

# MAGNETISME

(Dated: 20. april 2018)

I denne øvelsen skal vi studere forskjellige sider av fenomenet magnetisme. Vi studerer oppførselen til diamagnetiske og ferromagnetiske materialer, og utforsker hvordan magnetiseringen av ferromagnetiske materialer avhenger av geometrien til magneten. Vi skal også se på et fenomen som kalles Faraday-effekten, som demonstrerer sammenhengen mellom lys og magnetisme. Forsøket handler om å måle endringen i lysets polarisasjonsretning når det passerer gjennom en anisotrop krystall plassert i et magnetfelt.

## 1. MAGNETISKE MATERIALER

Hele grunnlaget for den klassiske elektromagnetismen kan oppsummeres i fire partielle differensialligninger, som vi refererer til som Maxwell's ligninger. Disse ligningene kan skrives på flere former. Her velger vi å gjengi dem på differensialform:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (1d)$$

I Maxwells likninger er det full symmetri mellom elektriske og magnetiske fenomener. I naturen oppfører likevel de to fenomenene seg noe ulikt. Grunnen til dette er at elektriske ladninger, også kalt elektriske monopoler, finnes i stort antall i naturen. Magnetiske monopoler har derimot aldri blitt observert. Alle magnetfelt vi kjenner til genereres av ladninger i bevegelse, og danner lukkede magnetfeltlinjer. Det er bevegelsene til elektriske ladde elementærpartikler som forårsaker magnetiske egenskaper som vi kan observere i materialer på makronivå. Avhengig av materialets oppbygning kan vi observere svært ulike magnetiske oppførsel. Spesielt er elektronets spinn viktig i forklaringen av mange materialers magnetiske egenskaper. Her skiller vi mellom to typer spinn: elektronets *egenspin*, som gjør at det oppfører seg som en liten dipol, og *banespin*. Banespinn kommer inn når elektronet er bundet til et atom, og bidrar til atomets totale magnetiske moment. Om de ulike elektronenes banespin (innad i et atom) kansellerer hverandre eller ikke er meget vesentlig for den magnetiske oppførselen til et materiale. Dette er årsaken til at vi skiller mellom tre ulike former for magnetiske materialer, som vi skal se nærmere på nå.



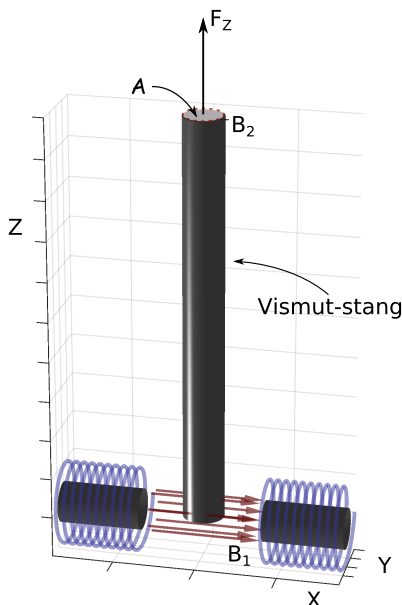
Figur 1: En levende frosk som leviterer i et sterkt magnetfelt (ca. 16 Tesla). (Nijmegen High Field Magnet Laboratory [<http://www.hfml.ru.nl/froglev.html>])

### Diamagnetisme

Det vanligste er at netto magnetisk moment i et atom er null, blant annet fordi elektronene i et elektronpar foretrekker å ha motsatt spinn. Slike materialer kaller vi *diamagnetiske*; de er ikke magnetiske uten en ytre påvirkning. Hvis materialet føres inn i et magnetfelt vil imidlertid elektronorbitalene deformeres, som gir et lite magnetisk moment. Dette er orientert slik at det oppstår en Lorentzkraft som motsetter seg forandringen av feltstyrken inne i materialet, noe vi ofte refererer til som Lenz's regel. Diamagnetiske materialer vil derfor skyves ut av feltet. Vi sier at materialets *magnetiske susceptibilitet*  $\chi < 0$ .

Denne egenskapen gjelder for alle atomer. Derfor kan vi si at alle materialer (til en viss grad) er diamagnetiske. Vi skal se senere at hvis atomet allerede har et magnetisk moment er den diamagnetiske effekten forholdsmessig svært liten. Den diamagnetiske effekten er altså en svak effekt sammenlignet med andre magnetiske effekter. Likevel er den viktig, blant annet siden den påvirker alle materialer. Et eksempel på dette er gitt i Fig. 1, hvor en frosk leviterer i et sterkt magnetfelt.

Grafit er et eksempel på et materiale hvor den diamag-



Figur 2: Illustrasjon av oppsettet dere skal bruke for å måle magnetisk susceptibilitet i vismut. Dere skal bruke en presisjonsvekt til å måle den magnetiske kraften  $F_z$  som virker på staven når den er plassert i et inhomogent magnetfelt.

netiske effekten er forholdsvis stor. Det består av karbonatomer som danner sterke kovalente bindinger med hverandre, og brukes blant annet i blyanter.<sup>1</sup> På grunn av de sterke kovalente bindingene er grafitt en meget god leder av elektrisk strøm.

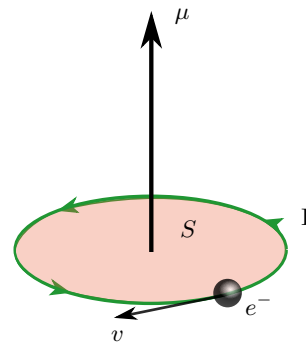
Andre materialer som er gode diamagneter er såkalte superledere. Disse er faktisk perfekte diamagneter ( $\chi = -1$ ). På grunn av at den elektriske motstanden er null kan de sette opp et magnetfelt som eksakt kansellerer det påtrykte magnetfelt.

### Ekspirimeter diamagnetisme:

Dere skal forsøke å bestemme den magnetiske susceptibiliteten  $\chi$  til vismut, som er det mest diamagnetiske metallet vi kjenner til. Dette kan dere gjøre ved å måle den magnetiske kraften som virker på en vismut-stang plassert i et inhomogent magnetfelt. Med det eksperimentelle oppsettet i Fig. 2 kan det vises at den magnetiske kraften som virker på vismut-prøven er gitt ved (se appendikset for utledning):

$$F_z = -\frac{\chi}{2\mu_0} \mathcal{A}(B_1^2 - B_2^2). \quad (2)$$

Her er  $\mathcal{A}$  tverrsnittet til stangen, og  $B_1$  og  $B_2$  er x-



Figur 3: Illustrasjon av magnetisk dipolmoment  $\mu$  generert av en ladning (her et elektron) som beveger seg i sirkelbane. Hvis  $I$  representerer strømmen som skyldes ladningens bevegelse, og  $S$  er arealet avgrenset av ladningens bane, så er  $\mu = IS$ . En ladd partikkel som spinner rundt sin egen akse vil på tilsvarende måte generere et dipolmoment, hvilket vi kommer tilbake til senere i oppgaveteksten.

komponenten av  $\mathbf{B}$ -feltet i det to endene av stangen (Fig. 2). Legg merke til at kraften virker i vertikal retning (z-retning i vårt koordinatsystem), og at kraften er rettet oppover hvis  $\chi < 0$ . Stangen blir altså dyttet ut av feltet.

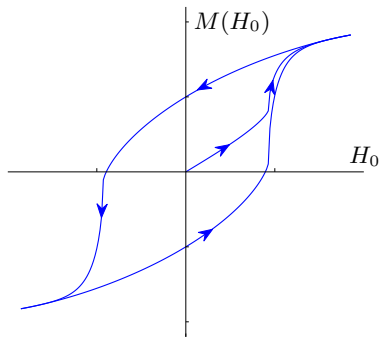
Gjør følgende undersøkelser:

- Mål tverrsnittet  $\mathcal{A}$  til vismut-prøven. Undersøk hvorvidt  $\mathcal{A}$  er konstant langs lengden til prøven.
- Bruk strømkilden til å generere et magnetfelt mellom spolene i Fig. 2. Mål  $B_1$ ,  $B_2$  og  $F_z$  for ulike verdier av  $I$  mellom 0 og 2.4 Ampere, for eksempel  $I = (0, 0.2, 0.4, \dots 2.4)$  A. Lag en oversiktlig tabell over målingene.
- Bruk målingene til å bestemme den magnetiske susceptibiliteten til vismut. Gjør en vurdering av om det er viktig å ta med målingene av  $B_2$ , eller om du kan anta at  $B_2 = 0$  med god tilnærming. Oppgi usikkerheten i målingen din. Sammenlign målingen med andre kilder.
- Hva ville skjedd om du ikke hadde brukt et kvadratledd i tilpasningen din, men antatt en lineær sammenheng mellom  $F_z$  og  $B_1$ ? Sammenlign kvaliteten på tilpasningene med egnede statistiske metoder.

### Para/ferro-magnetisme

I materialer hvor atomene har uparrede elektroner vil vi observere en helt annen type magnetisk oppførsel enn i diamagnetiske materialer. Siden de uparrede elektronene gir opphav til et netto spin, og dermed et netto *magnetisk moment*  $\mu$  (se Fig. 3), så vil hvert enkelt atom fungere som en liten stavmagnet. Hvis den gjennomsnittlige

<sup>1</sup> Det er med andre ord ikke noe bly i en blyant, kun karbon i form av grafitt. *Grafen* er betegnelsen på en plan heksagonal struktur av karbonatomer, og er byggesteinen i grafitt. Grafen har de siste årene vist seg å ha mange spennende egenskaper.



Figur 4: Skisse av magnetiseringen  $M$  av et ferromagnetisk materiale som funksjon av påtrykt magnetfelt  $H_0$ . Vi ser at magnetiseringen går mot metning når  $H_0$  øker, hvilket skyldes at så godt som alle dipolene er rettet langs det påtrykte feltet. Videre er et tydelig at materialet beholder deler av sin magnetisering også etter at det påtrykte feltet er fjernet. Denne effekten kalles *hysteresese*.

orienteringen til disse atomene ikke er tilfeldig vil det gi opphav til et magnetfelt også utenfor materialet. Vi sier at materialet er *magnetisert*, og kvantiserer dette med parameteren  $\mathbf{M} = d\boldsymbol{\mu}/dV$ . Her er  $d\boldsymbol{\mu}$  det magnetiske momentet i et volum  $dV$ .

*Paramagnetiske* materialer får kun en magnetisering når de plasseres i et ytre magnetfelt. De magnetiske dipolene vil minimere sin potensielle energi, og retter seg etter det påtrykte feltet. Når feltet tas bort vil termiske effekter føre til at dipolene igjen får en tilfeldig orientering. I et paramagnetisk materiale er magnetiseringen omtrent proporsjonal med styrken på det påtrykte magnetfeltet  $\mathbf{H}$ . Vi skriver derfor ofte  $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ , hvor den magnetiske susceptibiliteten  $\chi$  kan ses på som en materialkonstant. I paramagnetiske materialer er  $0 < \chi \ll 1$ . Et paramagnetisk materiale fungerer altså som en svak magnetfeltforsterker.

Et *ferromagnetisk* materiale vil oppføre seg på tilsvarende måte som et paramagnetisk materiale i et magnetfelt, men magnetiseringen er vesentlig større. Forsterkingen av det påtrykte feltet kan være av størrelsesorden  $10^4$ . I disse materialene er også vekselvirkningen mellom de atomære dipolene så store at det er i stand til å opprettholde en gjennomsnittlig orientering også uten et ytre påtrykket magnetfelt. Vi kan altså lage en permanent magnet ved å plassere et ferromagnetisk materiale i et magnetfelt, og deretter skru av feltet (se Fig. 4). Materialet vil beholde mesteparten magnetiseringen inntil det blir avmagnetisert av en magnetfelt i en annen retning, eller varmes opp så mye at de termiske vekselvirkningene blir sterkere enn de magnetiske.

Det er viktig å merke seg at for ferromagnetiske materialer så er *ikke*  $\chi$  en materialkonstant. Generelt vil  $\chi$  være avhengig av den magnetiske flukstettheten  $\mathbf{B}$  gjennom materialet, og er derfor avhengig av både geometrien

til materialet og styrken på det påtrykte feltet  $\mathbf{H}$ . Vi skal snart se nærmere på dette. Først må vi imidlertid bruke litt tid på å entydig definere hva vi mener med  $\mathbf{B}$ -felt og  $\mathbf{H}$ -felt, og peke på forskjellene mellom disse.

### B-felt og H-felt

Maxwell's lover kan skrives med bare en størrelse som betegner "magnetfeltet", slik det kommer frem av ligningene 1a-1d. Likevel har det vist seg hensiktsmessig å innføre to ulike felt for å beskrive de makroskopiske effektene til magnetiske materialer. Disse feltene kalles  $\mathbf{B}$ -felt og  $\mathbf{H}$ -felt.  $\mathbf{B}$ -feltet kalles gjerne *magnetisk flukstetthet*, og er summen av alle magnetiske effekter.

I materialer hvor atomene har et netto magnetisk moment er det ønskelig å skille mellom bidraget til  $\mathbf{B}$  som skyldes orienteringen til atomene (som vi allerede har forklart at beskrives med magnetiseringen  $\mathbf{M}$ ), og det som skyldes en strøm av "frie ladninger", f.eks. en elektrisk strøm i en spole. Magnetfeltet som generes av slike frie ladninger betegner vi med  $\mathbf{H}$ , ofte bare kalt *magnetfelt*. Av historiske årsaker måles  $\mathbf{B}$  og  $\mathbf{H}$  i ulike enheter:  $\mathbf{B}$  har enhet Tesla,  $\mathbf{H}$  har enhet Ampere/meter. I vakuum relateres de to feltene med naturkonstanten  $\mu_0$ , slik at  $\mathbf{B}_0 = \mu_0\mathbf{H}_0$ . I et para- eller ferromagnetisk materiale er imidlertid ikke feltene lenger proporsjonale, men gitt av:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (3)$$

Sammenhengen over gjelder ikke bare i et magnetisk materiale, men er gyldig overalt (faktisk er dette definisjonen på  $\mathbf{H}$ -feltet).

### Avmagnetiseringsfelt

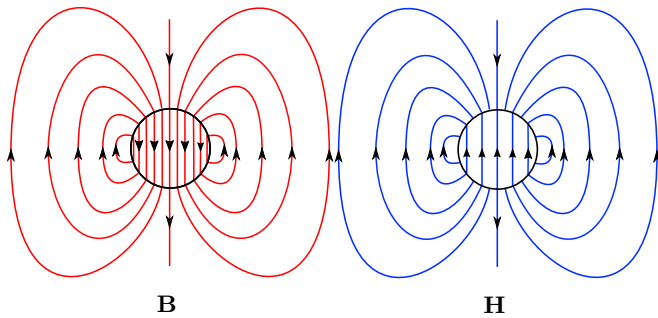
Ved å bytte ut  $\mathbf{B}$ -feltet med  $\mathbf{H}$  og  $\mathbf{M}$  i Maxwells lover får vi enkelte interessante konsekvenser. Hvis vi antar at det ikke er noen strømmer i materialet (og ingen varierende elektriske felt), så sier Ampere's lov (ligning 1d):

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0.$$

Videre sier Gauss lov at:

$$\nabla \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = 0.$$

Disse to sammenhengene må gjelde overalt, også i grenseområdet mellom to materialer med ulike magnetiske egenskaper. Fig. 5 viser en konsekvens av dette. Vi ser at for en uniformt magnetisert kule så vil  $\mathbf{B}$ -feltet ha lukkede feltlinjer, slik som Gauss lov krever.  $\mathbf{H}$ -feltet er identisk med  $\mathbf{B}$  utenfor overflaten til kulen (bortsett faktoren  $\mu_0$ ), men *inne* i kulen er situasjonen en helt annen.



Figur 5:  $\mathbf{B}$ -felt og  $\mathbf{H}$ -felt for en uniformt magnetisert kule uten eksternt påtrykt felt.  $\mathbf{B}$ -feltlinjene er lukkede kurver, slik det følger av Gauss lov.  $\mathbf{H}$ -feltlinjene er *ikke* lukkede kurver, men har diskontinuiteter på overflaten av kulen. I tillegg er  $\mathbf{H}$ -feltet rettet motsatt vei av magnetiseringen  $\mathbf{M}$  inne i kulen. I stor avstand fra kulen fremstår begge feltene som om de skyldes en magnetisk dipol.

Her vil det være et  $\mathbf{H}$ -felt som er motsatt rettet av  $\mathbf{B}$ -feltet. Dette feltet kaller vi *avmagnetiseringsfeltet*  $\mathbf{H}_d$ .

Det er generelt ingen enkel sammenheng mellom avmagnetiseringsfeltet  $\mathbf{H}_d$  og magnetiseringen  $\mathbf{M}$  i et ferromagnetisk materiale. Unntaket er hvis materialprøven har form som en ellipsoide<sup>2</sup> og har uniform magnetisering. Da kan det vises at:

$$H_{i,d} = -D_i M_i \quad (i = x, y, z). \quad (4)$$

Her er  $D_i$  *avmagnetiseringsfaktoren*, og kan beregnes analytisk ut fra parameterene som beskriver ellipsoiden.

Siden magnetfelt kan superponeres er det enkelt å generalisere til tilfellet hvor materialet befinner seg i et ytre påtrykt magnetfelt  $\mathbf{H}_0$ :

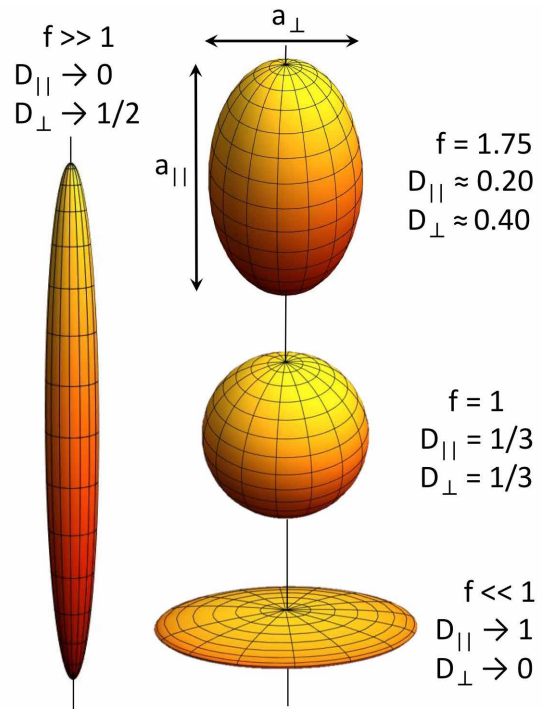
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_d. \quad (5)$$

Med andre ord kan magnetfeltet  $\mathbf{H}$  inne i en ferromagnetisk prøve dekomponeres i to bidrag:  $\mathbf{H}_0$  som skyldes elektriske strømmer utenfor materialet, og  $\mathbf{H}_d$  som motvirker ferromagnetens magnetisering  $\mathbf{M}$ .

#### Avmagnetiseringsfaktoren

I disse forsøkene begrenser vi oss til å se på rotasjonssymmetriske ellipsoider. Formen til disse ellipsoidene kan vi parameterisere med kun ett tall. Vi velger å bruke el-

<sup>2</sup> Generelt kreves det at overflaten kan skrives som en kvadratisk ligning, men siden ellipsoiden er den eneste mulige lukkede overflaten som kan skrives på denne måte forholder vi oss bare til den.



Figur 6: Rotasjonssymmetriske ellipsoider med  $f = a_{\parallel}/a_{\perp} > 1$ , som ligner en "stang",  $f = 1$ , som er en kule, og  $f < 1$ , som vi ligner en "skive".

lipsoidens *eksentrisitet*  $\varepsilon$  til dette:<sup>3</sup>

$$\varepsilon = \sqrt{1 - 1/f^2}, \quad f = \frac{a_{\parallel}}{a_{\perp}}.$$

Eksentrisiteten er et mål på hvor flattrykt ellipsoiden er (se Fig. 6). Hvis  $\varepsilon > 0$  (og reell) har vi en "strukket" ellipsoide, og hvis  $\varepsilon$  er imaginær så har vi en flattrykket ellipsoide. En kule er et spesialtilfelle av en ellipsoide, og har  $\varepsilon = 0$ .

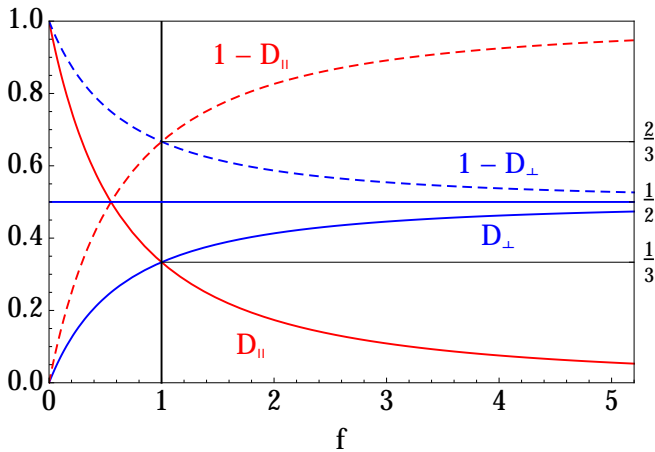
Under disse begrensningene er avmagnetiseringsfaktoren  $D_i$  gitt ved [1]:

$$D_{\parallel} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2\varepsilon} \text{Log} \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right), \quad (6)$$

$$D_{\perp} = (1 - D_{\parallel})/2, \quad (7)$$

der Log er den komplekse naturlogarithmen. Her betyr  $D_{\parallel}$  og  $D_{\perp}$  henholdsvis parallelt med og ortogonalt på rotasjonsaksen, som er vist i Fig. 6.

<sup>3</sup> Eksentrisitet  $\varepsilon$  må ikke forveksles med elektrisk permittivitet, selv om vi bruker samme bokstav for begge størrelsene.



Figur 7: Avmagnetiseringsfaktorene  $D_{\parallel}$  (rød) og  $D_{\perp}$  (blå) for en ferromagnetisk og rotasjonssymmetrisk ellipsoide som funksjon av flattrykningen  $f$ . De stiplede grafene viser hvor mye av magnetiseringen  $\mu_0 M$  som øker fluksen fra  $B_0$  til  $B$ . Resten av  $M$  blir nøytralisert av avmagnetiseringsfeltet  $H_d$ .

### Eksperimentelle konsekvenser

Dere skal gjøre forsøk for å undersøke hvordan en (tilnærmet) ellipsoideformet ferromagnet blir påvirket av et ytre magnetfelt, og se dette i lys av teorien ovenfor. Det er ikke mulig å måle magnetfeltet  $\mathbf{H}$  eller magnetiseringen  $\mathbf{M}$  inne i materialet direkte. Ved å anta uniform magnetisering, og under de geometriske begrensningene beskrevet over, kan vi likevel estimere disse fra teorien vi har sett på til nå.  $\mathbf{H}$  og  $\mathbf{M}$  er da lineære funksjoner av den målbare flukstettheten  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned}\mu_0 M &= A \Delta B = A(B - B_0), \\ \mu_0 H &= B_0 + (1 - A)\Delta B = A(B_0 - DB),\end{aligned}$$

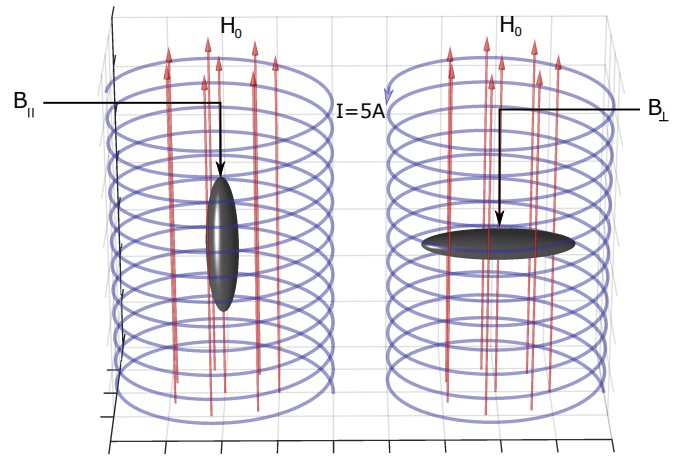
der  $A = (1 - D)^{-1}$  og  $D = D_{\parallel}$  eller  $D_{\perp}$ . Her er  $1/A$  den brøkdelen av magnetiseringen  $\mathbf{M}$  som gir fluksforandringen inne i materialet. Det er for eksempel bare  $2/3$  av magnetiseringen som brukes til fluksforandringen i en kule.

Gauss lov (ligning 1b) garanterer oss at den magnetiske flukstettheten  $\mathbf{B}$  på overflaten av materialet er den samme som inne i materialet, slik at vi ikke trenger å ha noe måleinstrument inne i selve prøven.

Det er nå også klart at den magnetiske susceptibiliteten ikke er noen konstant, men en ikke-lineær funksjon av  $\mathbf{B}$ :

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{B - B_0}{B_0 - DB}.$$

Dette gjelder for alle ferromagneter.  $\mathbf{B}$  er en ukjent funksjon av den opprinnelige flukstettheten  $\mathbf{B}_0$ . Vi kan ikke regne den ut teoretisk, men vi kan (og skal) måle den. Selv om vi ikke kan beregne  $\mathbf{B}(\mathbf{B}_0)$  fra teorien, ser vi likevel at vi kan gjøre noen prediksjoner for hvordan  $\mathbf{B}$  vil



Figur 8: Illustrasjon av oppsettet dere skal bruke for å måle flukstetthet parallelt og ortogonalt på en strukket ellipsoide

oppføre seg. Blant annet har vi at:

$$B_0 < B < B_0/D.$$

For en kule er  $D_{\parallel} = D_{\perp} = 1/3$ , og modellen vår sier derfor at  $B_{\parallel} = B_{\perp} < 3B_0$ . For en lang stang ( $f \rightarrow \infty$ ) har vi  $D_{\perp} \rightarrow 1/2$ . Dermed må en lang stang plassert på tvers av det påtrykte feltet følge begrensningen  $B_{\perp} < 2B_0$ .

For alle ferromagnetiske ellipsoider har vi her to konsekvenser av modellen som vi kan teste eksperimentelt, fordi vi kan regne ut  $D_{\parallel}(f)$  og  $D_{\perp}(f)$  fra geometrien.

### Eksperimenter ferromagnetisme:

Dere skal undersøke de ferromagnetiske egenskapene til jern med to ulike metoder. Først skal dere måle den magnetiske flukstettheten med en Hall-sensor. Dere har tilgjengelig en stor spole og en strømkilde. Disse brukes til å generere et tilnærmet homogent magnetfelt inne i spolen (Fig. 8). Videre har dere fått utdelt tre jernklumper med ulik geometri: en stang, en kule og en skive. Gjør følgende undersøkelser:

- Send en strøm på  $I = 5 A$  gjennom spolen (Hvis strømmen står på over lang tid kommer spolen til å bli varm. Skru derfor gjerne ned strømmen hvis det går noen minutter til du skal gjøre en ny måling). Sjekk om styrken på magnetfeltet inne i spolen stemmer med teorien (Oppgave 2 i prelabben). Er feltet homogent?
- Sjekk om utstyret dere skal bruke for å plassere ferromagnetene inne i spolen påvirker målingene.
- Plasser jernstangen i sentrum av spolen med symmetriaksen rettet langs magnetfeltet (se Fig. 8). Sett på strøm  $I = 5 A$ , og mål flukstettheten ( $B_{\parallel}$ )

på overflaten til materialet. Snu deretter stangen slik at symmetriaksen ligger ortogonalt på feltet. Mål flukstettheten ( $B_{\perp}$ ) igjen.

- Gjenta punktet over for kula og skiva. Stemmer målingene med begrensningene gitt i teorien?

Dere skal også gjøre tilsvarende eksperimenter hvor dere måler den magnetiske fluksen på en mer direkte måte, ved å bruke Faradays lov. Dere får igjen utdelt en strømforsyning og en spole (*primærspolen*). Videre har dere tilgjengelig en lang jernstang med en mindre spole (*sekundærspolen*) tvunnet rundt seg, og en *spenningsintegrator*. Spenningsintegratorens output er integralet av forskjellen i elektrisk potensial ( $\varepsilon$ ) mellom endepunktene av sekundærspolen:

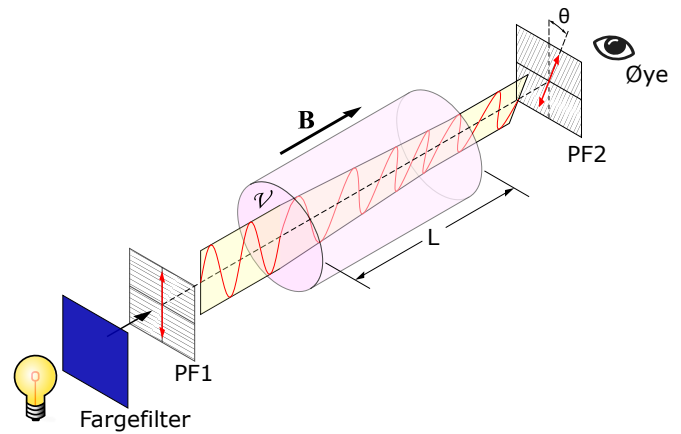
$$\Delta S = \kappa^{-1} \int_{t_0}^t \varepsilon d\tau .$$

Vi bruker notasjonen  $\Delta S$  for å understreke at målingene er det bestemte integralet mellom  $t_0$  og  $t$ .  $\kappa$  er en kalibreringskonstant som er oppgitt på måleinstrumentet. Fra Faradays lov (ligning 1c) vet vi at det er en sammenheng mellom spenningen over en strømsløyfe og den tidsderiverte av magnetisk fluks gjennom den. Hvis vi integrerer Faradays lov ser vi derfor at det er en lineær sammenheng mellom endring i magnetisk fluks ( $\Delta\varphi$ ) og målingene  $\Delta S$  fra spenningsintegratoren. Når vi i tillegg vet tverrsnittet  $\mathcal{A}$  og antall viklinger  $n$  på sekundærspolen, så har vi at endringen i magnetisk flukstetthet er gitt ved:

$$\Delta B = \frac{\kappa \Delta S}{n \mathcal{A}} .$$

Gjør følgende:

- Plasser den lange jernstangen inne i primærspolen. Sjekk at sekundærspolen er plassert omtrent midt i primærspolen, og at endekontaktene er koblet til integratoren. Sett strømmen gjennom primærspolen til  $I = 4$  A, og nullstill integratoren. Endre deretter strømmen gradvis fra  $I = 4$  A til  $I = -4$  A. Noter spenningsintegralet  $\Delta S(I)$ . Regn ut  $\Delta B(I)$ .
- Før du går videre bør du tenke gjennom mulige feilkilder. Se på Fig. 4. Hadde du kontroll på initialtilstanden til materialet ditt?
- Gjennomfør samme måling som i første punkt for  $I = \pm 3.5, \pm 3.0, \dots \pm 0.5$  A.
- Du kan nå regne ut  $B(I) = \Delta B(I)/2$  (faktoren 1/2 skyldes symmetri rundt  $I = 0$ ). Lag en figur som viser målepunktene dine  $B(I)$ .
- Bruk målingene dine og teorien i denne oppgaveteksten til å beregne  $M(H_0)$ , og interpoler mellom målepunktene. Diskuter om resultatene er som ventet ut fra teorien om ferromagnetiske materialer



Figur 9: Faraday-effekten. Monokromatisk lys endrer polarisasjonsretning når det går gjennom en flintglass-sylinder i et homogent magnetfelt  $B$ . Ved å justere de to polarisasjonsfiltrene PF1 og PF2 kan dere måle dreiningen av polarisasjonsretningen  $\theta$ . (Figuren er hentet fra Wikimedia Commons, og deretter modifisert)

(dette punktet er rapport-materiale. Dere trenger ikke gjøre disse beregningene mens dere er på labben).

## 2. FARADAY-EFFEKTEN

Faraday-effekten er et magneto-optisk fenomen som viser at lys og elektromagnetisme henger sammen. Fenomenet ble først beskrevet av Faraday i 1845. Dette var lenge før Maxwell unificerte elektrisitet og magnetisme ved å vise at lys var elektromagnetiske bølger, eller som Maxwell selv skrev: “We can scarcely avoid the conclusion that light consists in the transverse undulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena.”

Fenomenet Faraday observerte var at polarisasjonsretningen til lys som går gjennom en krystall endret seg med styrken på magnetfeltet krystallen var plassert i. I forsøket dere skal gjøre skal dere derfor sende monokromatisk planpolarisert lys med bølgelengde  $\lambda$  gjennom en  $L = 30$  mm lang flintglass-sylinder. Flintglasset er plassert i et homogent magnetfelt  $B$  rettet langs sylinderen. På vei gjennom glasset dreies polarisasjonsretningen en vinkel  $\theta$  som er proporsjonal med  $L$  og  $B$ :

$$\theta(\lambda, B, L) = V(\lambda)LB .$$

Her er  $V$  *Verdet-konstanten*, som er uavhengig av  $L$  og  $B$ .  $V$  kan imidlertid være en meget ulineær funksjon av  $\lambda$ , og er derfor bare en ”konstant” for en enkelt bølgelengde. Den kan også avhenge av temperaturen i materialet, men vi antar her at denne er konstant lik romtemperaturen.

**Ekspériment:** Dere får utlevert tre optiske filtre som slipper gjennom lys med  $\lambda = 440, 580$  og  $595$  nm. Bruk disse til å generere tilnærmet monokromatisk lys. Videre har dere to lineære polarisasjonsfiltre. Et polarisasjonsfilter plasseres mellom fargefilteret og flintglasset, og et plasseres etter at lyset har gått gjennom flintglasset (Fig. 9). Hvis de to polarisasjonsfiltrene står ortogonalt på hverandre, og  $B = 0$ , så skal ikke noe lys slippe gjennom det siste filteret. Ved  $B \neq 0$  finner dere  $\theta$  ved å dreie det siste polarisasjonsfilteret til ikke noe lys slipper gjennom, og lese av vinkelen.

- Undersøkt hvordan dreiningsvinkelen  $\theta$  avhenger av flukstettheten  $B$  ved å variere strømstyrken gjennom spolen. Bruk følgende strømstyrker:  $I_{\pm} = \pm 0, \pm 1.0, \pm 1.5, \pm 2.0, \pm 2.5, \pm 3.0$  [A]. Bruk disse målingene, sammen med målinger av  $B(I)$  (målt med fluksmeter), til å finne Verdet-konstanten for de ulike bølgelengdene. Produsenten oppgir at  $B$  midlet over flintglass-sylindren er en faktor 1.5 mindre enn  $B$  målt midt mellom magnetpolene. Diskuter usikkerheten i beregnet Verdet-konstanten.

**VIKTIG: Skru av strømmen før strømvenderen benyttes til å snu strømmens retning!**

## REFERANSER

- 
- [1] J. A. Osborn, Phys. Rev. **67**, 351 (1945), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.67.351>.  
 [2] D. Young, Hugh and R. A. Freedman, *University Physics* (Pearson, 2008), 12th ed.

### Appendiks: Utledning av kraft på stang i inhomogent magnetfelt

Vi tar utgangspunkt i uttrykket for potensiell energi for en magnetisk dipol med dipolmoment  $\boldsymbol{\mu}$  i et magnetfelt  $\mathbf{B}$  [2]:

$$U = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} .$$

Magnetiseringen  $\mathbf{M}$  til et materiale er definert som det magnetiske dipolmomentet per volum:  $\mathbf{M} = d\boldsymbol{\mu}/dV$ . Altså kan vi finne den totale magnetiske energien i et

materiale ved å integrere over volumet  $V$  slik:

$$U = - \int_V \mathbf{M} \cdot \mathbf{B} dV .$$

Kraften er som kjent gitt ved gradienten til energien:  $\mathbf{F} = -\nabla U$ . Vi ser derfor at hvis det skal virke noen netto (magnetisk) kraft på stangen så må  $\mathbf{B}$ -feltet være inhomogent. Vi får da følgende uttrykk for  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{B} dV .$$

I et diamagnetisk materiale vet vi at magnetiseringen  $\mathbf{M}$  er (med god tilnærming) proporsjonal med magnetfeltet  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{M} = \frac{\chi}{\mu_0} \mathbf{B} .$$

Under denne tilnærmingen kan vi derfor skrive:

$$\mathbf{F} = \frac{\chi}{\mu_0} \int_V \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} dV .$$

I oppsettet beskrevet tidligere i oppgaveteksten måles bare  $z$ -komponenten av  $F$ . Langs denne komponenten har vi fra uttrykket over at:

$$F_z = \frac{\chi}{\mu_0} \int_V \left( B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z} \right) B_z dV .$$

Videre medfører oppsettet vårt at  $B_y = B_z = 0$ , så vi står igjen med:

$$F_z = \frac{\chi}{\mu_0} \int_V B_x \frac{\partial}{\partial x} B_z dV .$$

Det siste steget er å innse at vi kan skrive  $\frac{\partial}{\partial x} B_z = \frac{\partial}{\partial z} B_x$ , siden  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$  når det ikke er noen "frie strømmer", jfr Faradays lov. Vi ender derfor opp med:

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{\chi}{\mu_0} \int_V B_x \frac{\partial}{\partial z} B_x dV , \\ &= \frac{\chi \mathcal{A}}{2\mu_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial B_x^2}{\partial z} dz , \\ &= \frac{\chi \mathcal{A}}{2\mu_0} (B_2^2 - B_1^2) , \end{aligned}$$

hvor  $B_2$  og  $B_1$  er  $x$ -komponenten av  $\mathbf{B}$ -feltet ved henholdsvis toppen og bunnen av stanga, og  $\mathcal{A}$  er tverrsnittet til stanga. Hvis toppen av stanga er tilstrekkelig langt unna magneten, slik at  $|B_2| \ll |B_1|$ , så ser vi at kraften  $F_z$  øker kvadratisk med magnetfeltet  $B_1$  i bunnen av stanga (gitt at  $\chi < 0$ , som er sant hvis materialet er diamagnetisk).

**Appendiks: Analyse av den komplekse avmagnetiseringsfaktoren  $D_{\parallel}$**

Vi skal vise at  $D_{\parallel}(\varepsilon)$  i ligning 6 kan skrives som

$$D_{\parallel}(f) = \begin{cases} \frac{1}{1-f^2} \left[ 1 - \frac{f}{\sqrt{f^2-1}} \ln(f + \sqrt{f^2-1}) \right], & f > 1, \\ \frac{1}{3}, & f = 1, \\ \frac{1}{1-f^2} \left[ 1 - \frac{f}{\sqrt{1-f^2}} \arccos(f) \right], & 0 < f < 1. \end{cases} \quad (8)$$

Ved å bruke

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{1 - 1/f^2}, \\ z &= f + \sqrt{f^2 - 1} = f + i\sqrt{1 - f^2} \end{aligned}$$

får vi

$$\begin{aligned} D_{\parallel} &= \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \left[ 1 - \frac{1}{2\varepsilon} \operatorname{Log} \left( \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) \right] \\ &= \frac{1}{1 - f^2} \left[ 1 - \frac{f}{\sqrt{f^2 - 1}} \operatorname{Log}(z) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Motivasjonen for denne reformuleringen er at det ikke er opplagt at ligning 8 gir en kontinuerlig graf, langt mindre en som er glatt. Vi forventer at dette skal være tilfellet, fordi det ikke er noen fysisk grunn til at kulen ( $f = 1$ ) skal skille seg ut. Men de to grenene til ligning 8 ser ganske forskjellige ut: kan de virkelig være to sider av samme sak? Fysikken sier at svaret må være ja.

Funksjonen i ligning 9 er plottet direkte med Mathematica for  $f > 0$  i figur 7. Da dette er en analytisk funksjon i den fysiske delen av det komplekse planet må den oppføre seg pent, og det gjør den: vi ser at den er helt glatt i  $f = 1$ .

Når  $f > 1$  er  $z \in \mathbb{R}$ , og vi kan sette  $\operatorname{Log} \rightarrow \ln$  i ligning 9. Dette gir med en gang den øvre grenen  $D_{\parallel}(f > 1)$  i ligning 8.

Når  $0 < f < 1$  er  $z$  et punkt på enhetssirkelen i det komplekse planet,

$$\begin{aligned} |z| = 1 &\implies z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \\ &\implies \begin{cases} \cos \theta = f, \\ \sin \theta = \sqrt{1 - f^2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Den komplekse logaritmen er

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(z) &= \ln |z| + i \arg(z) = \ln |z| + i\theta \\ &= i\theta = i \arccos(f), \end{aligned}$$

fordi  $\ln |z| = \ln 1 = 0$ . Med andre ord, når  $f > 1$  er logaritmen et rent reelt tall, og når  $0 < f < 1$  er logaritmen et rent imaginært tall. Insatt i ligning 9 finner vi den nedre grenen til ligning 8. Vi kan også skrive denne grenen på en meget kompakt trigonometrisk form,

$$D_{\parallel}(0 < \theta < \pi/2) = \csc^2 \theta (1 - \theta \cot \theta) \in \mathbb{R}.$$

Til slutt kan vi rekkeutvide ligning 9 for små  $\varepsilon$  (enten reell eller imaginær) for å se at begge grenner går mot  $\frac{1}{3}$  for  $f \rightarrow 1$ .