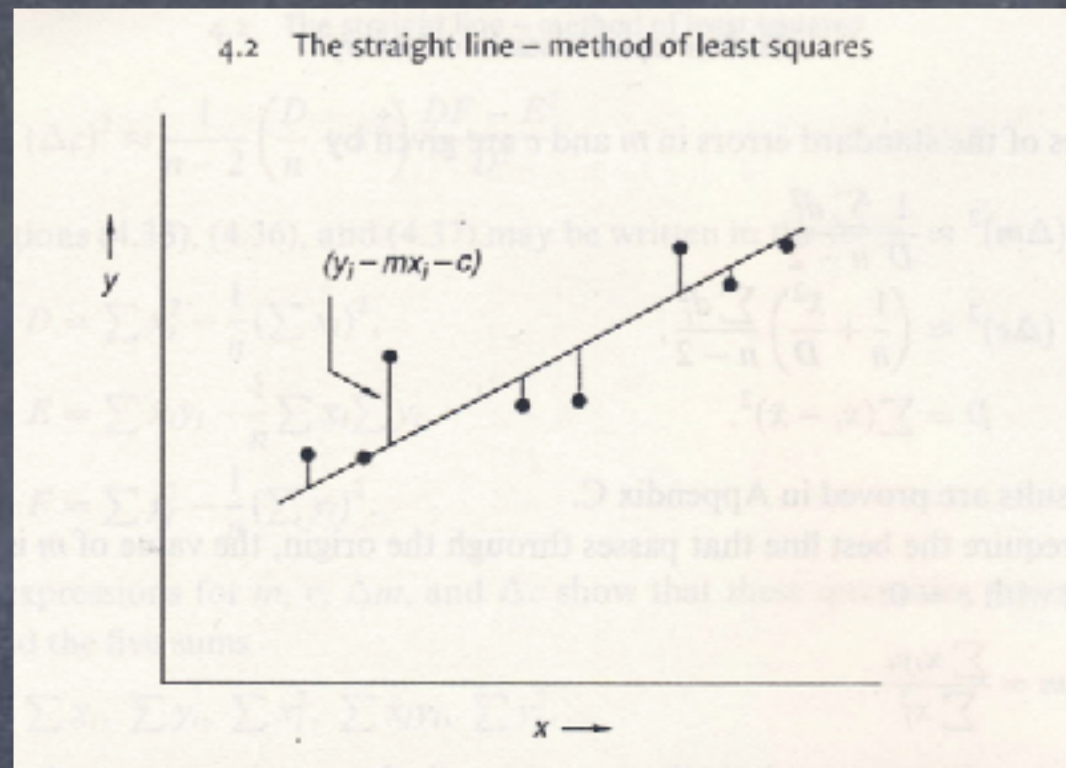


Fig. 4.2. Method of least squares. The best line through the points is taken to be the one for which $\sum(y_i - mx_i - c)^2$ is a minimum.

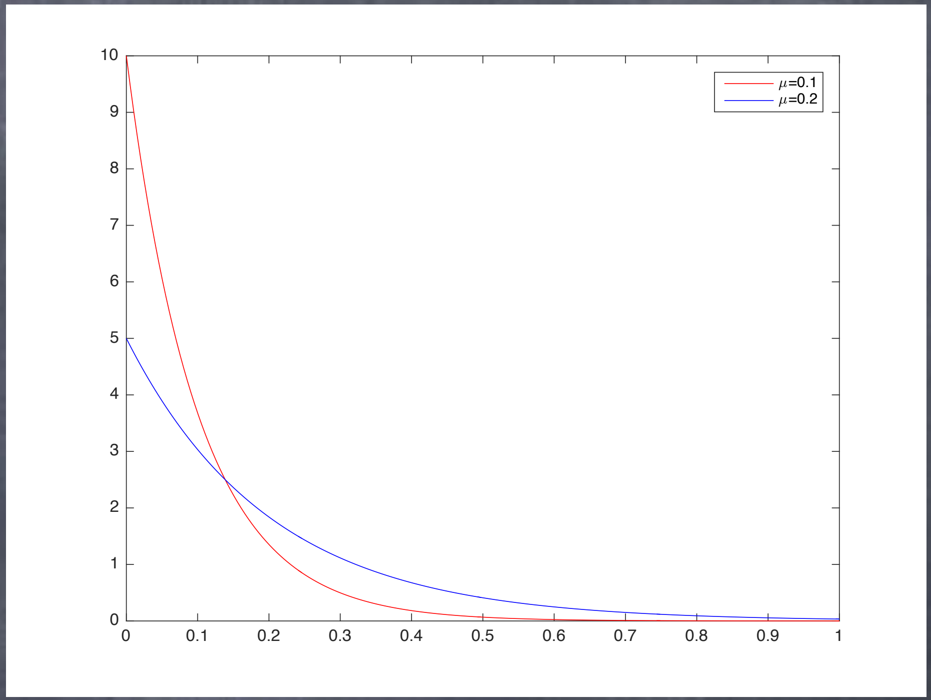
- Usikkerheten i y_i estimert med data
- Usikkerheter på m og b pleier å være avhengig

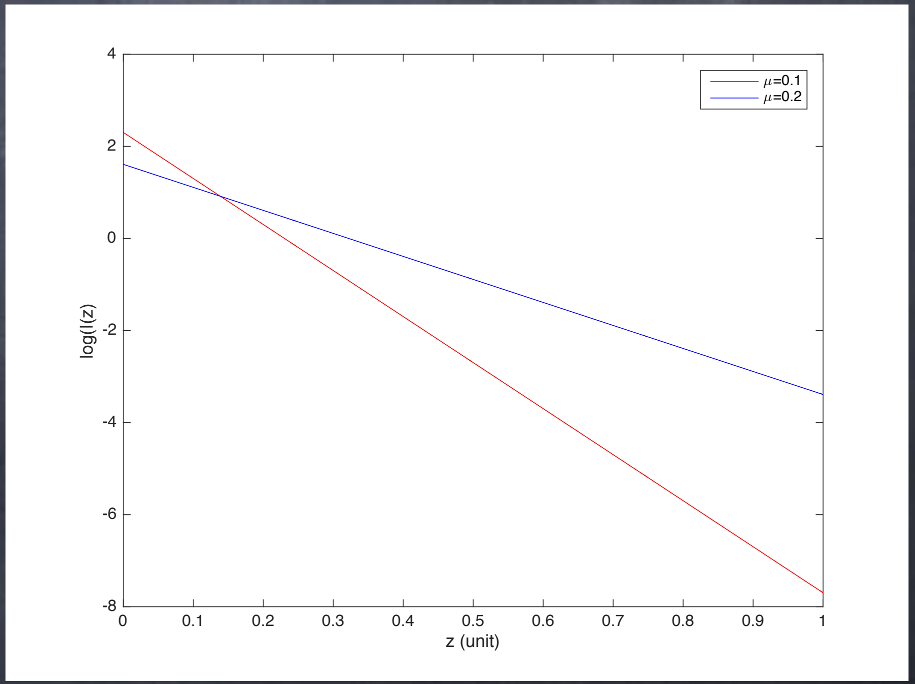
* Squires 4.2, Appendiks C, og MA11X0(?)

y vs x, mange målinger

- Kommer langt med rett linje, f.eks:

$$\begin{aligned}
I(z) &= I_0 e^{-\mu z} \\
\ln\left(\frac{I(z)}{I_0}\right) &= -\mu z \\
\ln\left(I(z)\right) &= \ln(I_0) - \mu z \\
y &= a + bx \\
\mu &= -b,\ I_0 = e^a
\end{aligned}$$





Oppsummering

Oppsummering

- Systematisk og tilfeldig usikkerhet (nøyaktighet og presisjon)

Oppsummering

- Systematisk og tilfeldig usikkerhet (nøyaktighet og presisjon)
- Usikkerhet for en funksjon av flere variabler (flere metoder)

Oppsummering

- Systematisk og tilfeldig usikkerhet (nøyaktighet og presisjon)
- Usikkerhet for en funksjon av flere variabler (flere metoder)
- Forskjell mellom usikkerhet i en måling og usikkerheten i gjennomsnittet for mange målinger

Oppsummering

- Systematisk og tilfeldig usikkerhet (nøyaktighet og presisjon)
- Usikkerhet for en funksjon av flere variabler (flere metoder)
- Forskjell mellom usikkerhet i en måling og usikkerheten i gjennomsnittet for mange målinger
- Linje-tilpasning (mange eksp. kan lineæriseres)

Oppsummering

- Systematisk og tilfeldig usikkerhet (nøyaktighet og presisjon)
- Usikkerhet for en funksjon av flere variabler (flere metoder)
- Forskjell mellom usikkerhet i en måling og usikkerheten i gjennomsnittet for mange målinger
- Linje-tilpasning (mange eksp. kan lineæriseres)
- Kommer langt med Squires og MATLAB som referanser

Backup

Maximum likelihood

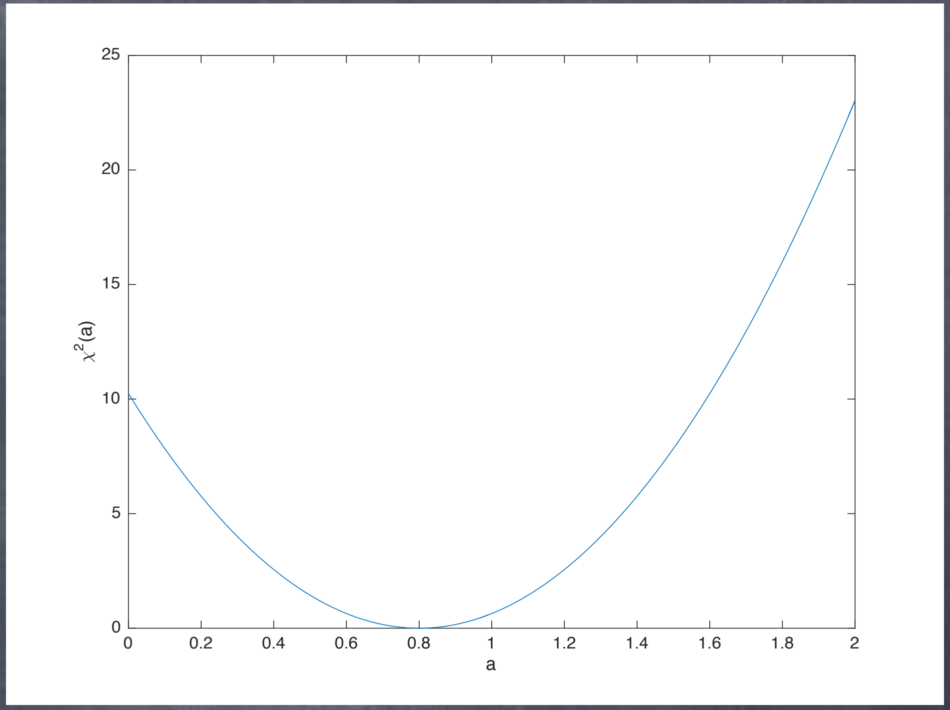
- viktigst og mest brukt metode for å estimere modellparametre for et datasett
- ofte er måleusikkerhet gaussisk

$$
\begin{aligned}
f(x|a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \\
\mathcal{L}(\vec{x}|\vec{a}) &= \prod_{i=1}^{N} f(x_i|a_i) \\
-2\ln\mathcal{L} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i-a_i)^2}{\sigma_i^2} + konstanter
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i-a_i)^2}{\sigma_i^2}}$$

χ^2-minimisering

- Enkel måling, 1 parameter a



$$\chi_1^2 = \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = \frac{2(x-a)}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow \hat{a} = x$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a^2} = \frac{1}{\sigma^2}, \; \sigma^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a^2}\right)^{-1}$$

Linjetilpasning (*)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - (mx_i + b))^2}{\sigma_i^2}$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial m} = \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0$$

- Vist i Squires i detalje, kan også utledes fra χ^2-minimisering
- 2 likninger, 2 ukjente

$$< x > \equiv \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} / \sum \frac{1}{\sigma_i^2}$$

- Samme uttryk for LLSQ (dvs σ=1)

$$m = \frac{< xy > - < x >< y >}{< x^2 > - < x >^2}$$

$$b = \frac{< x^2 >< y > - < x >< xy >}{< x^2 > - < x >^2} =< y > -m < x >$$

* Squires 4.2, MA1100(?)

Usikkerhetene i m,b (*)

$$d_i = y_i - mx_i - b_i$$

$$D = \sum (x_i - < x >)^2$$

$$(\Delta m)^2 \simeq \frac{1}{D} \frac{\sum d_i^2}{n-2}$$

$$(\Delta b)^2 \simeq \left(\frac{1}{n} + \frac{< x >^2}{D} \right) \frac{\sum d_i^2}{n-1}$$

- Usikkerheten i y_i estimert med data
- Usikkerheter på m og b ikke uavhengig
- En transformasjon slik at <x´>=0 gjør at de er uavhengig (og usikkerheten på b′ er minimal)

* Squires 4.2, Appendiks C

Linjeparameter-usikkerheter

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial m} = \frac{\partial\chi^2}{\partial b} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_m^2 & \sigma_{mb}^2 \\ \sigma_{bm}^2 & \sigma_b^2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\chi^2}{\partial m^2} & \frac{\partial^2\chi^2}{\partial m \partial b} \\ \frac{\partial^2\chi^2}{\partial b \partial m} & \frac{\partial^2\chi^2}{\partial b^2} \end{bmatrix}^{-1} = \ldots$$

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma_T^2}{\bar{x^2} - \bar{x}^2},\ \sigma_T^2 = \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2}\right)^{-1}$$

$$\sigma_b^2 = = \frac{\bar{x^2}\sigma_T^2}{\bar{x^2} - \bar{x}^2}$$

$$\sigma_{mb}^2 = \frac{-\bar{x}\sigma_T^2}{\bar{x^2} - \bar{x}^2}$$

- Vi vil for det meste estimere σ ut i fra dataene og bruke resultatene på side 39 i Squires (utledet i Appendix C)
- Vil henvise til kompendium i MAT1120

Hvordan kan vi minimisere usikkerhetene? Korrelasjonene?

Mange målinger, gjennomsnitt

- Mange målinger, 1 parameter

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_i^2}$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \bar{x}} = \sum \frac{-2(x_i - \bar{x})}{\sigma_i^2} = 0 \;\Rightarrow\; \bar{x} = \frac{\sum x_i/\sigma_i^2}{\sum 1/\sigma_i^2}$$

- Hva er usikkerheten i parameteren?

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \chi^2}{\partial \bar{x}^2}\right)^{-1} = \frac{1}{\sum 1/\sigma_i^2}$$

- Hva om alle usikkerhetene er like?

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum x_i, \; \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad !!$$

Kvizz

- Skiskytter:
  - Høy puls og dårlige nerver gir...?
  - Mellom liggende og stående skyting har vinden økt med 2 m/s fra høyre til venstre: dette gir....?

Kvizz

A. En vis stoppeklokke er designet med en 10.10 MHz krystall-oscillator , men produsenten ved en feil bruker en type som har 10.01 MHz.

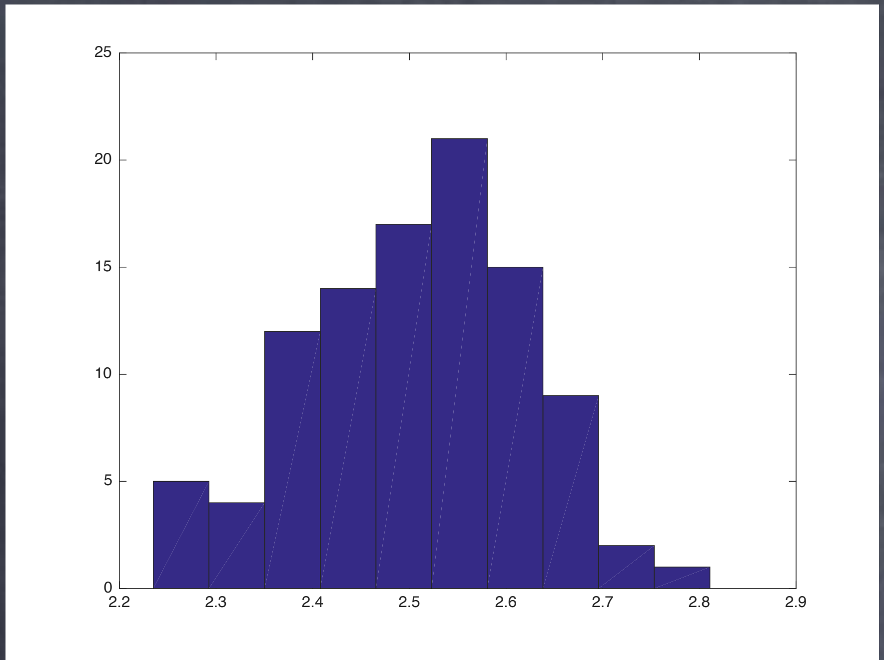
B. 3 målinger av antall beta-stråler per sekund (målt over et minutt) en radioaktiv kilde sender ut gir resultatene 1.7, 2.2, og 1.3 Bq.

1. A fører til systematisk usikkerhet og B skyldes det samme.
2. A fører til systematisk usikkerhet og B skyldes tilfeldig usikkerhet
3. A fører til tilfeldig usikkerhet og B skyldes det samme.
4. A fører til tilfeldig usikkerhet og B skyldes systematisk usikkerhet.

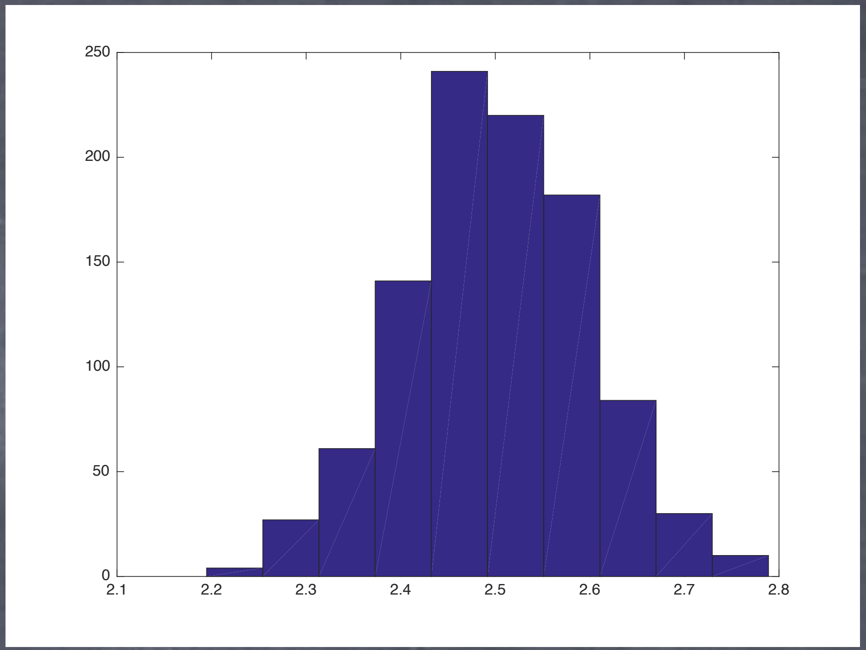
Kvizz: Hva er feil her?! (redigert etter 2014)

“Dynamisk område vil si hvor godt et instrument kan måle både store verdier og små variasjoner rundt store verdier nøyaktig. Dette oppgis som et antall størrelsesordener mellom den største verdien man er i stand til å måle med et instrument, og den minste endringen man samtidig kan observere, som altså er instrumentets følsomhet i det gitte måleområdet.

For et formål har du behov for stor nøyaktighet i en avstand du måler. Hvis du er nødt til å ha variasjonene med 5% nøyaktighet, hvor stort dynamisk område må du da i en avstandsmåling?”



Kvizz



- Vi måler 100 tider og får gjennomsnitt og sample $\sqrt{}$varians 2.50 s og 0.10 s.
- Hva er vårt estimat av σ og σ_m?
- Hva forventer vi å skje med s, σ og σ_m hvis vi øker antall målinger til 1000?

Poissonfordelingen

Poisson prosess (*)

- Under en kort tid Δt er det 0 eller 1 hendelser (e.g. radioaktiv henfall/spalting) med konstant rate $\lambda = dN/dt$. For alle "telle-eksperimenter": $\lambda t = \mu$.

* Squires Appendiks D

Poisson prosess (*)

- Under en kort tid Δt er det 0 eller 1 hendelser (e.g. radioaktiv henfall/spalting) med konstant rate $\lambda = dN/dt$. For alle "telle-eksperimenter": $\lambda t = \mu$.

$$
\begin{aligned}
P_0(\Delta t) &\simeq 1 - \lambda\Delta t,\ P_1(\Delta t) = \lambda\Delta t \\
P_0(t+\Delta t) &= P_0(t) * (1 - \lambda\Delta t) \\
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} &= \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \\
P_0(t=0) &= 1 \Longrightarrow P_0(t) = e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

* Squires Appendiks D

Poisson prosess

$$
\begin{aligned}
P_1(t+\Delta t) &= P_1(t)P_0(\Delta t) + P_0(t)P_1(\Delta t) \\
P_n(t+\Delta t) &= P_n(t)P_0(\Delta t) + P_{n-1}(t)P_1(\Delta t) \\
&= P_n(t)(1-\lambda\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_1(t+\Delta t) &= P_1(t)(1-\lambda\Delta t) + P_0(t)\lambda\Delta t \\
\frac{dP_1(t)}{dt} &= -\lambda P_1(t) + \lambda e^{-\lambda t},\ P_1(0) = P_2(0) = ... = 0 \\
P_1(t) &= e^{-\lambda t}\lambda t
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{P_n(t) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!}
$$

Poisson prosess

$$
\begin{aligned}
P_1(t+\Delta t) &= P_1(t)P_0(\Delta t) + P_0(t)P_1(\Delta t) \\
P_n(t+\Delta t) &= P_n(t)P_0(\Delta t) + P_{n-1}(t)P_1(\Delta t) \\
&= P_n(t)(1-\lambda\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t
\end{aligned}
$$

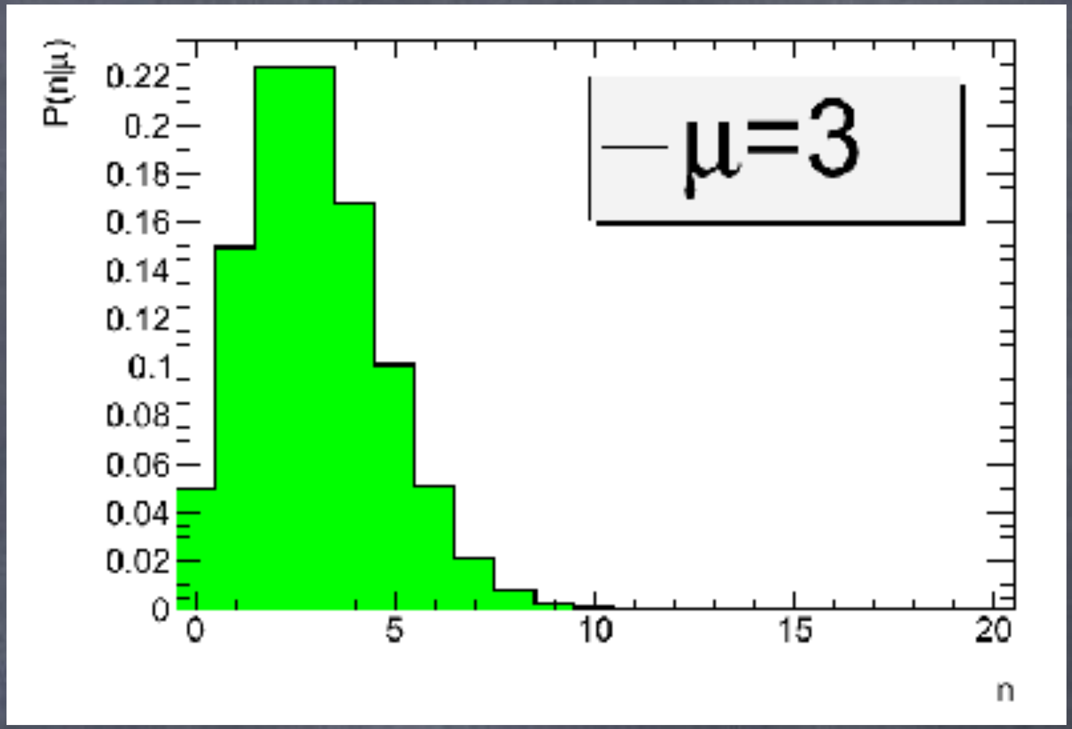
$$
\begin{aligned}
P_1(t+\Delta t) &= P_1(t)(1-\lambda\Delta t) + P_0(t)\lambda\Delta t \\
\frac{dP_1(t)}{dt} &= -\lambda P_1(t) + \lambda e^{-\lambda t},\ P_1(0) = P_2(0) = ... = 0 \\
P_1(t) &= e^{-\lambda t}\lambda t
\end{aligned}
$$

$$\boxed{P_n(t) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!}$$

Typisk eksperiment
$\mu = \lambda t$

Poisson-fordelingen

- Egenskaper

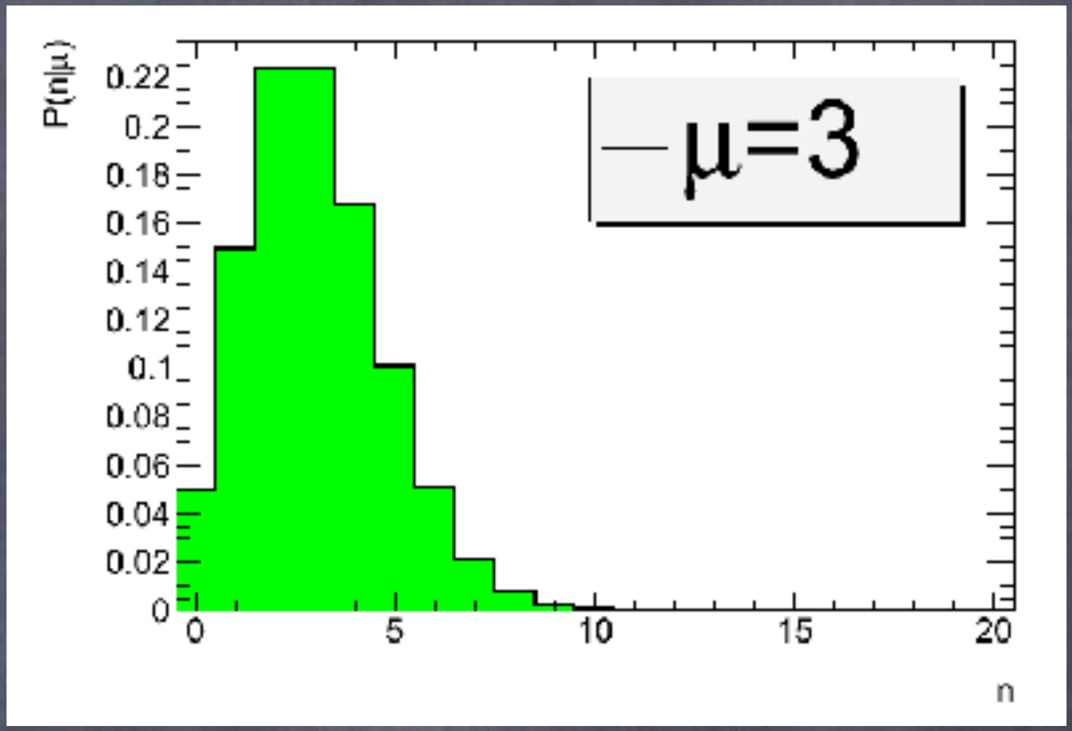


$$P_n(\mu) = \frac{e^{-\mu}(\mu)^n}{n!}$$

$$< n(\mu) > = \sum_{i=0}^{\infty} i P_i(\mu) = \mu$$

$$< (n(\mu) - \mu)^2 > = \sum_{i=0}^{\infty} (i - \mu)^2 P_i(\mu) = \mu$$

Poisson-fordelingen



- Egenskaper

$$
\begin{aligned}
P_n(\mu) &= \frac{e^{-\mu}(\mu)^n}{n!} \\
< n(\mu) > &= \sum_{i=0}^{\infty} i P_i(\mu) = \mu \\
< (n(\mu) - \mu)^2 > &= \sum_{i=0}^{\infty} (i-\mu)^2 P_i(\mu) = \mu
\end{aligned}
$$

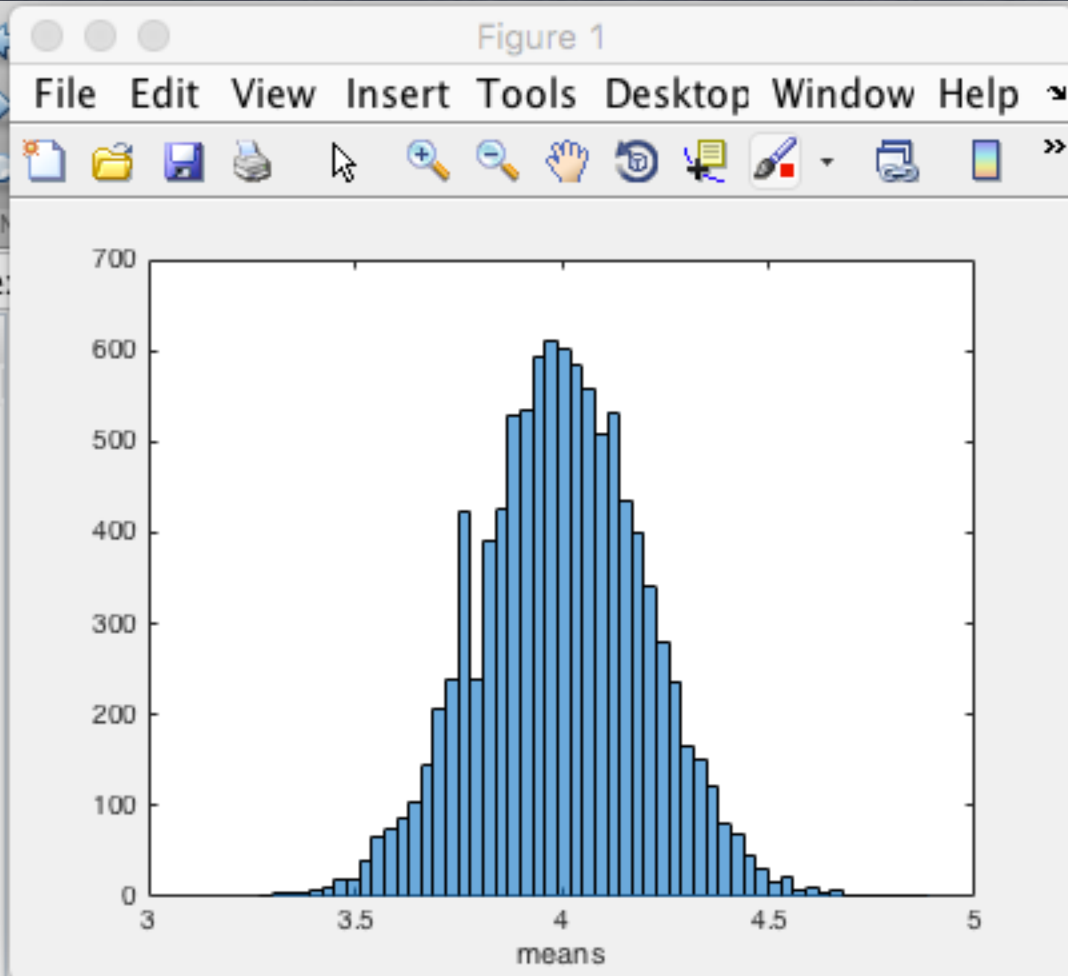
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu) = ?}$$

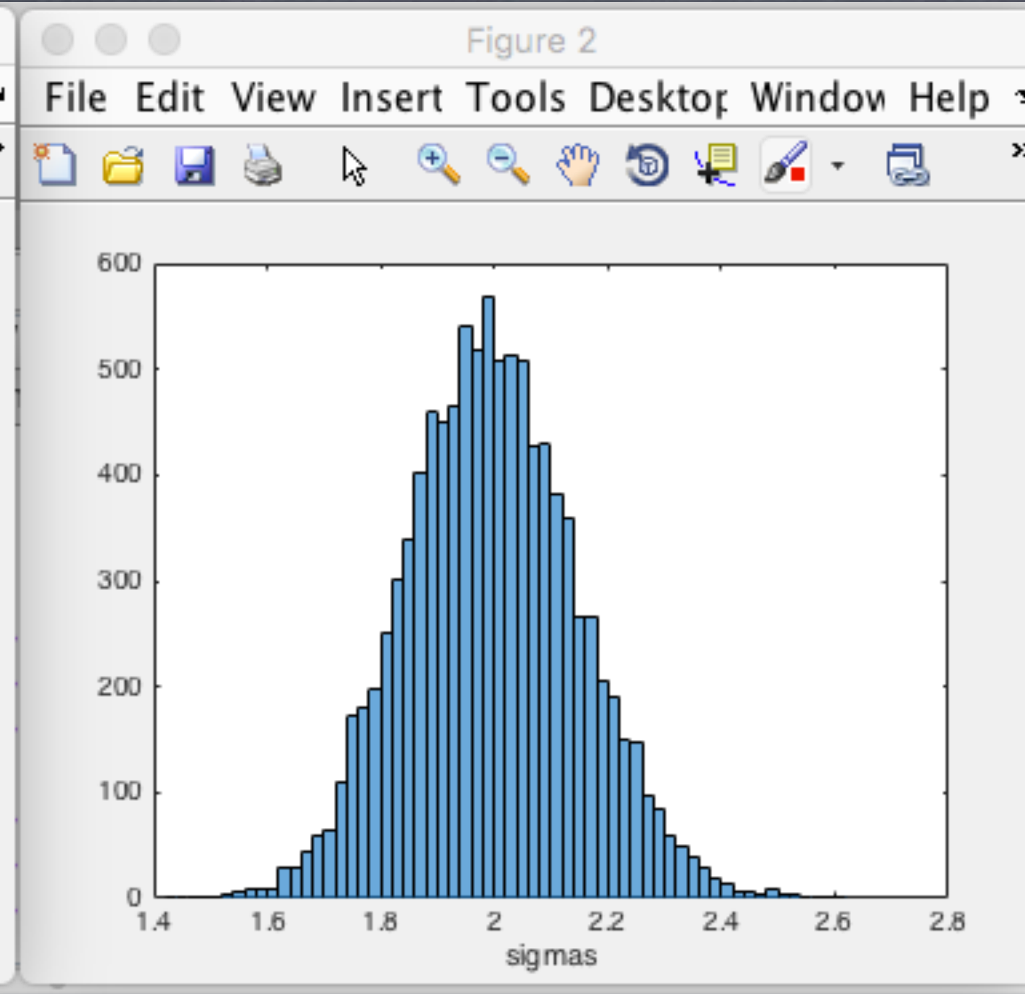
Poisson-numerisk

- F.eks. vil vi ha bruk for en sammenligning av gjennomsnittet og std avvik:

```
mu=4;
N=100;

for i=1:10000
    n=poissrnd(mu,N,1);
    m(i)=mean(n);
    sigma(i)=std(n);
end

histogram(m)
figure(2)
histogram(sigma)

fprintf('Mean of means              : %d\n',mean(m))
fprintf('Standard deviation of means: %d\n\n',std(m))
fprintf('sqrt(mu/N)                 : %d\n\n',sqrt(mu/N))


fprintf('Mean of standard deviations: %d\n',mean(sigma))
fprintf('Standard dev. of std. dev. : %d\n',std(sigma))
fprintf('sqrt(mu/(2*(N-1)))         : %d\n\n',sqrt(mu/(2*(N-1))))

fprintf('Standard dev. of std. dev.^2: %d\n',std(sigma.^2))
fprintf('sqrt(2*mu^2/(N-1))          : %d\n\n',sqrt(2*mu^2/(N-1)))

fprintf('Mean of sigma-sqrt(m)         : %d\n',mean(sigma-sqrt(m)))
fprintf('Standard dev of sigma-sqrt(m): %d\n',std(sigma-sqrt(m)))
```

F.e
og





Command Window

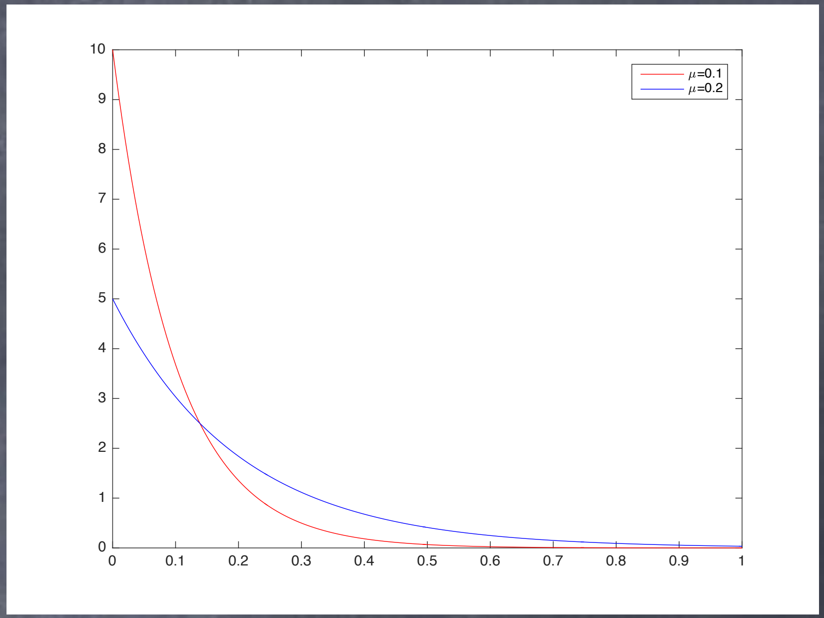
```
>> PoissonStudy
Mean of means                : 4.002093e+00
Standard deviation of means: 1.996185e-01

sqrt(mu/N)                   : 2.000000e-01

Mean of standard deviations: 1.995779e+00
Standard dev. of std. dev. : 1.497522e-01
sqrt(mu/(2*(N-1)))           : 1.421338e-01

Standard dev. of std. dev.^2: 6.017848e-01
sqrt(2*mu^2/(N-1))            : 5.685352e-01

Mean of sigma-sqrt(m)          : -4.121273e-03
>>
```

Eksponentialfordeling/ utvikling

Eksponential prosess

- En konstant andel av det som er igjen henfaller/blir borte (e.g. ladning på en kondensator i en RC-krets, antall radioaktive atomer i en kilde, γ-stråling på vei gjennom bly)

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= -\lambda N(t) \\ N(t=0) &= N_0 \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \end{aligned}$$



- Egenskaper

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt &= \frac{1}{\lambda} \\ \bar{t} &= < t >= \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \\ < (t-\bar{t})^2 > &= \int_0^\infty (t- < t >)^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$