

Feltteori og vektoranalyse

Forelesninger og oppgaver i MEK1100

av

Bjørn Gjevik og Morten Wang Fagerland



Avdeling for mekanikk
Matematisk institutt

Universitetet i Oslo
2014

Forord

Dette kompendiet er utarbeidet i sin helhet for kurset MEK1100 – Feltteori og vektoranalyse som undervises ved Universitetet i Oslo. Kurset er ment å gi en innføring i grunnleggende metoder og teknikker som er nødvendig for en systematisk matematisk beskrivelse av kontinuumsmekanikk og elektromagnetisme. Hensikten er i første rekke å oppøve visse matematiske ferdigheter både gjennom analytisk regning og bruk av dataverktøy (Matlab). På samme tid prøver en å vekke sansen for å nyttegjøre seg matematikken i anvendelser. Mange av oppgavene og øvelsene i kurset er derfor knyttet direkte til anvendelser i mekanikk, fysikk og geofysikk. Med å fremheve sterkt samspillet mellom stringent matematisk teori og fysisk forståelse og begrepsdannelse skiller dette kurset seg fra tradisjonell undervisning i Calculus. Dette synet er selvfølgelig farget av forfatterens egen forskningsbakgrunn innen mekanikk og geofysikk. Her som i mange andre fag er de klassiske matematiske metoder fra feltteori og vektoranalyse fortsatt viktige verktøy som brukes i forskningsfronten. Vi ønsker å formidle dette budskapet gjennom undervisningen. Lykke til med studiet!

Blindern medio august 2004

Bjørn Gjevik Morten Wang Fagerland

Kompendiet har blitt revidert med tillegg av flere eksempler og regneoppgaver i august 2007. Henrik Mathias Eiding takkes for å ha bistått med dette på en utmerket måte. Øvingslærere, studenter og andre forelesere takkes for å ha påpekt feil og mangler ved 2004-utgaven.

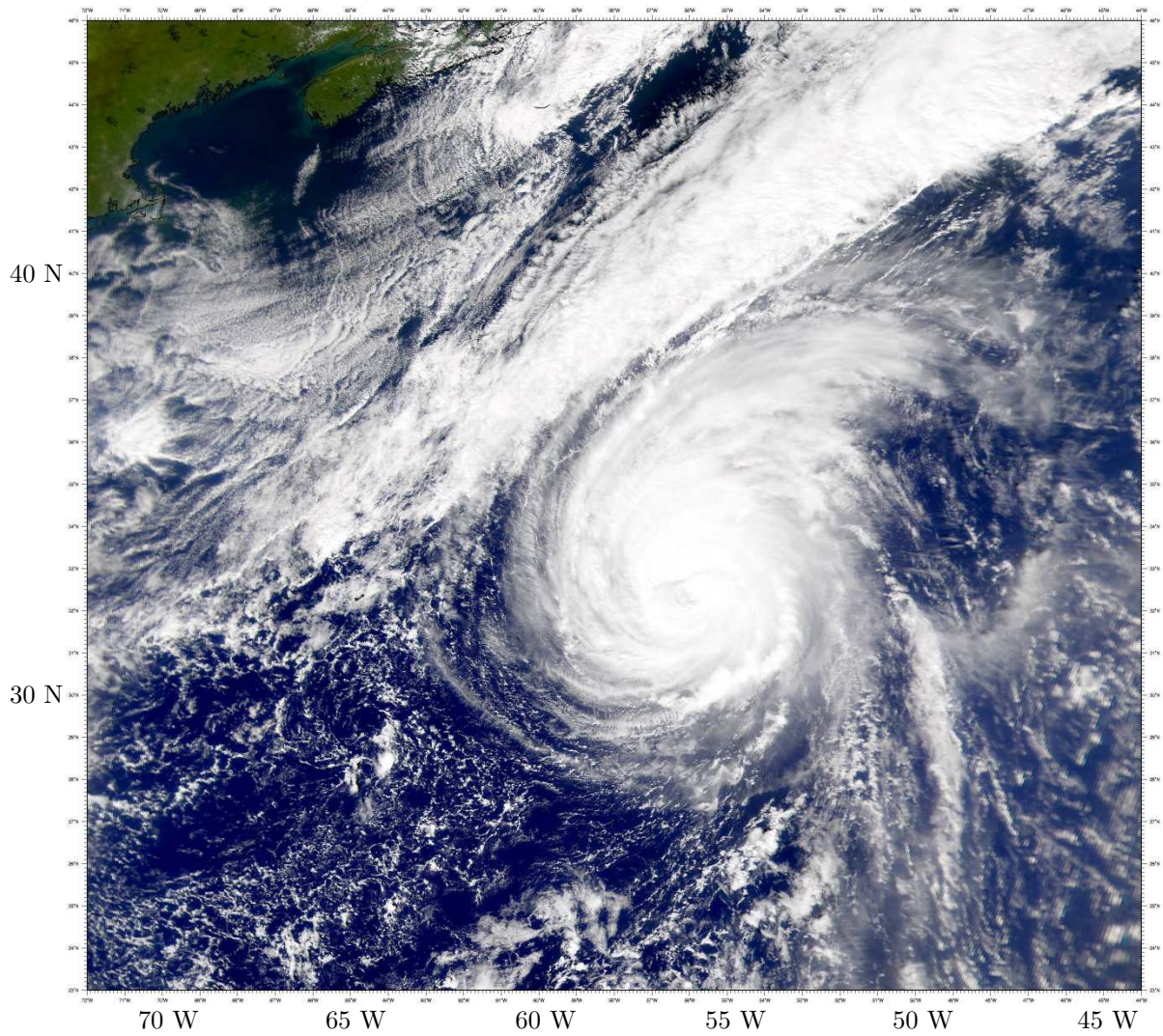
Blindern medio august 2007

Bjørn Gjevik

Kompendiet ble revidert i august 2011, 2012, 2013 og januar 2014 etter forslag fra foreleser i MEK1100, professor Karsten Trulsen. Han takkes for å ha foreslått rettinger og endringer i teksten på flere punkter og ved retting av feil i noen oppgaver og i fasiten. I denne utgaven er de fleste av Trulsens forslag innarbeidet sammen med endel andre mindre revideringer.

Blindern primo januar 2014

Bjørn Gjevik



Figur 1: Syklonen Isak i Atlanterhavet ettermiddagen den 29. september 2000. Satelittbildet viser skysystemet rundt syklonsentret. Diameteren på virvelen er omkring 1200 km. I øvre venstre hjørne skimtes østkysten av USA (grønn). Flere bilder på hjemmesiden til NASA: <http://earthobservatory.nasa.gov/Images/>

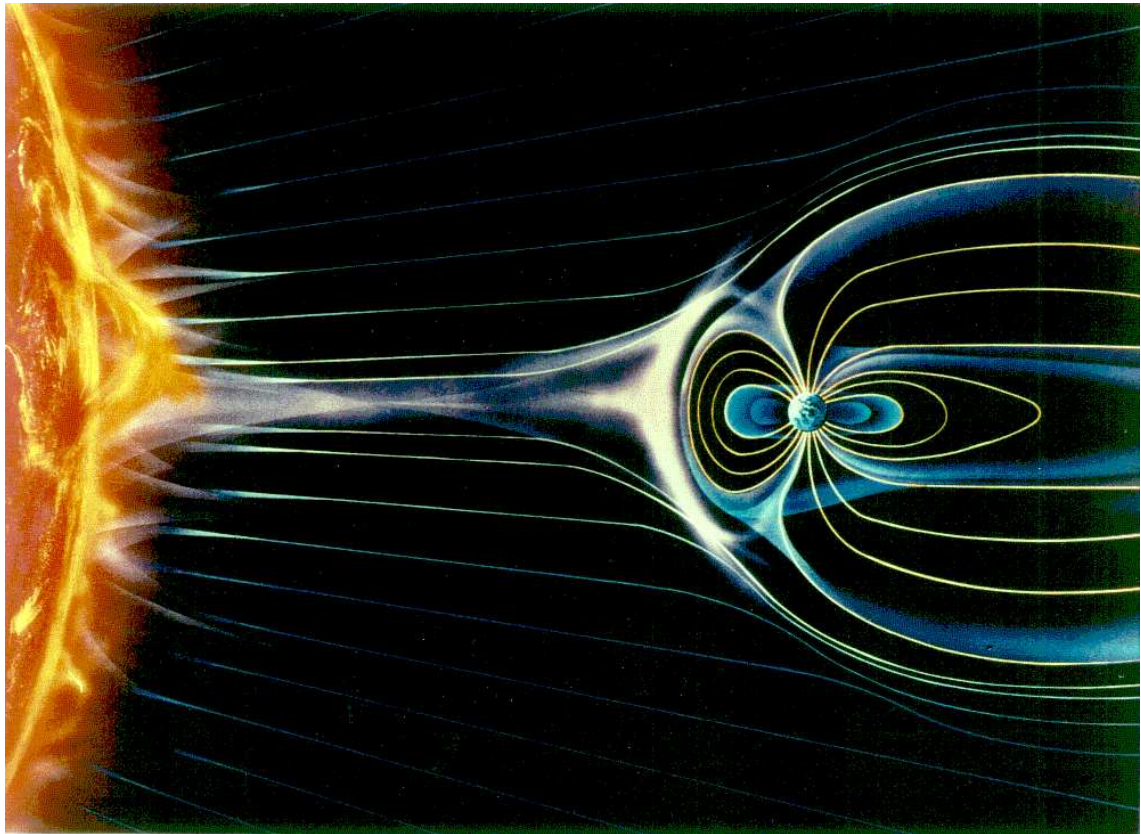
Innhold

1	Felt i naturen, skalar- og vektorfelt, skalering	11
1.1	Felt i naturen	11
1.2	Skalar- og vektorfelt	11
1.3	Rom og koordinatsystem	13
1.4	Vektoralgebra	15
1.5	Eksempel på skalarfelt	18
1.6	Skalering	20
1.7	Oppgaver	22
2	Gradientvektoren, vektorfelt, strømlinjer, feltlinjer	27
2.1	Partiell derivasjon	27
2.2	Taylorutvikling av en funksjon av en eller flere variable	29
2.2.1	Eksempel på andre ordens Taylor-approksimasjon	30
2.3	Gradientvektoren til et skalarfelt	30
2.3.1	Retningsderiverte	32
2.3.2	Et høydetopografisk eksempel	33
2.3.3	Et uttrykk for flatenormalen	33
2.3.4	Hvordan finne skalarfunksjonen når gradientvektoren er kjent	34
2.4	Vektorfelt. Strømlinjer og feltlinjer	35
2.4.1	Eksempel på beregning av strømlinjer	37
2.4.2	Hastighetsfeltet i skive som roterer	38
2.5	Oppgaver	40
3	Bruk av Matlab	43
3.1	Innledning	43
3.2	Litt grunnleggende Matlab	43
3.2.1	Oppstart, grensesnitt, kommentarer	43
3.2.2	Matlab på Windows-maskiner	44
3.2.3	Matriser	44
3.2.4	Kolon-operatoren	46
3.2.5	m-filer (styrefiler)	47
3.2.6	Enkel plotting i 2D	49
3.2.7	Punktum foran en operasjon	49
3.3	Plotting av flater	51
3.4	Plotting av konturlinjer	53

3.5	Plotting av vektorfelt og beregning av gradientvektor.	55
3.6	Plotting av strømlinjer	56
3.7	Oppgaver	56
4	Vektorfluks og sirkulasjon, divergens, virvling, strømfunksjonen	61
4.1	Vektorfluks og sirkulasjon	61
4.2	Beregning av vektorfluks og sirkulasjon for todimensjonal strøm	63
4.3	Divergensen til et vektorfelt	64
4.3.1	Fysikalsk tolkning av divergensen til et vektorfelt	67
4.4	Virvlingen til vektorfeltet	68
4.4.1	Fysikalsk tolkning av virvlingsvektoren	69
4.5	Divergensfrie og virvelfrie felt	69
4.6	Strømfunksjonen for to-dimensjonal divergensfri strøm	70
4.6.1	Eksempel på hvordan en kan finne strømfunksjonen	71
4.7	Noen regneregler for ∇ -operatoren	72
4.8	∇ -operatoren som en vektor	73
4.9	Oppgaver	74
5	En praktisk anvendelse av ∇-operatorene i meteorologi	77
5.1	Innledning	77
5.2	Innlesing av data	79
5.3	Plotting av isobarer	80
5.4	Plotting av vindfelt	82
5.5	Divergens	84
5.6	Virvling	84
5.7	Tolkninger	87
5.8	En fil med hele Matlab-koden	87
6	Kurve-, flate- og volumintegraler, beregning av trykkraft	89
6.1	Innledning	89
6.2	Kurveintegraler (linjeintegraler)	89
6.2.1	Eksempel på beregning av et kurveintegral	91
6.2.2	Buelengden av en sirkel	92
6.2.3	Fysikalsk tolkning av kurveintegralet $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$	92
6.3	Kurveintegralet av gradientvektoren. Konservativt kraftfelt. Potensialfunksjonen.	92
6.3.1	Konservativt kraftfelt	93
6.4	Hvordan finne potensialfunksjonen for et konservativt kraftfelt?	94
6.5	Flateintegraler	94
6.5.1	Eksempel på beregning av flateintegral	96
6.6	Beregning av trykkraft	96
6.7	Volumstrøm gjennom et strømrør	98
6.8	Volumintegraler	99
6.9	Oppgaver	100

7	Integralsatser: Green, Stokes og Gauss	103
7.1	Innledning	103
7.2	Greens sats	103
7.3	Stokes' sats	105
7.3.1	Eksempler på beregning med Stokes' sats	106
7.4	Gauss' sats (divergensteoremet)	107
7.4.1	Gauss' sats for gradient- og virvlingsvektoren	108
7.4.2	Eksempel: Gauss' sats brukt til å beregne volum og overflate av kule	108
7.5	Noen kommentarer til utledningen av satsene	109
7.6	Oppgaver	109
8	Polarkoordinater	113
8.1	Innledning	113
8.2	Transformasjon mellom kartesiske og polare koordinater	114
8.2.1	Plane polarkoordinater	114
8.2.2	Sylindrisk polarkoordinatsystem	116
8.2.3	Sfærisk polarkoordinatsystem (kulekoordinater)	116
8.3	∇ -operatorene i polarkoordinater	118
8.3.1	Plane polarkoordinater	118
8.3.2	Sylindriske polarkoordinater	118
8.3.3	Sfærisk polarkoordinater	118
8.4	Eksempler	119
8.5	Oppgaver	120
9	Divergens- og virvelfrie felter. Potensialstrøm	123
9.1	Innledning	123
9.2	Hastighetspotensialet	123
9.3	Laplace-operatoren. Laplaceiske felt	125
9.4	Potensialfelter i to dimensjoner	125
9.4.1	Rettlinjet strøm (uniformt felt)	127
9.4.2	Stagnasjonsstrøm	127
9.4.3	Kilde og sluk	130
9.4.4	Punktvirvel	130
9.4.5	Superposisjon av felt	133
9.4.6	Spiralvirvel	134
9.4.7	Dipolfeltet	134
9.5	Oppgaver	136
10	Feltlikninger for fluider	141
10.1	Innledning	141
10.2	Partikkelderivasjon	141
10.2.1	Eksempel: Transport av forurensninger i en elv	142
10.3	Partikkelakselerasjon	144
10.3.1	Eksempler på beregning av partikkelakselerasjon	145
10.4	Likninger for massebevarelse	146

10.5	Bevegelseslikningen	148
10.5.1	Eksempel: Trykkfordeling i en væskebeholder	149
10.6	Bernoullis likning	150
10.6.1	Eksempel: Utstrømningshastighet fra tank	152
10.7	Varmetransport	152
10.7.1	Eksempel: Beregning av varmestrøm gjennom vindusglass	155
10.8	Oppgaver	157
A	Orienteringsstoff	161
A.1	Innledning	161
A.2	Navier-Stokes likning	161
A.3	Maxwells likninger	162
A.4	Kombinasjon av Navier-Stokes og Maxwells likninger	163
B	Ekstraoppgaver	165
C	Noen viktige formler	167
D	Eksamensoppgaver	171
D.1	Prøveeksamen	171
D.2	Eksamen 2002	173
D.3	Eksamen 2003	176
D.4	Eksamen V2004	178
D.5	Eksamen H2004	180
E	Matlab-kode	183
E.1	Fjelltoppen Berenberg (overflate, konturer)	183
E.2	Lufttrykket i tilknytning til et stormsenter	183
E.3	Isobarflater	184
E.4	Fjelltoppen Berenberg (konturer, gradientvektor)	184
E.5	Uniformt felt	185
E.6	Stagnasjonsfelt	185
E.7	Kilde og sluk	186
E.8	Punktvirvel	187
E.9	Dipolfelt	187
F	Fasit og hint til noen av oppgavene	189
F.1	Kapittel 1	189
F.2	Kapittel 2	190
F.3	Kapittel 3	192
F.4	Kapittel 4	192
F.5	Kapittel 6	193
F.6	Kapittel 7.	194
F.7	Kapittel 8	195
F.8	Kapittel 9	196
F.9	Kapittel 10	197
F.10	Ekstraoppgaver	199



Figur 2: Solvindfelt viser strømmen av elektriske ladede partikler fra solen som avbøyes i jordens magnetfelt. Solvinden genererer ultrafiolett lys og røntgenstråler i jordens øvre atmosfære. Du kan lese mer om solvind på: <http://solarscience.msfc.nasa.gov/SolarWind.shtml>

Kapittel 1

Felt i naturen, skalar- og vektorfelt, skalering

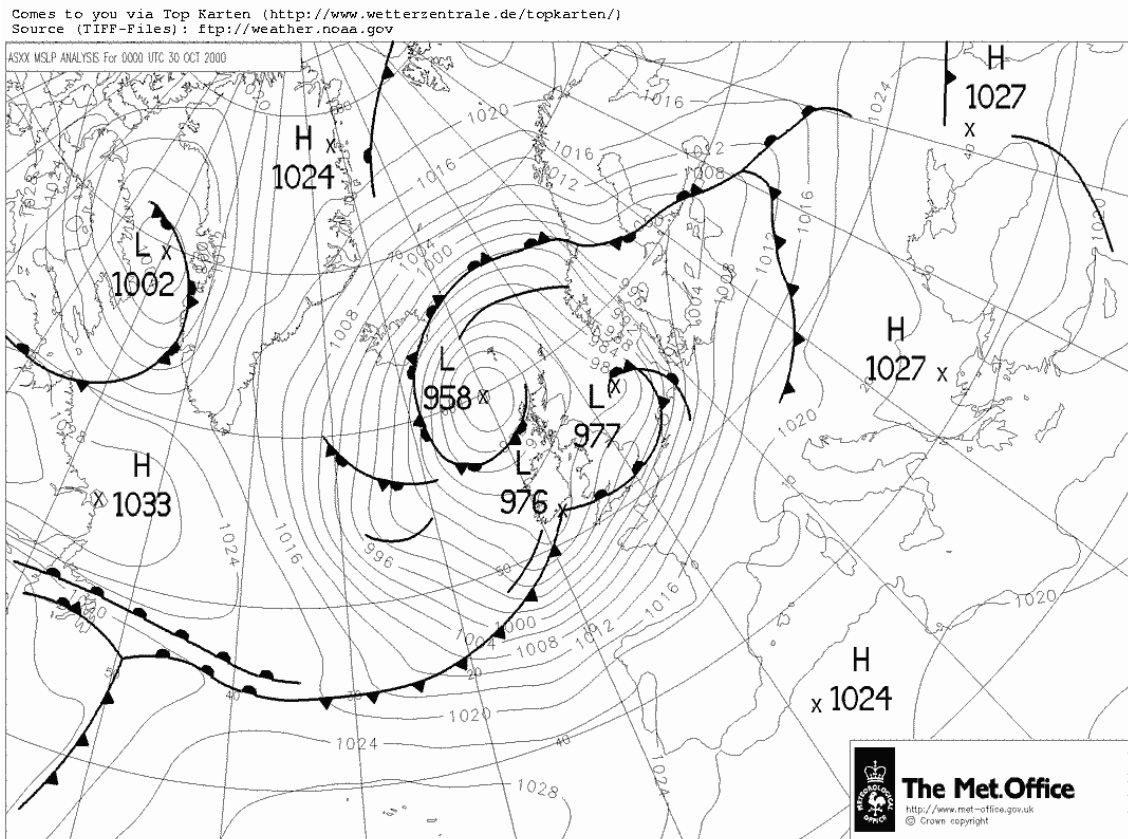
1.1 Felt i naturen

Når man skal beskrive prosesser i naturen eller i laboratorieeksperimenter, er det ofte slik at fysiske og kjemiske parametre varierer mer eller mindre systematisk og sammenhengende i rom og tid. Disse variasjonene kan enten være gradvise (kontinuerlige) eller sprangvise (diskontinuerlige). I begge tilfeller er det ofte slik at det er en sammenheng eller et mønster over lange eller korte avstander og over lange eller korte tidsrom. Når en skal beskrive slike variasjoner i fysiske og kjemiske parametre snakker en ofte om felter. Det mangfoldige eksempler på slike felt: temperaturfeltet omkring en varmekilde, stømfeltet omkring en flyvinge, bølgefeltet på havet i form av mer eller mindre regelmessige bølgemønstre, trykkfelt omkring et stormsenter, magnetfeltet omkring en magnet og det elektromagnetiske feltet produsert av en radarsender eller en stjerne.

Vi er i hele livet omgitt av felter som påvirker våre liv. Noen av disse feltene har vi mer eller mindre tilpasset oss til, for eksempel jordens gravitasjonsfelt og temperaturvariasjonene i atmosfæren. Andre felter kan representere en fare, for eksempel sterke elektromagnetiske felter i form av UV-stråling fra solen, radioaktiv stråling fra radioaktive materialer og kraftige vindfelt satt opp av ekstremt sterke sykloner. For å forstå og beskrive mønstre og variasjoner i felter må vi bruke matematiske formler. Nå er det slik at mange av de matematiske metoder som kommer til anvendelse innen feltteori er felles for de forskjellige feltene. Det er derfor heldigvis mulig, slik vi skal gjøre det i dette kurset, å trekke ut en del generelle matematiske metoder som er av grunnleggende betydning innen all feltteori uansett hvilken spesiell anvendelse vi er interessert i.

1.2 Skalar- og vektorfelt

Mange fysiske størrelser kan uttrykkes bare med *en* tallstørrelse eller skalar når vi i tillegg har informasjon om måleenheten eller benevnningen som er brukt. Eksempler på skalarstørrelser er trykk, massetetthet, temperatur og elektrisk potensial (spenning). Grunnenhetene i *SI-systemet* for noen skalarer er vist i tabell 1.1.



Figur 1.1: Konturlinjer (tynne linjer) for observert lufttrykk i hektopascal (hPa) over Nord-Atlanteren 30. oktober 2000 00:00 UT (UT= Universal Time, Norsk normaltid = UT + en time). Et kraftig lavtrykksenter 958 hPa ligger nordvest for Skottland med to mindre senter 976 hPa og 977 hPa henholdsvis sør for Irland og i Nordsjøen. Dette systemet av lavtrykk førte til meget kraftig storm over England, i Nordsjøen og på Sørlandet. De kraftige kurvene med markeringer angir fronter som er skille mellom luftmasser med forskjellig temperatur. Spisse markeringer viser kaldfronter, runde markeringer varmfronter.

Skalar	Symbol	Enheter
trykk	p	Pascal (Pa), $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ hektopascal, $1 \text{ hPa} = 100 \text{ Pa}$
massetetthet	ρ	kg/m^3
temperatur	T	Kelvin (K), Centigrader ($^{\circ}\text{C}$)
elektrisk potensial (spenning)	V	volt
energi	E	Joule (J) $1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$
høyde over havet	h	m
havdyp	d	m

Tabell 1.1: Skalarstørrelser med benevning.

Et *skalarfelt* viser hvordan skalaren varierer i rommet. Figur 1.1 viser eksempelvis lufttrykksvariasjonen omkring et stormsenter. Kurvene (isobarene) knytter sammen punkter med samme lufttrykk på jordoverflaten. Bildet som fremkommer anskueliggjør lufttrykksfeltet.

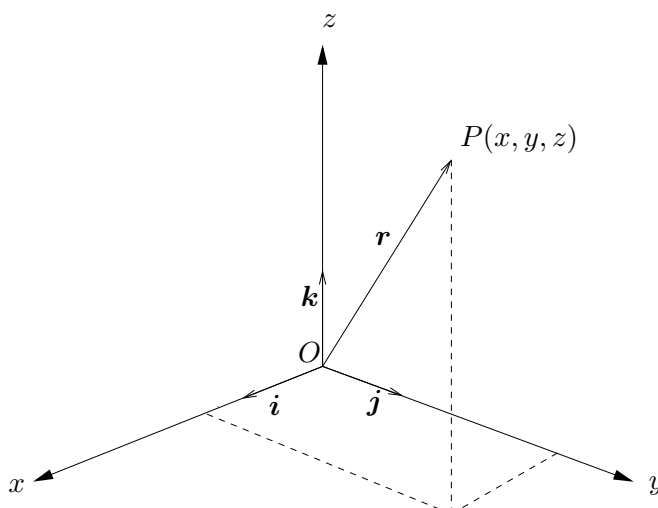
Noen fysiske størrelser har både størrelse og retning og en trenger derfor flere tallstørrelser for å fastlegge dem. Dette gjelder kraft, hastighet og akselerasjon. Disse kan representeres med en vektor (en pil) med lengde som mål for størrelsen og vektorpilen angir retningen. For vektorer i et tre-dimensjonalt rom må vi ha tre tallpar eller komponenter for å fastlegge vektorens lengde og retning. For vektorer i et plan er det nok med to tallpar. En samling av vektorer som viser hvordan de varierer i rommet kaller vi et *vektorfelt*. I kapittel 2 skal vi se nærmere på vektorfelt med eksempler fra naturen.

Vektor	Symbol	Enhet
strømhastighet	\mathbf{v}, \vec{v}	m/s
kraft	\mathbf{F}, \vec{F}	Newton (N)
akselerasjon	\mathbf{a}, \vec{a}	m/s^2
elektrisk felt	\mathbf{E}, \vec{E}	V/m
magnetfelt	\mathbf{B}, \vec{B}	Tesla (T)

Tabell 1.2: Vektorstørrelser med benevning.

1.3 Rom og koordinatsystem

I dette kurset skal vi hovedsaklig holde oss i et tre-dimensjonalt (3D) fysisk rom, også betegnet \mathbf{R}^3 , og vi skal bruke et 3D *kartesiske koordinatsystem* med akser x , y og z til å beskrive fysiske forhold i dette rommet (figur 1.2).



Figur 1.2: Et tre-dimensjonalt kartesisk koordinatsystem med enhetsvektorer.

Akseretningene er angitt av *enhetsvektorene* \mathbf{i} , \mathbf{j} og \mathbf{k} som peker henholdsvis langs de tre akseretningene. Lengden av enhetsvektorene er $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$.

Forskjellig notasjon er i bruk for vektorstørrelser. I dette kompendiet er det brukt fete typer (bold) for å betegne en vektor. Pilsymbol \vec{i} , \vec{j} og \vec{k} er også mye brukt.

Posisjonen for et punkt P med koordinater (x, y, z) kan uttrykkes ved posisjonsvektoren

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Talltriplet $\{x, y, z\}$ betegner komponentene av vektoren \mathbf{r} . Lengden eller *normen* av vektoren \mathbf{r}

$$r = |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

representerer avstanden fra origo O til punktet P .

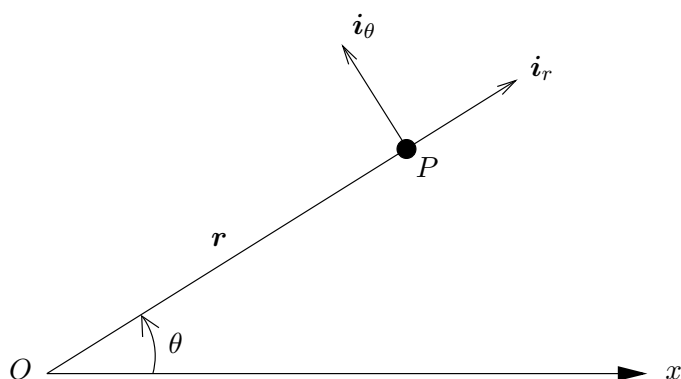
Ofte vil det være behov for å studere felter i et plan, og vi vil da bruke et to-dimensjonalt (2D) kartesisk koordinatsystem i \mathbf{R}^2 (for eksempel xy).

Plane polarkoordinatsystemer kan være gunstig å bruke når det er sirkulær symmetri i feltet som skal beskrives. I et plan (figur 1.3) kan posisjonen til et punkt P angis ved avstanden OP og vinkelen θ mellom en fast retning OX og retningen OP . Dette er et plant polarkoordinatsystem. Enhetsvektorene er her \mathbf{i}_r og \mathbf{i}_θ rettet henholdsvis i radiell retning OP og i aksial retning \mathbf{i}_θ , normalt på OP . Posisjonsvektoren \mathbf{r} kan derfor skrives

$$\mathbf{r} = r\mathbf{i}_r.$$

En strømvektor som beskriver en sirkulær bevegelse omkring et senter, origo, kan skrives

$$\mathbf{v} = v_0 \frac{r_0}{r} \mathbf{i}_\theta.$$



Figur 1.3: Plant polarkoordinatsystem.

Strømstyrken er her satt lik v_0 i en avstand $r = r_0$ fra origo og strømstyrken avtar mot null langt borte fra origo ($r \rightarrow \infty$).

For rom med sylinder- eller kuleformet begrensninger vil henholdsvis *sylindriske polarkoordinater* og *kulekoordinater* være hensiktsmessige. Vi skal se nærmere på slike koordinatsystemer i kapittel 8.

1.4 Vektoralgebra

Vektorer kan adderes, subtraheres og multipliseres etter kjente regler som det kan være nyttig å repetere. To vektorer \mathbf{A} og \mathbf{B} er definert med sine komponenter $\{A_x, A_y, A_z\}$ og $\{B_x, B_y, B_z\}$ henholdsvis i de tre kartesiske akseretningene:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}.$$

Addisjon av de to vektorene kan skrives:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x) \mathbf{i} + (A_y + B_y) \mathbf{j} + (A_z + B_z) \mathbf{k}.$$

Geometrisk kan dette anskueliggjøres ved figur 1.4.

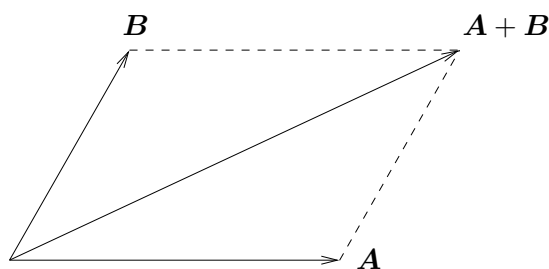
Subtraksjon av vektoren \mathbf{B} fra \mathbf{A} gjøres på følgende måte:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x) \mathbf{i} + (A_y - B_y) \mathbf{j} + (A_z - B_z) \mathbf{k}.$$

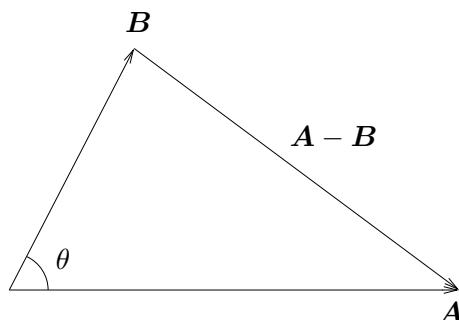
med en tilsvarende geometrisk tolkning i figur 1.5.

Skalarproduktet (prikkproduktet) av to vektorer er definert ved:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \tag{1.1}$$



Figur 1.4: Vektoraddisjon.



Figur 1.5: Vektorsubtraksjon.

hvor θ er vinkelen mellom vektorene og $|\mathbf{A}|$ og $|\mathbf{B}|$ er henholdsvis lengden eller normen av de to vektorene. Lengden av \mathbf{A} er definert ved

$$|\mathbf{A}| = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2}$$

med tilsvarende definisjon for $|\mathbf{B}|$. Skalarproduktet av to vektorer gir en skalarstørrelse. Uttrykt med komponentene blir skalarproduktet

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (1.2)$$

fordi $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$ osv.

Skalarproduktet av en vektor med seg selv gir lengden av vektoren i kvadrat:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}| |\mathbf{A}| = A^2.$$

Vektorproduktet (kryssproduktet) av to vektorer gir en ny vektor som står vinkelrett på planet utspent av \mathbf{A} og \mathbf{B} . Retningen av vektoren $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ er definert ved en høyreskru slik som vist i fig. 1.6. Lengden av vektorproduktet er

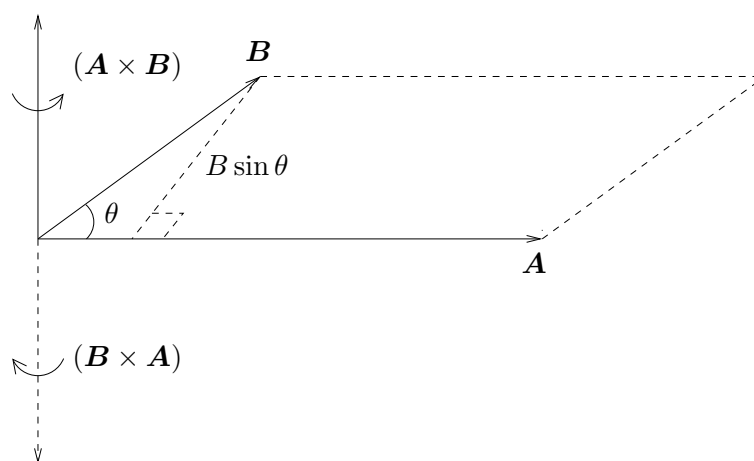
$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta. \quad (1.3)$$

som tilsvarer arealet av parallelogrammet dannet av \mathbf{A} og \mathbf{B} .

På komponentform kan vektorproduktet finnes ved å regne ut *determinanten*

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Faktorenes orden i vektorproduktet er ikke likegyldig og $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.



Figur 1.6: Vektorproduktet vist geometrisk. Legg merke til at vektorene $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ og $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ er like lange, men motsatt rettet.

Enhetsvektor Vi kan lage en enhetsvektor ved å dividere på lengden av vektoren. Enhetsvektoren tilsvarende en vektor \mathbf{A} blir

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}.$$

Dette kaller vi å *normalisere vektoren*. Enhetsvektoren har samme retning som \mathbf{A} og lengde lik 1.

Derivasjon av vektorer: La oss anta at vektoren \mathbf{A} varierer med tiden, t . Komponentene av vektoren er da funksjoner av t : $A_x(t)$, $A_y(t)$, $A_z(t)$. Den deriverte av vektoren med hensyn på tiden defineres ved

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_z}{dt}\mathbf{k}$$

når enhetsvektorene antas å ha faste retninger det vil si være tidsuavhengige. Den deriverte $d\mathbf{A}/dt$ angir vektorens endring per tidsenhet. Dersom \mathbf{r} er posisjonsvektoren for en partikkel som beveger seg i rommet, vil partikkelens hastighet, \mathbf{v} , være gitt ved den deriverte

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Dersom enhetsvektorene ikke er faste, men avhenger av tiden, må tidsderivasjonen av vektoren også omfatte enhetsvektorene. Dette skal vi komme tilbake til senere.

Eksempel: En partikkel skytes ut i tyngdefeltet med fart v_o i en retning som danner en vinkel α med horisontalen (x -aksen). Posisjonen for partikkelen kan skrives $\mathbf{r} = \{x, z\}$ hvor

$$\begin{aligned}x &= v_o \cos \alpha t \\z &= v_o \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

Her er z -aksen rettet vertikalt oppover og g er tyngdeakselerasjonen. Vi har sett bort fra luftmotstanden. Ved å derivere med hensyn på tiden finnes partikkelens hastighet

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_o \cos \alpha \mathbf{i} + (v_o \sin \alpha - gt)\mathbf{k}$$

og akselerasjon

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -g\mathbf{k}$$

1.5 Eksempel på skalarfelt

Med et *skalarfelt* mener vi at de til hvert punkt i rommet (x, y, z) er tilordnet en skalarverdi β . Dette kan uttrykkes ved at skalaren er gitt som en funksjon av romkoordinatene og tiden t :

$$\beta = \beta(x, y, z, t).$$

Her kan β for eksempel stå for temperatur eller trykk i atmosfæren, andre skalare størrelser er konsentrasjonen av salt (saltholdighet) eller CO_2 i havet.

Vi skal her anta at β varierer kontinuerlig både i rom og tid, men det er mange eksempler på at skalarfelt kan variere sprangvis (diskontinuerlig). Det gjelder for eksempel massetettheten i en sjokkbølge fra en kraftig eksplosjon.

I første omgang vil vi se bort fra at β er avhengig av tiden t . Det betyr at vi ser på stasjonære, tidsuavhengige, forhold. I rommet kan vi tegne flater med samme verdi for skalaren:

$$\beta(x, y, z) = \beta_0 = \text{konstant}.$$

Derav kan vi finne z som funksjon av x , y og β_0 :

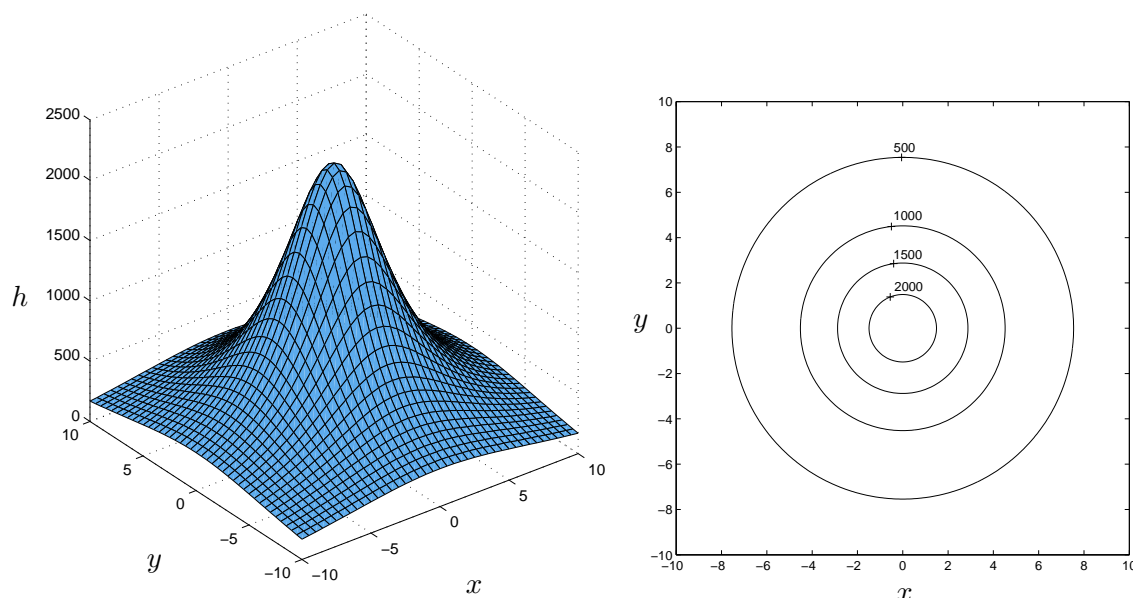
$$z = z(x, y, \beta_0)$$

som gir flater i rommet for forskjellige valg av β_0 . Disse flatene kalles *ekviskalarflater*.

En idealisert isolert fjelltopp kan fremstilles som en flate gitt ved formelen

$$h = \frac{h_0}{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2}} \quad (1.5)$$

hvor h er høyden over havflaten ($z = 0$), h_0 er høyden på toppen av fjellet og R er et mål for radius i fjellet. Figur 1.7 (venstre) viser et tre-dimensjonalt plott av fjelltoppen.



Figur 1.7: Tre-dimensjonalt plott av en isolert fjelltopp (til venstre). Tilsvarende høydekvoter i xy -planet til høyre. Enhetene på x - og y -aksene er km, enheten på h -aksen i meter. Parametrene $h_0 = 2277$ m, $R = 4000$ m. Tallene som er valgt tilsvarer fjellet Berenberg på Jan Mayen. Dette er Norges eneste aktive vulkan!

En kan også lage et høydekart av fjellet ved å tegne *høydekvoter* i xy -planet for noen valgte høydenivåer. Disse framkommer når en velger $h = 500, 1000$ osv. i likning 1.5.

Høydekvotene er her sirkler med sentrum i origo og gjenspeiler at fjelltoppen er aksesymmetrisk. Kvotelinjen $x^2 + y^2 = R^2$ tilsvarer en høyde på $\frac{h_0}{2}$. Der høydekvotene ligger tett er fjellet bratt.

Lufttrykket ved havflaten i tilknytning til et stormsenter (lavtrykkssentrum) kan beskrives idealisert ved formelen

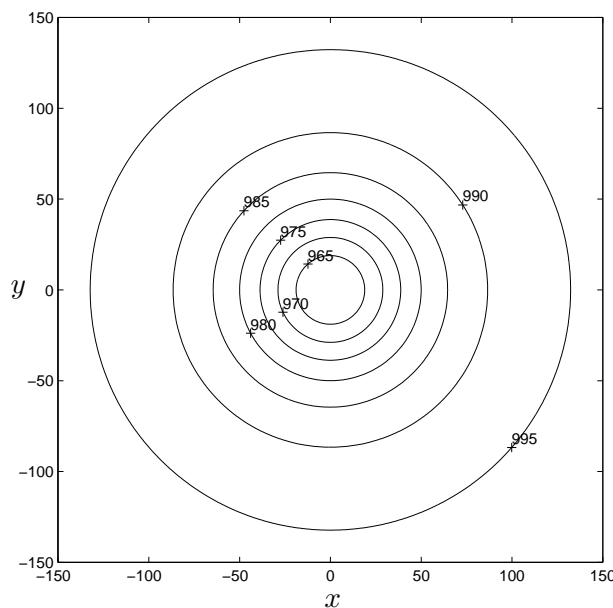
$$p = p_0 - \frac{\Delta p}{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2}} \quad (1.6)$$

hvor p_0 er lufttrykket langt borte fra sentrum, Δp er trykkfallet inn mot sentrum og R er et mål for utstrekningen av lavtrykket. *Kvotelinjene* eller *konturlinjene* for konstant trykk blir sirkler med sentrum i origo (figur 1.8). Konturlinjene betegnes *isobarer* dvs. linjer med konstant trykk. (iso = lik og bar = trykkenhet.)

Nå varierer ikke lufttrykket bare langs havflaten eller jordoverflaten, men også oppover i atmosfæren. Med god tilnærming kan man ofte finne at lufttrykket avtar eksponensielt med høyden. En sterkt idealisert, men allikevel realistisk modell for trykkvariasjonen over et lavtrykk kan derfor uttrykkes ved

$$p = \left[p_0 - \frac{\Delta p}{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2}} \right] e^{-z/H}. \quad (1.7)$$

Konstanten H i eksponensialfunksjonen uttrykker hvor rask trykket avtar oppover i atmosfæren. I en høyde $z = H$ har trykket avtatt til en e -del ($\frac{1}{e}$) av verdien ved bakken



Figur 1.8: Konturlinjer (isobarer) for lufttrykk beregnet fra likning (1.6) med $p_0 = 1000$ hPa, $\Delta p = 40$ hPa og $R = 50$ km. Enheter på x - og y -aksen er km.

$z = 0$. Meteorologene betegner størrelsen H som *skalahøyden* i atmosfæren. Flater med konstant trykk kalles *isobarflater*. Setter vi $p = p_0 e^{-z_0/H}$ finner vi den tilsvarende isobarflaten

$$p_0 e^{-z_0/H} = \left[p_0 - \frac{\Delta p}{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2}} \right] e^{-z/H}.$$

Ved å multiplisere likningen med $e^{z/H}$ og dividere med p_0 får vi

$$e^{(z-z_0)/H} = 1 - \frac{\frac{\Delta p}{p_0}}{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2}}.$$

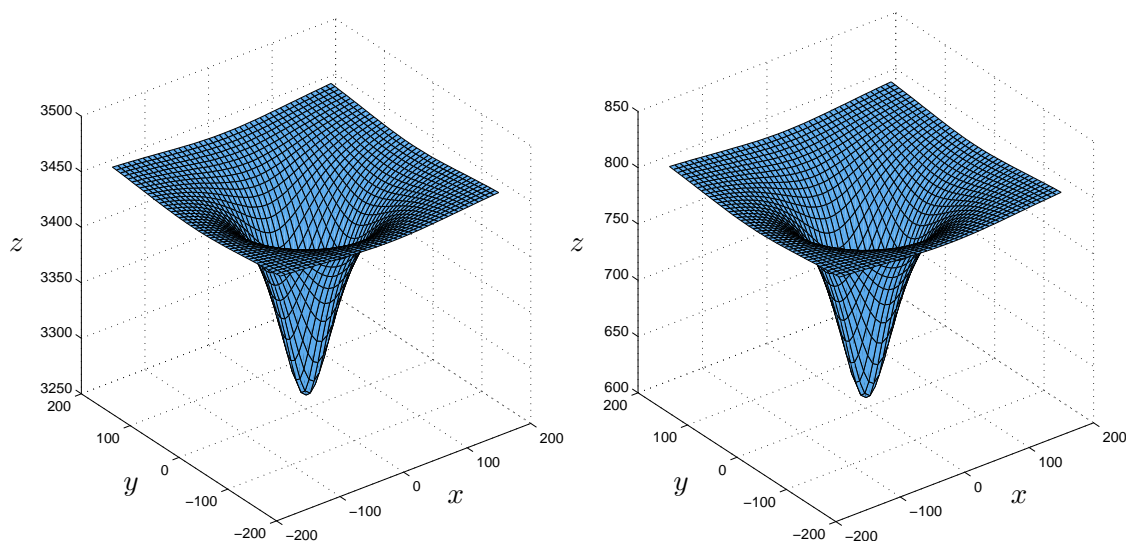
Tar man logaritmen til begge sider av dette uttrykket fås:

$$\frac{z - z_0}{H} = \ln \left[1 - \frac{\frac{\Delta p}{p_0}}{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2}} \right]. \quad (1.8)$$

Isobarflatene for forskjellige trykkverdier p_i ($i = 1, 2, \dots$), har tilhørende forskjellige verdier $z_0 = H \ln \frac{p_0}{p_i}$. Likning 1.8 og figur 1.9 viser at isobarflatene i dette tilfellet har samme form.

1.6 Skalering

I stedet for å måle romkoordinatene i SI-enhetene meter eller kilometer; kan det være hensiktsmessig å bruke en målestokk som er karakteristisk for fenomenet vi skal studere.



Figur 1.9: Tre-dimensjonale plott av isobarflatene for $p_i = 500$ hPa (venstre) og $p_i = 850$ hPa (høyre) fra likning 1.8. Enhetene på x - og y -aksen er km, og enheter for z -aksen er meter. Parametrene $H = 5000$ m, $p_0 = 1000$ hPa, $\Delta p = 40$ hPa, $R = 50$ km.

I eksemplet foran er det naturlig å bruke den karakteristiske radius R av fjelltoppen som målestokk for x - og y -koordinatene.

Vi definerer derfor nye x - og y -koordinater ved en *lineær transformasjon*

$$x^* = \frac{x}{R}, \quad y^* = \frac{y}{R}$$

der x^* og y^* er *dimensjonsløse måltall*. Eksempelvis vil $x^* = 1$ og $x^* = 2$ tilsvare henholdsvis distansene $x = R$ og $x = 2R$. På tilsvarende måte kan vi skalere høyden over referansenivået ($h=0$) ved høyden av fjelltoppen h_0 slik at vi får en dimensjonsløs høyde

$$h^* = \frac{h}{h_0}$$

Med dette kan vi skrive likning 1.5

$$h^* = \frac{1}{1 + x^{*2} + y^{*2}}$$

Sløyfer vi nå *-tegnet på de variable, men husker at vi arbeider med dimensjonsløse størrelser får likningen en pen og enkel form

$$h = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

På tilsvarende måte kan vi med utgangspunkt i likningen for trykkvariasjonen i lavtrykk (1.7) innføre skalahøyden som målestokk i z -retning slik at z^* blir et dimensjonsløst måltall

$$z^* = \frac{z}{H}.$$

Som skala eller målestokk for trykk kan vi bruke p_0 og innfører et dimensjonsløst trykk

$$p^* = \frac{p}{p_0}.$$

Her vil altså $p^* = 1$ tilsvare et fysisk trykk $p = p_0$. Med disse nye variablene kan vi omskrive likning 1.7. Vi dividerer først likningen med p_0 på begge sider

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 - \frac{\frac{\Delta p}{p_0}}{1 + \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2}} \right] e^{-z/H}.$$

Fører vi inn de nye dimensjonsløse variablene får vi

$$p^* = \left(1 - \frac{a}{1 + x^{*2} + y^{*2}} \right) e^{-z^*}$$

hvor $a = \frac{\Delta p}{p_0}$ er en dimensjonsløs konstant. På tilsvarende måte kan likning 1.8 omformes til

$$z^* - z_0^* = \ln \left(1 - \frac{a}{1 + x^{*2} + y^{*2}} \right).$$

Sløyfer vi nå *-tegnet på de dimensjonsløse variabler, men husker at de er dimensjonsløse, får likningene et penere utseende

$$p = \left(1 - \frac{a}{1 + x^2 + y^2} \right) e^{-z}$$

og

$$z - z_0 = \ln \left(1 - \frac{a}{1 + x^2 + y^2} \right).$$

Dette er eksempel på dimensjonsløse likninger eller funksjonsuttrykk i den form som man vanligvis møter i matematikk. Der opererer en hovedsakelig med skalerte likninger mellom dimensjonsløse størrelser.

Når man skal beskrive eller modellere virkeligheten er det viktig å være klar over at dette leder til likninger med dimensjon. Bare etter en skaleringsprosess slik som vi har vist her kan man få likninger mellom dimensjonsløse størrelser eller måltall.

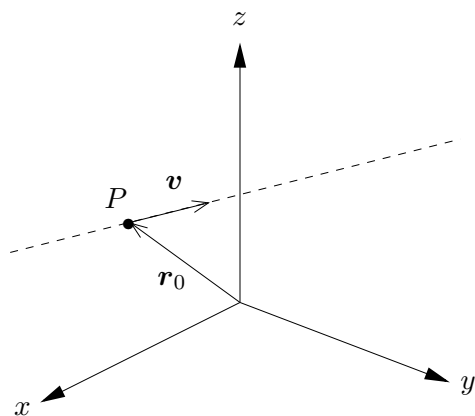
I dette kurset, som sikter mot å vise hvordan matematikken kan brukes, skal vi benytte både likninger med og uten dimensjon. Av sammenhengen vil det fremgå hva slags likningsform vi bruker.

1.7 Oppgaver

1. Gitt to vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3$. Vis at $\mathbf{u} = 2\mathbf{a} - \frac{1}{6}\mathbf{b}$ og $\mathbf{v} = \frac{1}{4}\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$ har samme retning dvs. er parallelle vektorer.

2. Gitt tre vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^3$ og to skalarer $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Bevis følgende egenskaper ved skalarproduktet:

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{a} = 0$
- $\alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ og $\mathbf{a} \cdot \beta \mathbf{b} = \beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ og $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$



Figur 1.10: En rettlinjete bane i rommet.

3. En partikkel P følger en rettlinjete bane gitt ved vektorlikningen

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$$

hvor \mathbf{r}_0 er partikkelens posisjon ved tiden $t = 0$ og partikkelens hastighet er gitt ved vektoren \mathbf{v} som er konstant. Komponentene av vektorene er $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$, $\mathbf{r}_0 = \{a, b, c\}$ og $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ i et kartesisk koordinatsystem med x , y og z som akseretninger og enhetsvektorer \mathbf{i} , \mathbf{j} og \mathbf{k} .

- Skriv likningen for banen på komponentform.
- Finn banen som går igjennom punktet $(0, 1, 0)$ når hastigheten er rettet i \mathbf{k} -retning.
- Finn partikkelhastigheten og skisser banen når $\mathbf{r}(t) = (-7t + 3)\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$
- Avgjør om de to banene

$$\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + (-6t + 1)\mathbf{j} + (2t - 8)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (3t + 1)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$

skjærer hverandre.

- e) Finn banen som går igjennom de to punktene $(3, -1, 5)$ og $(-4, 3, 0)$ når tiden som partikkelen bruker fra det første til det andre punktet er $t = 1$.

4. Enhetsvektorer og normalisering av vektorer:

- a) Normaliser vektoren $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

- b) Finn enhetsvektorer \mathbf{a} , \mathbf{b} og \mathbf{c} i planet (\mathbf{R}^2) slik at $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$.

5. Finn vinkelen mellom vektorene $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ og $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

6. Den ortogonale projeksjonen av \mathbf{a} på \mathbf{b} er vektoren $\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{b}|^2} \mathbf{b}$. Finn projeksjonen av $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ på $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Illustrer dette geometrisk.

7. La \mathbf{i} , \mathbf{j} og \mathbf{k} være enhetsvektorer i et kartesisk koordinatsystem med retning langs henholdsvis x -, y - og z -aksen. Fyll ut tabellen ved å regne ut vektorproduktene $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k}$ osv.

\times	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
\mathbf{i}			
\mathbf{j}			
\mathbf{k}			

8. Gitt tre vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^3$ og en skalar $\alpha \in \mathbf{R}$. Bevis følgende egenskaper ved vektorproduktet:

- a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ hvis og bare hvis \mathbf{a} og \mathbf{b} er parallelle eller hvis $\mathbf{a} = 0$ eller $\mathbf{b} = 0$

- b) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

- c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

- d) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

- e) $(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

- f) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$

- g) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ hvis og bare hvis $(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{b} = 0$

- h) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = 0$

9. Finn arealet av parallelogrammet utspent av vektorene $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ og $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

10. En trekant har hjørner $(-2, -1, 2)$, $(2, 0, 1)$ og $(2, 2, 0)$. Regn ut arealet.

11. Bytte av koordinatsystem:

- a) Gitt punktet $(6, 2\sqrt{3})$ i et plant kartesisk koordinatsystem. Bestem polarkoordinater for punktet.
- b) Gitt punktet med polarkoordinater $(3, \pi/2)$. Bestem posisjonsvektoren for punktet i kartesiske koordinater.

12. En rakett skytes vertikalt oppover i tyngdefeltet ved tiden $t = 0$ med utgangshastighet v_0 . Raketts høyde (h) over bakken som funksjon av tiden (t) er gitt ved den kjente formelen

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

hvor g er tyngdens akselerasjon som vi antar er konstant langs hele raketts bane. (Formelen gjelder under forutsetning av at luftmotstanden kan neglisjeres.)

- a) Finn den største høyden (h_m) som raketten når og tiden (t_m) når dette skjer.
- b) Innfør dimensjonsløse parametre (h^*, t^*) for h og t når du skalerer med h_m og t_m og skriv formelen på dimensjonsløs form.
- c) Tegn h^* som funksjon av t^* for $0 < t^* < 1$. Forklar hvorfor dette diagrammet kan brukes til å finne raketts høyde for forskjellige utgangshastigheter og forskjellige verdier for g .

Kapittel 2

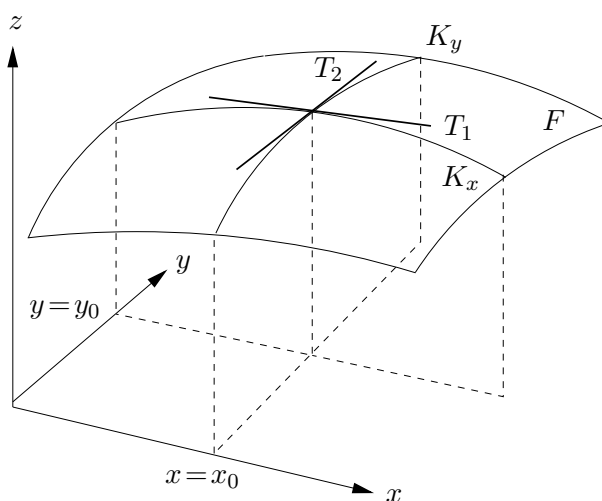
Gradientvektoren, vektorfelt, strømlinjer, feltlinjer

2.1 Partiell derivasjon

Vi skal kort se på noen viktige prinsipper for derivasjon av en funksjon av flere variable. La oss eksempelvis starte med en funksjon av de to romvariablene x og y og hvor funksjonen gir en z -verdi for hvert valg av x og y :

$$z = f(x, y).$$

Geometrisk vil dette fremstille en flate F i rommet slik som skissert på figur 2.1. Vi forutsetter at flaten er glatt og sammenhengende uten skarpe sprang (diskontinuiteter).



Figur 2.1: En flate F i rommet. Kurven K_x er gitt ved $z = f(x, y = y_0)$. T_1 er tangenten til K_x og har stigningstall $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y = y_0)$. Tilsvarende for K_y og T_2 .

Vi skal nå definere to derivasjoner av funksjonen $z = f(x, y)$. Ved den første deriverer vi på vanlig måte med hensyn på x mens vi holder y konstant. Dette kan vi skrive på følgende måte:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{y=\text{konst}} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y = y_0).$$

Vi bruker 'bøyde' derivasjonssymboler for å understreke at funksjonen også avhenger av flere variable, her y . Funksjonen

$$z = f(x, y = y_0)$$

fremstiller en kurve K_x som ligger i flaten F . Den partielt deriverte

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y = y_0)$$

blir stigningstallet for tangenten til kurven K_x og uttrykker hvor fort funksjonen vokser eller avtar når en går i x -retning langs kurven. Slik sett har den partielt deriverte analog tolkning som vanlig derivasjon. Den andre partielt deriverte som vi skal se på er derivasjon med hensyn på y mens x holdes konstant. Dette kan vi skrive

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=\text{konst}} = \frac{\partial}{\partial y} f(x = x_0, y).$$

På tilsvarende måte som ovenfor kan dette tolkes som stigningstallet for tangenten til kurven K_y gitt ved $z = f(x = x_0, y)$ og uttrykker hvor fort funksjonen vokser eller avtar når en går i y -retning (se figur 2.1).

Eksempel: Et eksempel vil klargjøre hva vi mener:

$$z = 1 + x^2 + y^2$$

framstiller en parabolisk flate i rommet med laveste punkt $z = 1$ for $x = y = 0$. Partiellderivasjon gir:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

For $x = y = 0$ er $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ slik at flaten tangerer planet $z = 1$ i origo. For store verdier av x og y blir $\frac{\partial z}{\partial x}$ og $\frac{\partial z}{\partial y}$ store og flaten stiger bratt for økende verdier av x og y .

Dersom funksjonen $f(x, y)$ er tilstrekkelig glatt og kontinuerlig kan man definere høyere ordens partielle derivasjoner

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Ved den første holdes y konstant ved begge derivasjoner. Ved den andre holdes først y konstant når det deriveres med hensyn på x og deretter holdes x konstant når det deriveres med hensyn på y . Tilsvarende for de to andre uttrykkene. Det kan vises at for glatte kontinuerlige funksjoner så er rekkefølgen av derivasjonene uten betydning slik at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

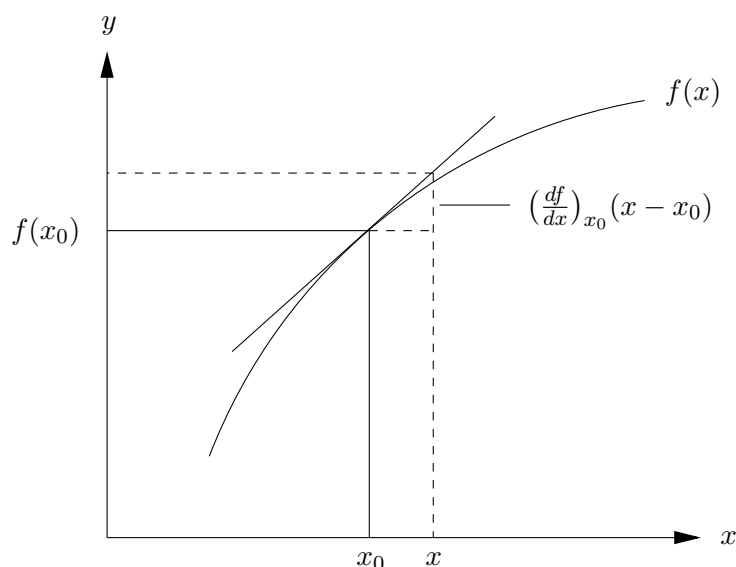
For funksjoner av flere enn to variable defineres partiell derivasjon på tilsvarende måte. Vi skal se eksempel på det i neste avsnitt.

2.2 Taylorutvikling av en funksjon av en eller flere variable

Før vi går videre skal vi kort repetere noen viktige resultater fra teorien for *Taylor's rekkeutvikling av funksjoner*. En funksjon av en variabel $f(x)$ kan i en omegn av punktet $x = x_0$ tilnærmes ved

$$f(x) \cong f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} (x - x_0) + \dots \quad (2.1)$$

Det betyr at funksjonens variasjon i nærheten av punktet approksimeres med en rett linje med vinkelkoeffisient (stigningstall) gitt ved den deriverte $\frac{df}{dx}$ i punktet. Den rette linjen er altså tangent til grafen $f(x)$ i punktet $x = x_0$. Dette forutsetter selvfølgelig at den deriverte av funksjonen eksisterer i punktet.



Figur 2.2: En funksjon $f(x)$ kan approksimeres i nærheten av et punkt x_0 med tangenten til $f(x)$ i punktet $x = x_0$.

Høyere ordenes ledd i rekkeutviklingen inneholder høyere ordens deriverte av funksjonen. Andre ordens tilnærming i Taylorutviklingen for funksjoner av en variabel er

$$f(x) \cong f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x_0} (x - x_0)^2.$$

Dersom vi er tilstrekkelig nær punktet $x = x_0$ og funksjonen er tilstrekkelig glatt kan vi med god tilnærming sløyfe de høyere ordens leddene i rekkeutviklingen.

På tilsvarende måte kan vi til første orden tilnærme en funksjon av to variable $g = g(x, y)$ i omegn av punktet $x = x_0, y = y_0$ ved

$$g(x, y) \cong g(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} (y - y_0) + \dots \quad (2.2)$$

hvor $\frac{\partial g}{\partial x}$ og $\frac{\partial g}{\partial y}$ er de partielt deriverte av funksjonen g henholdsvis med hensyn på x og y beregnet i punktet (x_0, y_0) .

Andre ordens tilnærming av en funksjon av to variable er

$$\begin{aligned} g(x, y) \cong & g(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} (y - y_0) + \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)_{x_0, y_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)_{x_0, y_0} (y - y_0)^2 + \\ & \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\right)_{x_0, y_0} (x - x_0)(y - y_0). \end{aligned}$$

Generalisering av (2.2) for funksjoner av tre romlig variable, x , y og z skulle være åpenbar for første ordens leddene i Taylor-rekken.

2.2.1 Eksempel på andre ordens Taylor-approksimasjon

Vi ønsker å finne en andre ordens Taylor-approksimasjon for funksjonen

$$g(x, y) = e^{xy}$$

i en omegn av punktet $(0, 0)$. Vi må da finne verdien på $\partial g/\partial x$, $\partial g/\partial y$, $\partial^2 g/\partial x^2$, $\partial^2 g/\partial y^2$ og $\partial^2 g/\partial x \partial y$ i punktet $(0, 0)$. Disse er:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = ye^{xy} \Rightarrow \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{0,0} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = xe^{xy} \Rightarrow \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{0,0} = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)_{0,0} = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^2 e^{xy} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)_{0,0} = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\right)_{0,0} = 1$$

Taylor-approksimasjonen blir dermed

$$g(x, y) \cong 1 + xy$$

2.3 Gradientvektoren til et skalarfelt

La oss betegne et skalarfelt β med funksjonssammenhengen

$$\beta = \beta(x, y, z).$$

Flater med samme verdi av skalaren, *ekviskalarflater*, er gitt ved

$$\beta(x, y, z) = \beta_0$$

hvor β_0 er konstant. Tilveksten i β når vi øker x , y og z med små tillegg Δx , Δy og Δz er

$$\Delta\beta = \beta(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \beta(x, y, z).$$

Vi skal forutsette at funksjonen β er tilstrekkelig glatt slik at de partielt deriverte $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ og $\frac{\partial}{\partial z}$ eksisterer og vi foretar en Taylorutvikling til første orden av

$$\beta(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = \beta(x, y, z) + \frac{\partial\beta}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\beta}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\beta}{\partial z}\Delta z.$$

Derved kan tilveksten i β skrives

$$\Delta\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\beta}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\beta}{\partial z}\Delta z. \quad (2.3)$$

$\frac{\partial\beta}{\partial x}$ er altså endringen i β per lengdeenhet i x -retning og $\frac{\partial\beta}{\partial x}\Delta x$ blir endringen i β over distansen Δx . Tilsvarende tolkning kan gjøres for leddene $\frac{\partial\beta}{\partial y}\Delta y$ og $\frac{\partial\beta}{\partial z}\Delta z$. Dette viser at den totale endringen i β setter seg sammen av endringene i de tre akseretningene. Dersom vi innfører to vektorer definert henholdsvis ved

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\mathbf{k} \quad (2.4)$$

og

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}$$

kan vi skrive tilveksten i β som

$$\Delta\beta = \nabla\beta \cdot \Delta\mathbf{r}. \quad (2.5)$$

Vektoren $\nabla\beta$ kalles *gradientvektoren* til skalarfeltet β . I grensen $\Delta\mathbf{r} \rightarrow 0$ kan (2.5) skrives

$$d\beta = \nabla\beta \cdot d\mathbf{r} \quad (2.6)$$

og

$$d\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}dx + \frac{\partial\beta}{\partial y}dy + \frac{\partial\beta}{\partial z}dz$$

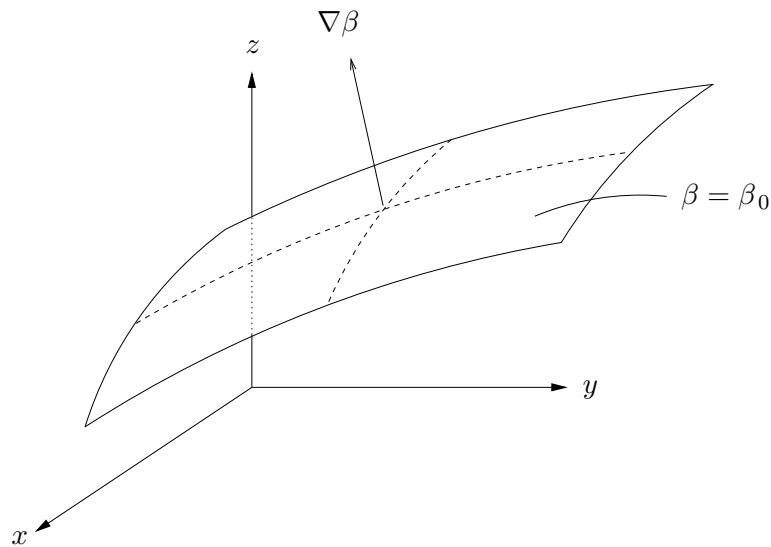
kalles *totalt differensial*.

Gradientvektoren har følgende egenskaper:

- 1) Den står normalt på ekviskalarflatene
- 2) Den peker mot større verdier av skalaren
- 3) Den angir økningen i skalarverdien pr. lengdeenhet i den retningen hvor økningen er størst.

At 1) gjelder innser vi når vi velger $\Delta \mathbf{r}$ til å ligge langs (tangente i) skalarflaten. Da må tilveksten i β være null ($\Delta\beta = 0$). Altså må $\nabla\beta \cdot \Delta\mathbf{r} = 0$ som betyr at vektoren $\nabla\beta$ og $\Delta\mathbf{r}$ står normalt på hverandre. *Enhetsnormalen* til ekviskalarflaten $\beta = \text{konstant}$ kan etter hva vi nå har lært skrives

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|}.$$



Figur 2.3: Gradientvektoren til et skalarfelt β står normalt på ekviskalarflaten.

2.3.1 Retningsderiverte

Gradientvektoren kan brukes til å finne endringen i skalaren per lengdeenhet i en hvilken som helst retning. Vi tar utgangspunkt i likning 2.3 og lar

$$\Delta r = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^{1/2}$$

betegne lengden av vektoren $\Delta \mathbf{r}$. Dividerer vi (2.3) med Δr får vi

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\beta}{\Delta r} &= \frac{\partial\beta}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta r} + \frac{\partial\beta}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta r} + \frac{\partial\beta}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta r} \\ &= \nabla\beta \cdot \mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} \cdot \nabla\beta \end{aligned}$$

hvor \mathbf{a} er en enhetsvektor langs retningen $\Delta \mathbf{r}$:

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta x}{\Delta r} \mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta r} \mathbf{j} + \frac{\Delta z}{\Delta r} \mathbf{k}.$$

Lar man nå Δx , Δy og $\Delta z \rightarrow 0$ kan vi i grensen skrive

$$\frac{\partial \beta}{\partial r} = \mathbf{a} \cdot \nabla \beta.$$

Altså er endringen i skalaren per lengdeenhet $\frac{\partial \beta}{\partial r}$ i \mathbf{r} -retning skalarproduktet av enhetsvektoren i retningen med gradientvektoren. Størrelsen $\frac{\partial \beta}{\partial r}$ kalles ofte for den *retningsderiverte* av skalarfunksjonen fordi den angir endringen av skalaren i en bestemt retning.

2.3.2 Et høydetopografisk eksempel

Den horisontale høydegradienten, dvs. endringen i høyde pr. meter i horisontalplanet, for terrengeformen

$$h = \frac{h_0}{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2}} \quad (2.7)$$

(se figur 1.7), kan finnes forholdsvis enkelt. Vi setter $r^2 = x^2 + y^2$. Da blir $h = h(r)$ en funksjon av r . Nå er

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{h_0}{\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)^2} \frac{2r}{R^2}.$$

Videre er

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{r}$$

og på tilsvarende måte

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}.$$

Høydegradienten er

$$\begin{aligned} \nabla h &= \frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial h}{\partial y} \mathbf{j} = \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{j} = -\frac{2h_0}{R^2 \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)^2} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \\ &= -\frac{2h_0 \mathbf{r}}{R^2 \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Konturlinjer (høydekvoter) for h og gradientvektoren ∇h er tegnet i samme figur (2.4). Vi ser at høydegradientvektoren er størst der hvor høydekvotene ligger tettest og at gradientvektoren peker mot større verdier av h .

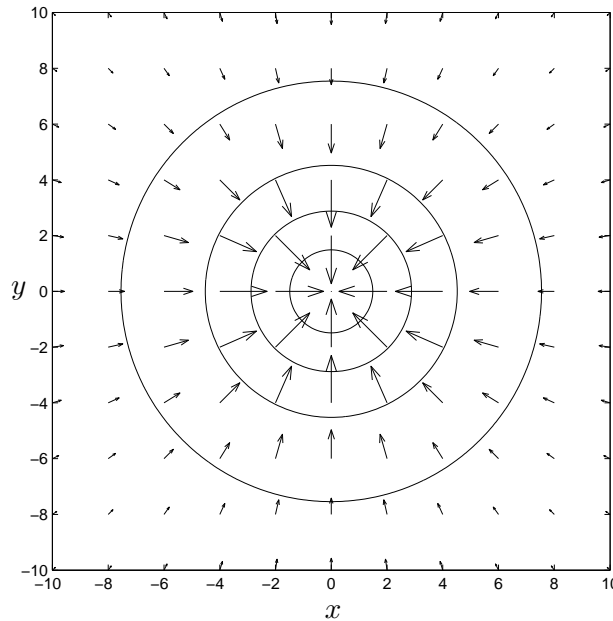
2.3.3 Et uttrykk for flatenormalen

Vi kan bruke gradienten til å finne et uttrykk for *flatenormalen* til en flate gitt ved likningen

$$\beta = z - \eta(x, y) = 0$$

hvor $\eta(x, y)$ er en funksjon av x og y . Gradienten til β er

$$\nabla \beta = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}$$



Figur 2.4: Konturlinjer for terrengformen h gitt ved lik. (2.7) og gradientvektoren ∇h . Enhetene på x - og y -aksen er oppgitt i km. $h_0 = 2277$ m, $R = 4000$ m.

siden $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$. Videre er

$$|\nabla\beta| = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

slik at flatenormalen blir:

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\partial\eta}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial\eta}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) / \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 + 1}.$$

Dersom η bare varierer i to dimensjoner i xz -planet forsvinner variasjonen i y -retning og en får et noe enklere uttrykk for normalen til kurven $z = \eta(x)$ i xz -planet

$$\mathbf{n} = \left(-\frac{\partial\eta}{\partial x}\mathbf{i} + \mathbf{k} \right) / \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 1}.$$

2.3.4 Hvordan finne skalarfunksjonen når gradientvektoren er kjent

Ofte får man behov for å finne funksjonen β når gradientvektoren $\nabla\beta$ er kjent. Vi skal illustrere dette ved et eksempel hvor $\nabla\beta$ er gitt ved

$$\nabla\beta = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Vi har da at

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial \beta}{\partial z} = 1.$$

Vi integrerer de tre likningene henholdsvis med hensyn på x , y og z og får

$$\beta = yx + f_1(y, z)$$

$$\beta = xy + f_2(x, z)$$

$$\beta = z + f_3(x, y)$$

hvor $f_1(y, z)$, $f_2(x, z)$ og $f_3(x, y)$ er ubestemte funksjoner. Derivasjon av uttrykkene viser at vi har integrert riktig. Siden vi krever et entydig uttrykk for $\beta(x, y, z)$ må vi velge $f_1(y, z) = z$, $f_2(x, z) = z$ og $f_3(x, y) = xy$. Derved blir uttrykket for skalarfunksjonen

$$\beta(x, y, z) = xy + z + \text{konstant}.$$

For å kontrollere kan vi nå finne $\nabla\beta$ og se at uttrykket stemmer med utgangspunktet.

2.4 Vektorfelt. Strømmlinjer og feltlinjer

Et *vektorfelt* består av mange vektorer hvor hver enkelt vektor er knyttet entydig til et punkt (x, y, z) i rommet eller til et punkt på en to-dimensjonal flate. Det betyr at f.eks. vektoren i vektorfeltet \mathbf{A} kan oppfattes som en funksjon av romkoordinatene (x, y, z) og tiden t som vi skriver

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z, t)$$

Dersom vektoren er definert i alle punkter i rommet og varierer gradvis fra punkt til punkt snakker vi om et kontinuerlig vektorfelt. Alt etter som vektoren representerer en kraft eller en strømhastighet i en væske kan vi snakke om et *kraftfelt* eller et *strømfelt*. Det er mange eksempel på slike vektorfelt og begrepet er i utstrakt bruk særlig i fag som meteorologi, oseanografi, elektromagnetisme, astrofysikk og plasmafysikk.

I den elementære undervisningen om vektorer i skolen og på universiteter blir det sjelden poengtert at en vektor kan være stedbundne dvs. knyttet til et bestemt geometrisk punkt. For mange er det derfor uvant å forestille seg vektorfelt slik som vi har beskrevet her.

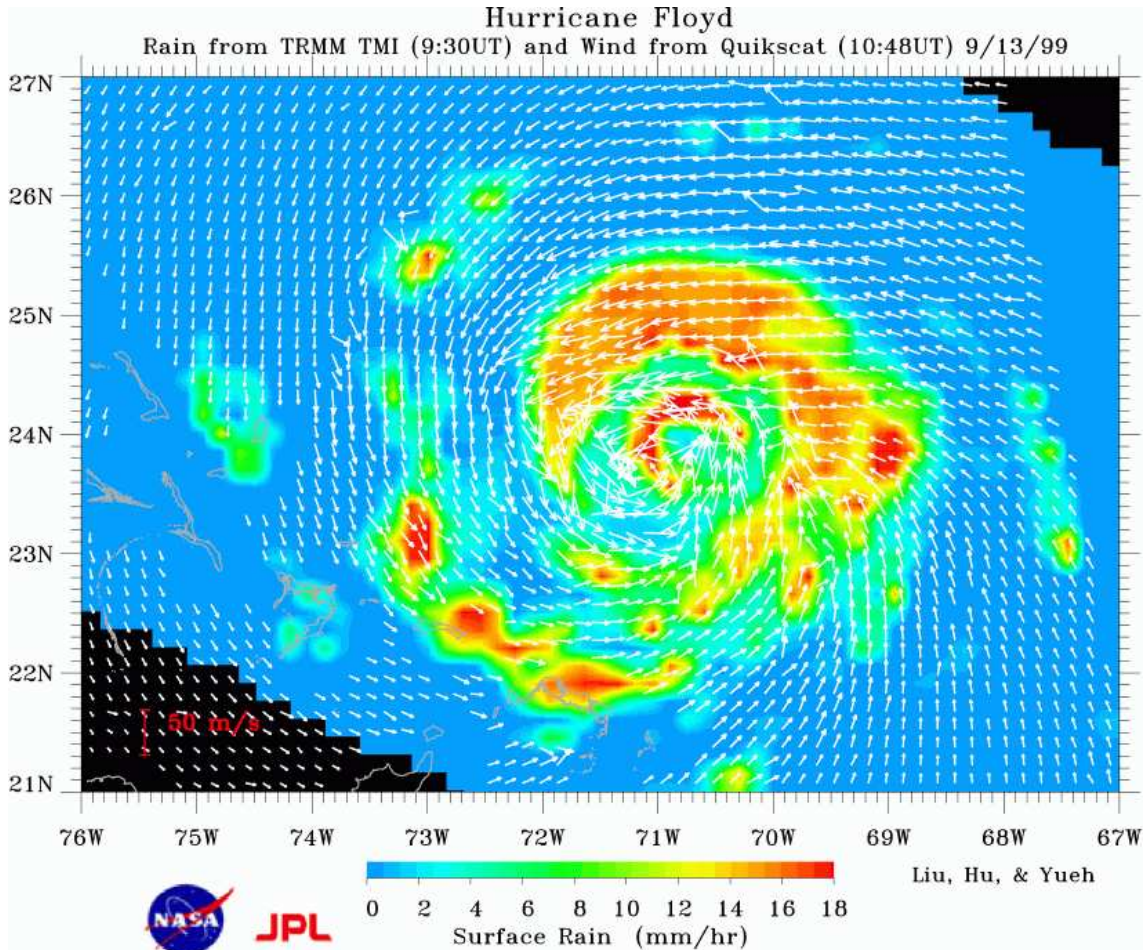
Vektorfeltet i figur 2.5 viser vindvariasjonen omkring den kraftige syklonen Floyd i Karibien ved et angitt tidspunkt, 10:48 UT (Universal time, også kalt verdenstid) den 13. september 1999. Lengden av vektorene angir vindstyrke og retningen angir vindretningen. Dette feltet representerer altså et øyeblikksbilde av vindvariasjonen omkring syklonsentret. Syklonsentret beveger seg samtidig med at styrken endres. Ved et senere tidspunkt har derfor vindfeltet forandret seg.

La oss, i første omgang, anta at vi har å gjøre med et to-dimensjonalt *stasjonært strømningsfelt* som altså ikke forandrer seg i tiden. Strømhastigheten kan da beskrives ved en vektor \mathbf{v} med komponenter $\{v_x, v_y\}$ henholdsvis i x - og y -retning som bare er funksjoner av romkoordinatene x og y

$$\mathbf{v} = v_x(x, y)\mathbf{i} + v_y(x, y)\mathbf{j}.$$

Kjenner en funksjonen i $v_x = v_x(x, y)$ og $v_y = v_y(x, y)$ kan man tegne opp vektorfeltet på en tilsvarende måte som vist på i figur 2.5.

For å få et visuelt bilde av feltet er det ofte hensiktsmessig å tegne *strømlinjene* for feltet. Det er linjer som har strømhastighetsvektoren som tangent (se figur 2.6).



Figur 2.5: Vind- og nedbørsfeltet i syklonen Floyd i Mexico Gulven 13. september 1999. Vindretning og styrke er markert med piler, nedbørsintensitet (millimeter per time) med fargeskala. Syklonen Floyd forårsaket stor skade da den kom innover land de følgende dagene.

La oss betegne et vektorelement i tangentretning av strømlinjen med $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$. Da må vektorene $d\mathbf{r}$ og \mathbf{v} være parallelle og det kan uttrykkes ved kravet

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = 0.$$

Dette vektorproduktet kan regnes ut på vanlig måte

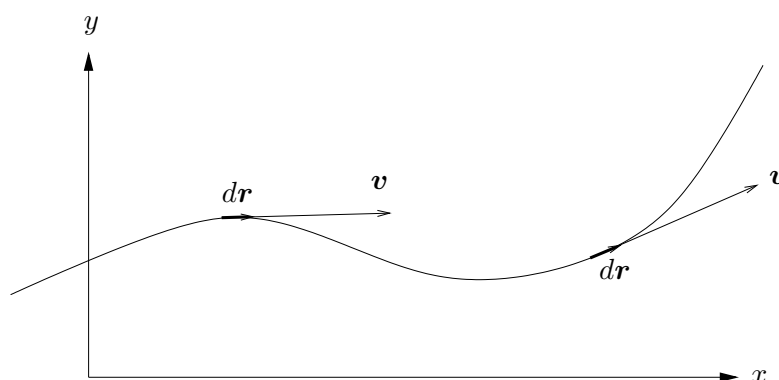
$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} = (v_x dy - v_y dx)\mathbf{k} = 0$$

hvor \mathbf{k} er enhetsvektoren normalt på xy -planet. Av dette ser vi at langs en strømlinje må

$$v_x dy = v_y dx. \quad (2.8)$$

Dette er en viktig relasjon som kan brukes til å finne strømlinjene.

På tilsvarende måte kan en for et vilkårlig vektorfelt \mathbf{A} finne et sett av linjer som har \mathbf{A} som tangent. Linjene kalles *feltlinjer*. Slik kan en for eksempel visualisere elektriske eller magnetiske felt (se figur 2.7).



Figur 2.6: En strømlinje har strømvektoren som tangent.

2.4.1 Eksempel på beregning av strømlinjer

Vi vil se på strømfeltet

$$\mathbf{v} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$$

hvor ω er en konstant. Ved innsetning $v_x = -\omega y$ og $v_y = \omega x$ i (2.8) får vi etter å ha forkortet ω

$$-y dy = x dx.$$

Integrerer vi venstresiden av denne likningen med hensyn på y og høyresiden med hensyn på x

$$-\int y dy = \int x dx$$

får vi

$$-\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

hvor C er en konstant. Dette kan skrives

$$x^2 + y^2 = 2C.$$

Dette er likningen for en sirkel med sentrum i origo og radius $\sqrt{2C}$. Strømlinjene er altså i dette tilfellet sirkler. Vi ser at strømvektorene er tangenter til strømlinjen og rotasjonen i feltet er slik som angitt på figur 2.8 når $\omega > 0$. Siden feltet i dette tilfellet



Figur 2.7: Visualisering av elektriske feltlinjer med linfrø som flyter i en oppløsning. Frøene er svakt elektrisk ladet og retter seg inn etter kraftlinjene. Foto: Ørjan Martinsen, Fysisk institutt, UiO.

er stasjonært, uavhengig av tiden, vil partikler som flyter i feltet bevege seg langs strømlinjene altså i sirkelbaner.

På tilsvarende måte som for strømningsfelt kan man tegne opp tangentlinjene til et vektorfelt som representerer kraftfeltet omkring en magnet eller magnetfeltet omkring en strømførende ledning. I disse tilfellene er det vanlig å bruke betegnelsene *kraftlinjer* eller *feltlinjer* som altså kan finnes på tilsvarende måte som strømlinjene.

2.4.2 Hastighetsfeltet i skive som roterer

En sirkulær skive roterer om en akse gjennom sentrum med vinkelhastighet ω (radianer/sekund). Farten på et sted P i avstand r fra sentrum av skiven er da ωr . I løpet av en viss tid har skiven dreid seg en vinkel θ . Regnet fra et fast aksekors xy har punktet P hastighetskomponenter

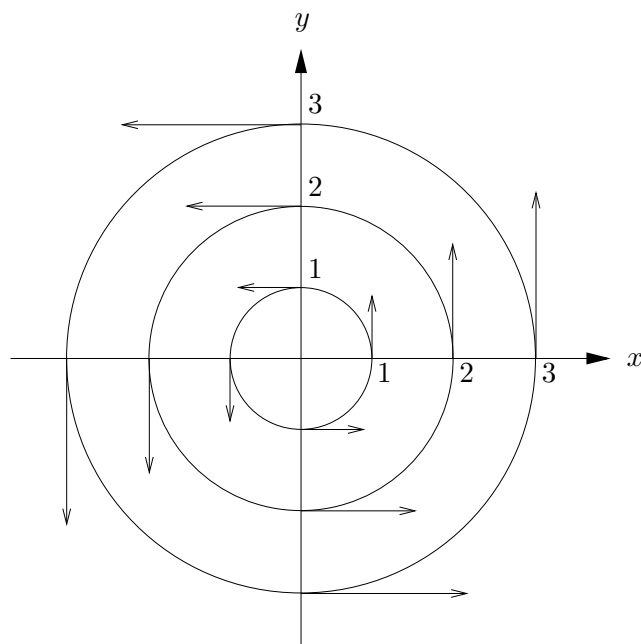
$$v_x = -\omega r \sin \theta = -\omega y \quad v_y = \omega r \cos \theta = \omega x$$

På vektorform får vi

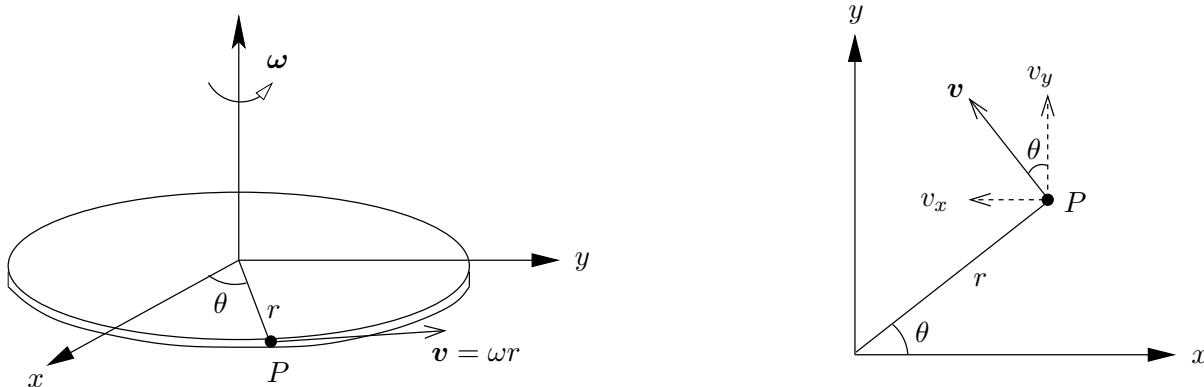
$$\mathbf{v} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$$

Hvis vi skriver vinkelhastigheten som en vektor

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$$



Figur 2.8: Strømlinjene for feltet $\mathbf{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$ er sirkler med sentrum i origo og radius $\sqrt{2C}$. Her er strømlinjene for $C = 1/2$, $C = 1$ og $C = 3/2$ tegnet.



Figur 2.9: Skive som roterer om en akse normalt xy -planet.

hvor \mathbf{k} er enhetsvektor i z -retning normalt skiven, kan hastigheten av punkt P uttrykkes ved vektorproduktet

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega \mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

Sjekk at dette er riktig!

2.5 Oppgaver

1. Gitt funksjonen $f(x, y, z) = x^2y + z^2x$. Finn de partielt deriverte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ og vis at de er lik henholdsvis $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$.

2. Finn Taylor-approksimasjonen av første orden:

a) $f(x) = \sin x$ om punktet $x_0 = 0$

b) $f(x) = \cos x$ om punktet $x_0 = 0$

c) $f(x) = e^{x^2}$ om punktene $x_0 = 0$ og $x_0 = 1$

d) $f(x) = \sin \sqrt{x}$ om punktet $x_0 = \pi^2$

e) $g(x, y) = \sin x \cos y$ om punktet $(x_0, y_0) = (0, 0)$

f) $g(x, y) = xy^2 - e^{x+y}$ om punktet $(x_0, y_0) = (1, -1)$

g) $g(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$ om punktet $(x_0, y_0) = (-1, 2)$

3. Finn Taylor-approksimasjonen av andre orden:

a) $f(x) = \sin x$ om punktet $x_0 = 0$

b) $f(x) = \cos x$ om punktet $x_0 = 0$

c) $f(x) = \ln x$ om punktet $x_0 = 2$

d) $f(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$ om punktet $x_0 = -1$

4. Finn Taylor-approksimasjonen til andre orden for funksjonen

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sin x}.$$

Bruk dette til å finne en tilnærmet verdi for $\ln(1.01)/\sin 0.01$. Sammelikn resultatet med eksakt verdi. (Hint: Rekkeutvikle først teller og nevner hver for seg.)

5. Regn ut gradientvektoren til skalarfeltet β :

a) $\beta(x, y, z) = x^2 + xy + z^2$

b) $\beta(x, y, z) = e^{-(xy+z)}$

c) $\beta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

d) $\beta(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

e) $\beta(x, y, z) = \beta(r)$ hvor β er en funksjon av $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Kontroller svaret ved å sammenligne med resultatene fra c) og d).

6. Finn skalarfeltet $\beta(x, y, z)$ når gradienten til skalarfeltet er gitt ved:

a) $\nabla\beta = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

b) $\nabla\beta = \cos(yz)\mathbf{i} - xz \sin(yz)\mathbf{j} - xy \sin(yz)\mathbf{k}$

c) $\nabla\beta = -e^{-x}\mathbf{i} - e^{-y}\mathbf{j} - e^{-z}\mathbf{k}$

7. La $\alpha(x, y, z)$ og $\beta(x, y, z)$ være to skalarfelt og la c være en konstant skalar. Benytt definisjonen av gradientvektoren (2.4) til å vise:

a) $\nabla(\alpha + \beta) = \nabla\alpha + \nabla\beta$

b) $\nabla(c\beta) = c\nabla\beta$

c) $\nabla(\alpha\beta) = \alpha\nabla\beta + \beta\nabla\alpha$

d) $\nabla\left(\frac{1}{\beta}\right) = -\frac{1}{\beta^2}\nabla\beta$

8. Vi antar at temperaturfeltet i atmosfæren tilnærmet kan skrives $T = T_0 \frac{R}{r}$ hvor $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ er avstanden fra origo som ligger i jordens sentrum. R er jordens radius og T_0 er temperaturen ved jordens overflate.

a) Finn temperaturgradientens størrelse og retning ved jordoverflaten.

b) Velg passende skalering og skriv likningen på dimensjonsløs form.

9. Terrengformen i et fjellpass kan beskrives ved

$$h(x, y) = h_0 + \frac{a}{R^2}xy$$

hvor h er høyden over et definert nullnivå og h_0 , R og a er konstanter.

a) Tegn opp høydekonturene når $h_0 = 1200$ m, $a = 250$ m og $R = 2$ km.

b) Hvor i terrenget er det brattest stigning og fall?

c) Velg hensiktsmessig skalering og transformer likningen for terrengformen over på dimensjonsløs form.

10. Finn og skisser strømlinjene for følgende hastighetsfelt:

a) $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

b) $\mathbf{v} = ay\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$

c) $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$

hvor a og b er positive konstanter. Hva blir resultatet for b) dersom a er negativ?

11. Finn strømlinjene når

$$\mathbf{v} = -\frac{cy}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{cx}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$

hvor c er en konstant.

12. Finn strømlinjene når

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla\beta, \quad \beta = \beta(x, y).$$

13. Gitt hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = 2kx\mathbf{i} + 2ky\mathbf{j} - 4kz\mathbf{k}, \quad k > 0.$$

a) Finn strømlinjene i xz -planet.

b) Vis at strømmen er aksesymmetrisk og skisser strømlinjene.

Kapittel 3

Bruk av Matlab

3.1 Innledning

Matlab (Matrix Laboratory) er et kraftig verktøy for numerisk utregning og visualisering. Etter å ha vært i bruk i godt over 20 år er Matlab et av de mest utbredte programmeringsspråk for matematiske beregninger som finnes på markedet i dag.

Som navnet tilsier er Matlab matrisebasert og det er derfor lurt å kunne litt lineær algebra for å få fullt utbytte av Matlabs mange muligheter. I dette kurset skal vi først og fremst se på hvordan Matlab kan hjelpe oss til å visualisere skalarfelt, vektorfelt og konturlinjer, til beregning av gradientvektorer, divergens og sirkulasjon.

I dette kompendiet vil det bare bli gitt en rask innføring i den grunnleggende bruken av Matlab. Mer informasjon for nybegynnere, finnes i boken som brukes i kurset MAT1100 av Lindstrøm og Hveberg (2011). Viderekommende vil finne referanser til mer utførlige brukerbeskrivelser og manualer ved å søke “matlab” på Google.

3.2 Litt grunnleggende Matlab

3.2.1 Oppstart, grensesnitt, kommentarer

Matlab finnes på Linux- og Unix-maskiner og startes ved å skrive `matlab&` i et xterm-vindu. Et nytt vindu som inneholder flere små vinduer vil dukke opp. Av disse er det Matlabs kommandovindu (Command window) som er det viktigste. Du kan endre hvilke vinduer du ønsker å bruke i View-menyen.

I kommandovinduet kan du skrive inn Matlab-kommandoer som vil bli eksekvert med en gang du trykker på Enter. Tegnet `'>>'` betyr at Matlab er klar til å ta imot en kommando. Resultatet av denne vil bli skrevet ut rett under (se eksempler i neste avsnitt).

Når du skal skrive Matlab-kode er det veldig lurt (som i alle andre programmeringsspråk) å vende seg til og skrive kommentarer slik at det er lettere både for deg selv og for andre å lese koden ved en senere anledning. Kommentarer i Matlab starter med et *prosenttegn*(%) og alt fra prosenttegnet og ut linjen vil oppfattes som kommentar.

3.2.2 Matlab på Windows-maskiner

Det er ikke installert Matlab på de vanlige Windows-maskinene på terminalstuene ved UiO. Det er allikevel mulig å bruke Matlab hvis du fjernkobler deg til en Linux- eller Unix-maskin. Siden alt du gjør da må sendes over nett til maskinen du kobler deg til vil nok Matlab gå litt tregere. Det anbefales derfor at du finner deg en Linux- eller Unix-maskin hvis du skal gjøre mer enn bare noen små ting. En veiledning i selve oppkoblingen finnes i tillegg ??.

3.2.3 Matriser

I en matrise skal du separere radelementene med et *komma*(,) eller med et *mellomrom*, og radene med et *semikolon*(;). Hele matrisen skal rammes inn med *klammeparenteser*([]). Hvis du ikke ønsker at Matlab skal vise deg resultatet av en kommando du har gitt kan du avslutte linjen med et *semikolon*(;).

```
>> A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
```

```
A =
```

```
     1     2     3
     4     5     6
     7     8     9
```

Ved å bruke en *apostrof*(') kan vi transponere matrisen.

```
>> A'
```

```
ans =
```

```
     1     4     7
     2     5     8
     3     6     9
```

For å finne den inverse til en matrise har vi funksjonen `inv`.

```
>> B = [1 3 0; 2 0 4; 1 3 1]
```

```
B =
```

```
     1     3     0
     2     0     4
     1     3     1
```

Vi sjekker deretter at produktet av matrisene B og C gir enhetsmatrisen

```
>> C = inv(B)

C =

    2.0000    0.5000   -2.0000
   -0.3333   -0.1667    0.6667
   -1.0000         0    1.0000

>> B*C

ans =

     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

Funksjonen `diag` returnerer matrisens diagonal og `sum` summerer opp kolonnene.

```
>> diag(A)

ans =

     1
     5
     9

>> sum(A)

ans =

    12    15    18

>> sum(A')

ans =

     6    15    24
```

Elementet i rad i og kolonne j av A er $A(i,j)$.

```
>> A(2,1) + A(3,2)

ans =

    12
```

```
>> A(1,3) = 0
```

```
A =
```

```
    1    2    0
    4    5    6
    7    8    9
```

Kommandoen `size` returnerer antall rader og kolonner til en matrise.

```
>> size(A)
```

```
ans =
```

```
    3    3
```

Kommandoen `length` har en tilsvarende funksjon. Les mer om hva som skiller disse kommandoene ved å skrive `help size` og `help length` i Matlabs kommandovindu.

Det finnes flere Matlab-kommandoer som gjør det enkelt å generere matriser. Vi har sett at funksjonen `diag(A)` returnerer A s diagonal, men den kan også brukes til å bygge opp en matrise:

```
>> diag([1 2 3])
```

```
ans =
```

```
    1    0    0
    0    2    0
    0    0    3
```

Andre nyttige kommandoer som kan nevnes er `ones`, `zeros`, `rand` og `eye` som lager matriser med henholdsvis enere, nuller, tilfeldige tall mellom 0 og 1, og identitetsmatrisen. Det er mulig å skrive Matlab-kode veldig kompakt og effektivt, og med litt smart programmering kan ganske kompliserte matriser konstrueres med minimal kode. Med kommandoene nevnt her og *kolon-operatoren*, som vi skal se på i neste avsnitt, har vi allerede et kraftig verktøy for numeriske beregninger. Det er derfor lurt å kunne bruke disse funksjonene så godt som mulig. Vi har ikke anledning til å gå inn på alle bruksområdene til disse funksjonene her, men du kan lese mer om dem ved å bruke `help` (f.eks. `help diag`).

3.2.4 Kolon-operatoren

Kolon-operatoren(`:`) er en viktig del av Matlab. Den brukes til å generere vektorer og for å markere deler av en matrise.

```
>> -5:5 % Lager en vektor (tallrekke) fra -5 til 5 med intervall 1
```

```
ans =
```

```
-5    -4    -3    -2    -1    0    1    2    3    4    5

>> -15:3:15 % Lager en vektor fra -15 til 15 med intervall 3

ans =

-15    -12    -9    -6    -3    0    3    6    9    12    15

>> A = [1 2 3 4; 5 6 7 8; 9 10 11 12; 13 14 15 16]

A =

     1     2     3     4
     5     6     7     8
     9    10    11    12
    13    14    15    16

>> A(1:3,2:4) % Rad 1, 2 og 3, kolonne 2, 3 og 4

ans =

     2     3     4
     6     7     8
    10    11    12

>> A(2:3,:) % Rad 2 og 3, alle kolonnene

ans =

     5     6     7     8
     9    10    11    12
```

3.2.5 m-filer (styrefiler)

Isteden for å taste inn kommandoer i Matlab-vinduet kan vi samle kommandoer i en styrefil ved hjelp av en teksteditor og så eksekverere filen i Matlab. Filen må slutte på “.m” og kalles derfor en *m-fil*. Filen aktiviseres ved å skrive navnet på filen uten endelsen (“.m”) i kommandovinduet. Matlab har en egen teksteditor som kan brukes ved å gå inn på “File”-menyen og velge “New...M-file”. For at Matlab skal finne denne filen må Matlab kjøres fra samme mappe eller du kan endre Matlabs arbeidsmappe med kommandoen `cd`. Hvilken mappe du til en hver tid befinner deg i gir `pwd` deg svar på. Innholdet i arbeidsmappen kan du se med `dir`. Bruk `what` hvis du kun er interessert i hvilke m-filer mappen inneholder.

Det finnes to typer m-filer. Den enkleste typen består kun av Matlab-kommandoer og kalles for *scripts* (skrift). Den andre typen kalles *functions* og kan ta inn parametre

og returnere parametre etter behov. Her er et script som definerer en matrise A og skriver ut noen egenskaper til matrisen:

```
A = [1 3 0; 2 1 1]
length(A)
size(A)
diag(A)
sum(sum(A))
A'
```

Denne filen kan du kalle hva som helst, men det er lurt å sjekke at du ikke gir filen et navn som allerede er en kommando i Matlab. Under følger et eksempel på en function. Filen har navnet “tridiag.m”.

```
function A=tridiag(n)
% Konstruerer en n x n-matrise med -2 på
% diagonalen og 1 på de to subdiagonalene

if nargin ~= 1
    error('Du må gi matrisens dimensjon som en innparameter!');
end

A = -2*eye(n) + diag(ones(n-1,1),1) + diag(ones(n-1,1),-1);
```

Den første linjen i programmet forteller Matlab at dette er en funksjon som heter “tridiag” (dette skal være det samme som navnet på filen uten endelsen “.m”), tar en innparameter (n) og returnerer en variabel A . De to neste linjene er en kort beskrivelse av funksjonen. Denne hjelpeteksten er alltid lurt å ta med ettersom det er denne teksten som `help` bruker for å beskrive funksjonen. De neste tre linjene bruker Matlabs programmeringsspråk til å kontrollere at funksjonen blir eksekvert med n innparameter. Du kan lese mer om hvordan dette virker med `help lang`. I den første linjen av filen definerte vi returparameteren til å være en variabel A . Vi kaller derfor matrisen vi skal returnere for A i siste linje. Vi trenger ikke å eksplisitt fortelle Matlab at programmet nå skal slutte og returnere A ; det skjer automatisk etter at siste programlinje er blitt lest.

```
>> help tridiag

Konstruerer en n x n-matrise med -2 på
diagonalen og 1 på de to subdiagonalene

>> tridiag

??? Error using ==> tridiag
Du må gi matrisens dimensjon som en innparameter!

>> tridiag(5)
```



```
ans =
    -2     1     0     0     0
     1    -2     1     0     0
     0     1    -2     1     0
     0     0     1    -2     1
     0     0     0     1    -2
```

3.2.6 Enkel plotting i 2D

Kommandoen `plot` kan brukes til enkel plotting i to dimensjoner. La oss først plote funksjonen $y = x^3$ der x er definert over et område fra -2π til 2π :

```
x = -2*pi:pi/10:2*pi;
y = x.^3;
plot(x,y)
```

Her har vi valgt å diskretisere x -intervallet med steg på $\pi/10$. Da vil vektoren x (og dermed vektoren y) inneholde 41 elementer. Velges dette steget for stort blir grafen hakkete. Prøv f.eks. med et steg på $\pi/2$. *Hvorfor er det et "."-tegn i linje 2 i koden? Se seksjon 3.2.7.*

Vi kan også enkelt plote en kurve som er gitt ved en parametrisering. En sirkel med radius r kan uttrykkes ved $x(t) = r \cos t$, $y(t) = r \sin t$ der $0 \leq t < 2\pi$. La oss plote en sirkel med radius 3:

```
r = 3;
t = 0:pi/50:2*pi;
x = r*cos(t);
y = r*sin(t);
plot(x,y)
axis equal
```

Den siste linjen i koden over sørger for at en enhet langs x -aksen er like lang som en enhet langs y -aksen.

3.2.7 Punktum foran en operasjon

Noen tegn/operasjoner (f.eks. "*", "/" og "^") brukes til to forskjellige matematiske funksjoner. Når variablene disse operasjonene virker på er skalarer, vil den vanlige betydningen (multiplikasjon og divisjon) gjelde slik at f.eks. $3*2$ vil gi det forventede svaret 6. Hvis derimot variablene er enten vektorer eller matriser, vil operasjonene betegne de tilsvarende matriseoperasjonene. Lar vi \mathbf{a} og \mathbf{b} være to matriser vil $\mathbf{a*b}$ være matrisemultiplikasjonen av \mathbf{a} og \mathbf{b} . Ønsker vi derimot at hvert element i \mathbf{a} skal multipliseres med det tilsvarende element i \mathbf{b} kan dette utføres ved å tilføye et "." foran "*" operasjonen: $\mathbf{a.*b}$. I eksempelet over der vi ønsker å regne ut $y = x^3$, og vi allerede har definert en vektor med x -verdier, vil vi at hvert element i x skal opphøyres i tredje; vi ønsker ikke å bruke matrisemultiplikasjonen av x med seg selv to ganger. Merk at dersom du skal multiplisere eller dividere en vektor eller en matrise med en skalar behøver du ikke å bruke et "." foran operasjonen. Noen eksempler:

```
>> a = 1:4

a =

     1     2     3     4

>> 3*a

ans =

     3     6     9    12

>> a*a
??? Error using ==> *
Inner matrix dimensions must agree.

>> a*a'

ans =

    30

>> a'*a

ans =

     1     2     3     4
     2     4     6     8
     3     6     9    12
     4     8    12    16

>> a^2
??? Error using ==> ^
Matrix must be square.

>> a.^2

ans =

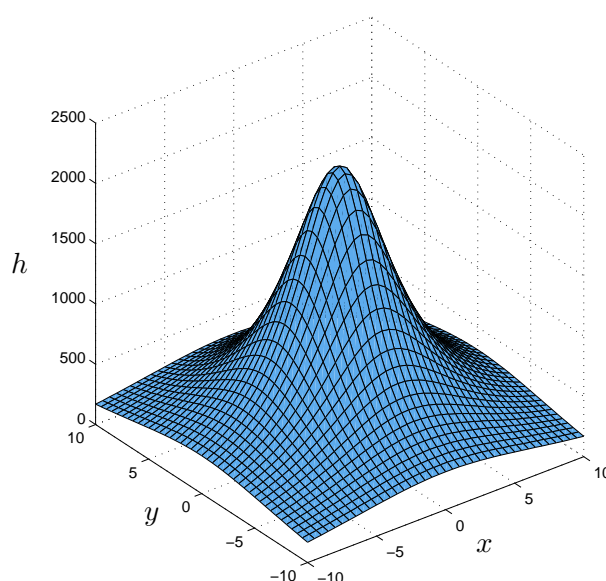
     1     4     9    16
```

3.3 Plotting av flater

Vi skal nå se på hvordan vi kan lage plottet av flaten i figur 3.1. Dette er den samme flaten som vi har studert på side 19 i kapittel 1 og er gitt matematisk ved formelen:

$$h = \frac{h_0}{1 + \frac{x^2+y^2}{R^2}}. \quad (3.1)$$

Formelen modellerer en isolert fjelltopp der h er høyden over havflaten, h_0 er høyden på toppen av fjellet og R er et mål for radius i fjellet. Konstantene h_0 og R er her satt til 2277 m og 4000 m.



Figur 3.1: En modell av fjelltoppen Berenberg på Jan Mayen.

Det anbefales at du først prøver ut de påfølgende kommandoene direkte i Matlabs kommandovindu for senere å samle dem i en m-fil. Fjern semikolonnet(;) fra slutten av linjene for å se resultatet av kommandoene, noe som er lurt når man skal lære seg nye ting. (Det er ikke alltid helt intuitivt hva f.eks. `meshgrid` returnerer hvis ikke man kjenner funksjonen godt.)

Det første vi skal gjøre er å definere de to konstantene h_0 og R . Vi ser av figuren at x - og y -aksen er oppgitt i km og h -aksen i meter. Vi definerer derfor h_0 i meter og R i km:

```
h0 = 2277;  
R = 4;
```

x - og y -aksen skal spenne over et område på 20×20 km med sentrum i origo. For å lage et passende grid med x - og y -verdier kan vi bruke kommandoen `meshgrid` som tar en eller to vektorer som parametere. Hvis x og y skal defineres over det samme intervallet

holder det å bruke en vektor, mens vi trenger to vektorer hvis x og y varierer over forskjellige intervaller. Vektorene vi bruker som innparametere kan vi lage ved å bruke kolon-operatoren:

```
[x,y] = meshgrid(-10:.5:10);
```

Størrelsen på gridet må tilpasses hvert eksempel. Her har vi brukt 41 punkter per akse, noe som gir en passende maskestørrelse samtidig som flaten ser glatt ut. Prøv `help meshgrid` for mer informasjon om denne funksjonen.

Vi er nå klare til å regne ut h som angitt i (3.1):

```
h = h0./(1+(x.^2+y.^2)./(R.^2));
```

Merk at her har vi brukt et “.” foran operasjonene “/” og “^”. Dette må vi gjøre fordi variablene x og y er definert ved hjelp av `meshgrid` og er derfor matriser (jfr. seksjon 3.2.7).

De to vanligste kommandoene for å plote flater i Matlab er `mesh` og `surf`. Forskjellen på dem er at `surf` fyller maskene mens `mesh` tegner kun maskenettet. Kommandoene brukes likt:

```
mesh(x,y,h)
surf(x,y,h)
```

For å se hvilke farger som representerer hvilke verdier skriv `colorbar`.

Både `mesh` og `surf` kan konfigureres med en fjerde og en femte parameter til kommandoen. Den fjerde angir hvilken opsjon vi ønsker å endre og den femte angir den ønskede verdien. Vi har valgt en blå overflate på figur 3.1. Denne opsjonen heter “FaceColor” og fargeverdien angis med en tre-elements RGB-vektor¹. I vårt eksempel har vi brukt:

```
surf(x,y,h,'FaceColor',[.36, .67, .93])
```

Til slutt kan vi pynte litt på figuren. Siden x - og y -aksen er definerte over samme intervall er det naturlig at aksene ser like lange ut også på figuren. Kommandoen `axis square` sørger for det. Denne kommandoen har en liknende funksjon som `axis equal` som vi har brukt før. Du kan lese mer om de forskjellige `axis`-kommandoene ved å skrive `help axis` i Matlabs kommandovindu. For å angi navn på aksene bruker vi

```
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('h')
```

Samler vi alle kommandoene i en m-fil blir den seende slik ut:

```
h0 = 2277; % Høyden av toppen av fjellet (m)
R = 4;    % Mål for radius av fjellet (km)

[x,y] = meshgrid(-10:.5:10);           % Grid for x- og y-verdiene (km)
```

¹Matlab har også noen ferdigdefinerte farger som “yellow”, “magenta”, “cyan”, “red”, “green”, “blue”, “white” og “black”

```

h = h0./(1+(x.^2+y.^2)./(R.^2));          % Beregn høyden h (m)
surf(x,y,h,'FaceColor',[.36, .67, .93]) % Plott overflaten (blå farge)

axis square % Sett aksestørrelsene like
xlabel('x') % Sett aksenavn
ylabel('y')
zlabel('h')

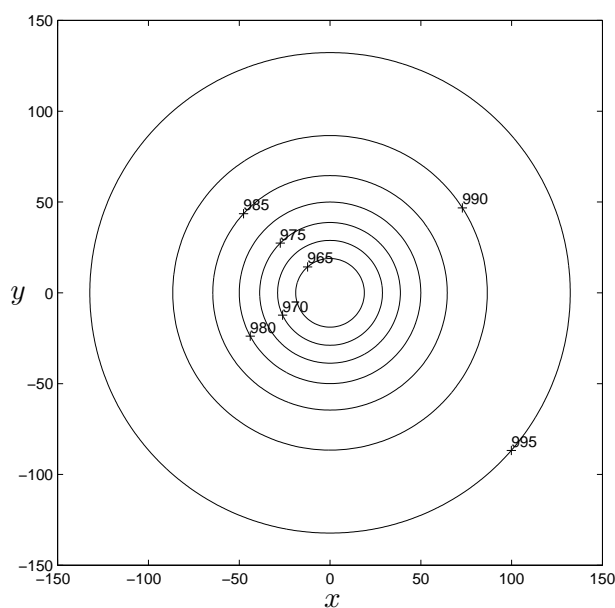
```

3.4 Plotting av konturlinjer

Vi skal ta for oss et nytt eksempel fra kapittel 1, side 19; lufttrykket ved havflaten i tilknytning til et stormsenter. Formelen vi skal bruke er gitt ved

$$p = p_0 - \frac{\Delta p}{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2}} \quad (3.2)$$

der p_0 er lufttrykket langt borte fra sentrum, Δp er trykkfallet inn mot sentrum og R er et mål for utstrekningen av lavtrykket. Konturlinjene vi skal plote er gjengitt i figur 3.2.



Figur 3.2: Konturlinjer for konstant trykk (isobarer) rundt et lavtrykkssentrum. Enhetene på aksene er kilometer.

Vi starter med konstantene som skal oppgis i km (R) og hPa (p_0 og Δp):

```

R = 50;
p0 = 1000;
dp = 40;

```

x - og y -aksen defineres over et område fra -150 til 150 km og p -verdiene regnes ut:

```
[x,y] = meshgrid(-150:1:150);
p = p0 - dp./(1+(x.^2+y.^2)./R.^2);
```

Konturlinjene kan nå plottes med kommandoen `contour`:

```
contour(x,y,p)
colorbar
```

For å plotte et valgfritt antall konturlinjer bruk `contour(x,y,p,n)` der n er antall linjer. Hvis vi kun er interessert i noen utvalgte trykkverdier (f.eks. 960, 970, 980 og 990) så kan vi gi verdiene som en vektor til `contour`:

```
v = [960 970 980 990];
contour(x,y,p,v)
```

eller enda enklere: `contour(x,y,p,[960 970 980 990])`.

Vil du bruke en annen fargeskala prøv `colormap(map)`². For å bruke samme farge på alle linjene bruk `contour(x,y,p,n,'b')` for blå, "r" for rød, "g" for grønn osv.

Med `colormap` og `colorbar` er det lett å se hvilke verdier linjene har, men på et svart/hvitt trykk har vi ikke den muligheten. Linjenes verdi må isteden skrives eksplisitt på hver linje og linjene bør ha en mørk farge. `contour` kan returnere to parametre med informasjon om konturlinjene som kan brukes av `clabel` til å skrive på verdiene i plottet. Hvis du lurer på hva disse parameterne inneholder kan du lese mer om dette med `help contour` og `help clabel`. I vårt tilfelle kan vi skrive (parameteren 'k' gir linjene svart farge):

```
[C,h] = contour(x,y,p,'k')
clabel(C,h)
```

For å plassere verdiene på figuren manuelt kan du skrive `clabel(C,'manual')`. Et eksempel på dette kan vi finne på figuren med høydekvoter på side 19 i kapittel 1.

En m-fil for å generere figur 3.2 kan nå se slik ut:

```
R = 50;      % Utstrekningen av lavtrykket (km)
p0 = 1000;  % Lufttrykket langt borte fra sentrum (hPa)
dp = 40;    % Trykkfallet inn mot sentrum (hPa)

[x,y] = meshgrid(-150:1:150);      % Grid for x- og y-verdiene (km)
p = p0 - dp./(1+(x.^2+y.^2)./R.^2); % Beregn trykket p (hPa)
[C,h] = contour(x,y,p,'k')         % Plott konturlinjene (svart farge)
clabel(C,h)                        % Plasser trykkverdiene (isobarene)

axis square % Sett aksestørrelsene like
xlabel('x') % Sett aksnavn
ylabel('y')
```

²`map` kan være "autumn", "bone", "colorcube", "cool", "copper", "flag", "gray", "hot", "hsv", "jet" (default), "lines", "pink", "prism", "spring", "summer", "white" eller "winter"

3.5 Plotting av vektorfelt og beregning av gradientvektor.

Et vektorfelt i kartesiske koordinater $\mathbf{v} = v_x(x, y)\mathbf{i} + v_y(x, y)\mathbf{j}$ kan plottes med

```
quiver(x,y,vx,vy,[faktor],[farge])
```

der `faktor` og `farge` er valgfrie opsjoner som endrer henholdsvis vektorenes lengde med en skaleringsfaktor og vektorenes farge. La oss ta et eksempel:

$$\mathbf{v} = (x^2 + 2y - \frac{1}{2}xy)\mathbf{i} - 3y\mathbf{j}.$$

Vi lar x og y variere mellom -5 og 5. Når vi skal definere et grid for x og y , må vi passe på å bruke et større intervallsteg enn vi vil bruke for overflateplott eller konturlinjer. Det blir fort veldig uryddig med for mange vektorer i en og samme figur.

```
[x,y] = meshgrid(-5:1:5);
vx = x.^2 + 2*y - .5*x.*y;
vy = -3*y;
quiver(x,y,vx,vy,1.5)
axis equal
```

Her har vi skalert lengden til alle vektorene med en faktor 1.5.

Hvis vi har definert et skalarfelt $F(x, y)$ over et område utspent av vektorene x og y i Matlab kan vi regne ut gradientvektoren til feltet med `gradient(F)`. Denne funksjonen returnerer de partielt deriverte ($\partial F/\partial x$ og $\partial F/\partial y$ i 2D) til feltet. Med disse for hånden kan vi plote vektorfeltet med `quiver`:

```
[dFx,dFy] = gradient(F);
quiver(x,y,dFx,dFy)
```

Vi skal videre presentere koden som er brukt for å lage figur 3.3 som er et plott av noen konturlinjer for h gitt ved (3.1) og gradientvektoren ∇h . Bortsett fra kommandoene `hold on` og `hold off`, som sørger for at konturlinjene og vektorfeltet blir plottet sammen og med samme akseegenskaper, skulle resten av koden nå være kjent.

```
h0 = 2277; % Høyden av toppen av fjellet (m)
R = 4;    % Mål for radius av fjellet (km)

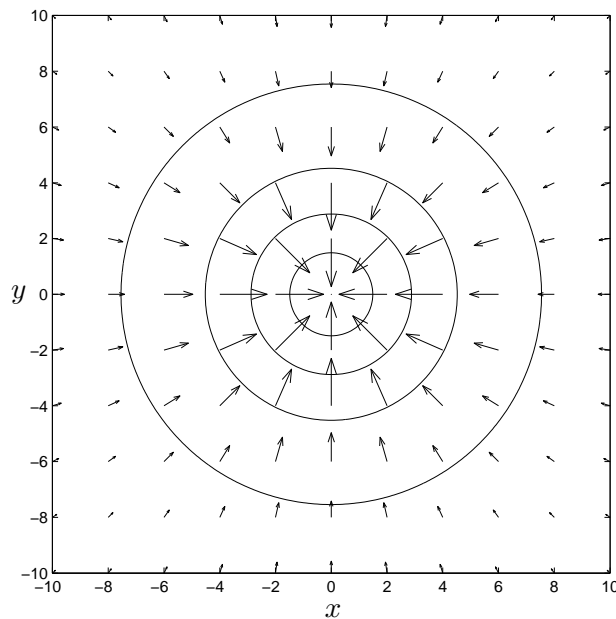
[x,y] = meshgrid(-10:1:10); % Grid for x- og y-verdiene (km)
h = h0./(1+(x.^2+y.^2)./(R.^2)); % Beregn høyden h (m)
contour(x,y,h,'b'); % Plott konturlinjene (blå farge)

[x,y] = meshgrid(-10:2:10); % Definer et grovere grid til vektorfeltet
h = h0./(1+(x.^2+y.^2)./(R.^2)); % Beregn høyden med det nye griddet
[dhx,dhy] = gradient(h); % Beregn gradientvektoren (dh/dx,dh/dy)
hold on % Behold konturlinjene og akse-egenskapene
quiver(x,y,dhx,dhy,.75, 'r') % Plott vektorfeltet (rød farge) og skalør
```

```

                                % vektorlengden med en faktor 0.75
hold off                        % Trenger ikke flere plott i denne
                                % figuren

axis square % Sett aksestørrelsene like
xlabel('x') % Sett aksnavn
ylabel('y')
```



Figur 3.3: Konturlinjer for h og gradientvektoren ∇h . Enhetene på aksene er kilometer.

3.6 Plotting av strømlinjer

I kapittel 4 møter vi strømfunksjonen ψ . Kjenner vi uttrykket for denne er det lett å plote strømlinjene. Siden strømfunksjonen er konstant langs en strømlinje vil strøm- linjene være konturlinjer for skalarfeltet ψ . Vi kan derfor definere et grid i x - og y - retning med `meshgrid`, regne ut diskrete verdier av strømfunksjonen, og til slutt bruke `contour` for å tegne opp strøm- linjene, akkurat på samme måte som vi plottet isobarene til trykkfeltet i seksjon 3.4.

3.7 Oppgaver

1. Gitt matrisene

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

- a) Legg sammen summene av diagonalene til A , B og C .
- b) Legg sammen summen av rad 1 og rad 2 for A .
- c) Generer en vektor v med elementene $-4\pi, -\frac{7\pi}{2}, -3\pi, \dots, 4\pi$.
- d) Bruk funksjonene `diag`, `ones` og `eye` til å generere 8×8 -matrisen:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2. m-filer:

- a) Skriv en m-fil som tar komponentene til en vektor $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ som innparametre og som returnerer vektorens lengde.
- b) Utvid programmet over slik at det kan motta en vektor med vilkårlig dimensjon.

3. Lag et plott av:

- a) Kurven $y = 4 \sin 2x$ der $x \in [-2\pi, 2\pi]$.
- b) Kurven $y = x^2 e^{\frac{1}{2}x}$ der $x \in [-10, 2]$.
- c) Kurven $x = t \cos t$, $y = t \sin t$ der $t \in [0, 8\pi]$.
- d) Flaten $z = \sin x \sin y$. Velg et x - og y -intervall slik at figuren viser to topper og to groper.
- e) Konturlinjene til funksjonen $z = \frac{\ln xy}{x^2 + y^2}$ på området $x, y \in [1, 5]$
- f) Vektorfeltene

- $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$
- $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} - v_y \mathbf{j}$
- $\mathbf{v} = v_y \mathbf{i} + v_x \mathbf{j}$
- $\mathbf{v} = v_y \mathbf{i} - v_x \mathbf{j}$

på området $x, y \in [-5, 5]$, der $v_x = \frac{x}{x^2 + y^2}$ og $v_y = \frac{y}{x^2 + y^2}$.

4. Et pass mellom to fjell kan modelleres med formelen

$$h = h_0 \left[1 + 5 \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right] \exp \left(1 - \left(\frac{x}{R} \right)^2 - \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right)$$

der h er høyden over havflaten og h_0 og R er konstanter. La det laveste punktet i passet være på 1000 m og velg $R = 1$ kilometer.

- Bruk Matlab til å lage en figur av fjellpasset over et område der $x \in [0, 2R]$ og $y \in [-2R, 2R]$. Velg selv en passende steglengde.
- La oss nå se på konturlinjene (høydekvotene) til figuren. Prøv først å la Matlab automatisk velge hvilke høydenivåer som skal plottes. Gir dette valget en god beskrivelse av den fysiske situasjonen? Prøv å plote flere høydenivåer samtidig. Hva kan vi gjøre hvis vi vil plote kun noen utvalgte høydenivåer vi er interessert i? Prøv f.eks. disse høydenivåene: 1001, 1011, 1021, ..., 1091.
- Regn ut gradientvektoren til skalarfeltet h og plott vektorfeltet sammen med konturlinjene for $h = 1001, 1011, 1021, \dots$ som gitt i oppgave b). Er det noen sammenheng mellom lengden på vektorene og avstanden mellom konturlinjene?

5. Vi skal i denne oppgaven se nærmere på rekkeutvikling (Taylorutvikling) for funksjoner av en variabel. Generelt kan en funksjon $f = f(x)$ tilnærmes i en omegn av $x = x_0$ med rekken:

$$f(x) \cong f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i \quad (3.3)$$

der $f^{(i)}(x_0)$ er den i 'te deriverte av funksjonen i punktet x_0 . Vi har her forutsatt at funksjonen er n ganger deriverbar. Vi sier at (3.3) er Taylor-approksimasjonen til f av n 'te orden. For $n = 1$ og $n = 2$ får vi henholdsvis den lineære og den kvadratiske approksimasjonen:

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

- Lag en funksjon `fakultet(n)` som returnerer $n!$ altså $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$. Denne funksjonen skal vi bruke senere i oppgaven.
- Videre i denne oppgaven skal vi se på $f(x) = \cos x$. Denne funksjonen har en fin egenskap; den er uendelig mange ganger deriverbar og de deriverte gjentas periodisk. Skriv en funksjon `funk(x,n)` som regner ut den n 'te deriverte av $f(x)$ (dvs. $f^{(n)}(x)$) for en gitt x . For $n = 0$ skal `funk` returnere funksjonsverdien $f(x)$.
- Vi har nå det vi trenger for å programmere rekken (3.3). Kall denne funksjonen `taylor1D(x,x0,n)` der x angir hvilket punkt $(x, f(x))$ vi vil approksimere, x_0 er punktet rekken skal approksimeres om og n er hvilken orden rekkeutviklingen skal ha. (Her får du bruk for både `fakultet` og `funk` fra oppgave a og b.)

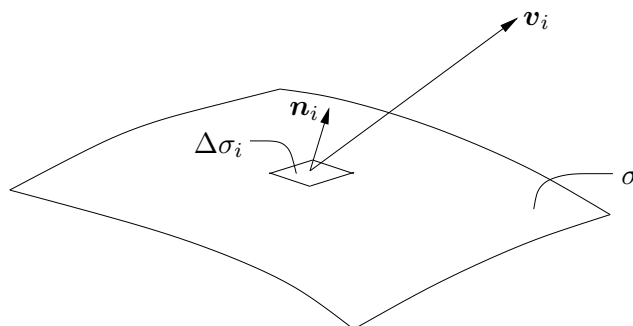
- d) Nå kan vi teste hvor nøyaktig denne rekkeutvilkingen er på området $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Plott først den “eksakte” grafen til $\cos x$. Både for den eksakte løsningen og for den approksimative skal vi bruke 51 jevnt fordelte x -verdier. Sett $x_0 = \pi/2$ og bruk `taylor1D` med $d = 1, 2, 3, 4$. Plott grafen for de forskjellige d -verdiene i samme figur som for den eksakte grafen. Kommenter resultatet. Hvorfor ser noen av plottene ut til å være identiske?
- e) Prøv å gjøre det samme for andre valg av x_0 . Hva skjer? Utvid så området til $x \in [-2\pi, 2\pi]$ og velg en passende x_0 . Kan vi si noe generelt om hvordan vi best kan velge x_0 ?

Kapittel 4

Vektorfluks og sirkulasjon, divergens, virvling, strømfunksjonen

4.1 Vektorfluks og sirkulasjon

I analyser av vektorfelt får vi ofte bruk for å beregne strømmen eller fluksen gjennom en flate σ . Vi betrakter først et lite flatelement $\Delta\sigma_i$ som ligger i flaten. Flatenormalen



Figur 4.1: Volumstrøm gjennom flatelementet $\Delta\sigma_i$.

til dette elementet betegner vi \mathbf{n}_i , og strømhastigheten på flatelementet er \mathbf{v}_i . Volumstrømmen gjennom flatelementet per tidsenhet er

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta\sigma_i$$

med enhet m^3/s . Total volumstrøm gjennom hele flaten σ får vi ved å summere over alle elementene som flaten består av

$$Q = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta\sigma_i \quad (4.1)$$

hvor N er det totale antallet flatelementer som flaten er delt inn i. Lar vi antallet av flatelementer $N \rightarrow \infty$ samtidig med at arealet av hvert flatelement $\Delta\sigma_i \rightarrow 0$, vil summen i likning (4.1) gå over til et integral

$$Q = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta\sigma_i \quad \rightarrow \quad \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Integralet

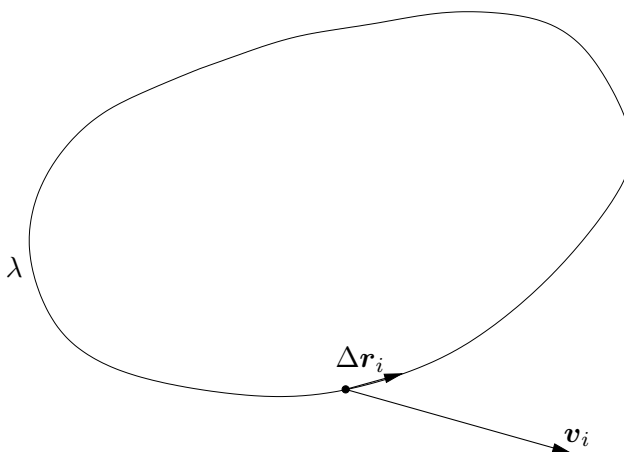
$$Q = \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (4.2)$$

kalles *vektorfluksen* av vektoren \mathbf{v} gjennom flaten σ . I dette tilfellet, hvor \mathbf{v} er strømhastigheten, er Q *volumstrømmen* per tidsenhet gjennom flaten. Integralet er et *flateintegral*, og vi skal etterhvert lære mer om hvordan vi behandler integraler av denne typen.

En annen viktig størrelse i analysen av vektorfelt er sirkulasjonen av en vektor om en lukket kurve λ . La $\Delta\mathbf{r}_i$ betegne et vektorielt buelement langs kurven λ . Strømhastigheten på buelementet betegnes \mathbf{v}_i . *Sirkulasjonen* av vektoren \mathbf{v} omkring kurven λ defineres

$$C = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \Delta\mathbf{r}_i$$

hvor N er antall buelementer som kurven deles inn i.



Figur 4.2: Sirkulasjonen av vektoren \mathbf{v} om kurven λ .

Dersom vi lar $N \rightarrow \infty$ samtidig med at $\Delta\mathbf{r}_i \rightarrow 0$, vil summen ovenfor gå over til et integral

$$C = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \Delta\mathbf{r}_i \quad \rightarrow \quad \oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

Integralet

$$\oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.3)$$

er et linje- eller kurveintegral som vi etterhvert skal lære å behandle. Integrasjons- symbolet \oint betegner at integrasjonen skal utføres omkring en lukket kurve λ i positiv omløpsretning dvs. mot urviseren.

4.2 Beregning av vektorfluks og sirkulasjon for todimensjonal strøm

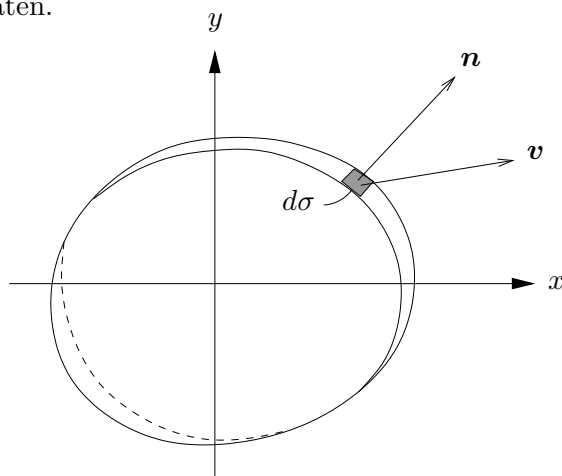
Vi skal her i første omgang begrense oss til to-dimensjonale plane vektorfelt hvor strømfeltet er gitt ved

$$\mathbf{v} = v_x(x, y)\mathbf{i} + v_y(x, y)\mathbf{j}. \quad (4.4)$$

Vi kan definere *volumstrømmen* eller *volumfluksen* ut gjennom sideflaten av en skive i xy -planet med flateintegralet

$$Q = \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (4.5)$$

Her er \mathbf{n} normalvektor for et flatelement $d\sigma$ i sidekanten og σ er flatearealet av hele sidekanten (se figur 4.3). For en lukket flate er det vanlig at normalvektoren regnes positiv utfra volumet. Med fortegnvalget i (4.5) vil Q være positiv når strømmen \mathbf{v} er rettet i samme retning som \mathbf{n} dvs. ut gjennom flaten og negativ når strømmen er rettet inn gjennom flaten.

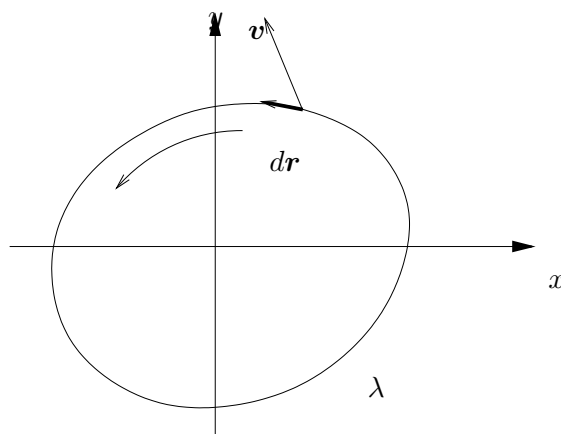


Figur 4.3: Volumstrømmen (vektorfluksen) gjennom sidekanten av en tynn skive.

La $d\mathbf{r}$ betegne et buelement langs sidekanten av skiven (se figur 4.4). I kartesiske koordinater kan vi dekomponere $d\mathbf{r}$ til $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ der dx og dy er små lengdeenheter i henholdsvis x - og y -retning. Sirkulasjonen er da definert ved linjeintegralet

$$C = \oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.6)$$

langs sidekanten av skiven.



Figur 4.4: Sirkulasjonen av vektoren \mathbf{v} langs sidekanten av skiven. Positiv omløpsretning regnes mot urviseren (motsols).

4.3 Divergensen til et vektorfelt

Vi skal se på egenskapene for det to-dimensjonale vektorfeltet (4.4) omkring et vilkårlig punkt i feltet som vi velger som origo i koordinatsystemet. Ved Taylorutvikling kan vi da i første orden approksimere funksjonene $v_x(x, y)$ og $v_y(x, y)$ i en omegn av origo ved

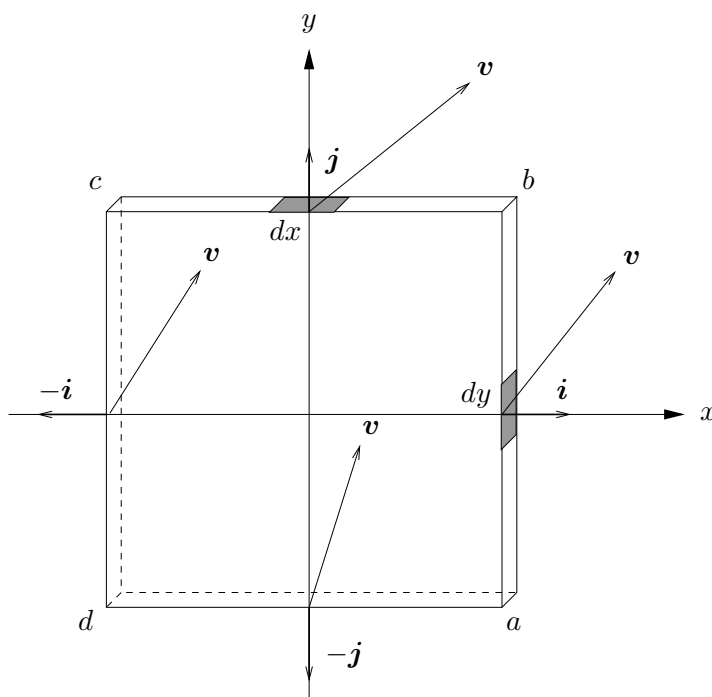
$$\begin{aligned} v_x(x, y) &\cong (v_x)_0 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_0 y \\ v_y(x, y) &\cong (v_y)_0 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_0 y \end{aligned} \quad (4.7)$$

hvor indekset 0 betegner verdien av funksjonen og dens deriverte i origo.

Vi skal nå beregne volumstrømmen gjennom sidekantflaten av en liten tynn rektangulær skive med sidekanter Δx og Δy henholdsvis parallell med x - og y -aksen og med sentrum av skiven i origo (figur 4.5). Tykkelsen av skiven er Δz og hele arealet av sidekantflatene er $\Delta\sigma = 2(\Delta x + \Delta y)\Delta z$. Flatenormalen på sidekantene ab og dc er henholdsvis $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ og $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$, og på sidekantene cb og da er flatenormalen henholdsvis $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ og $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$. Volumstrømmen ΔQ er gitt ved flateintegralet (4.5) som kan deles i fire delintegraler for hver av de fire sidekantene:

$$\Delta Q = \int_{\Delta\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \left(\int_{ab} v_x dy - \int_{dc} v_x dy + \int_{cb} v_y dx - \int_{da} v_y dx \right) \Delta z.$$

hvor Δz angir bredden på sidekanten. De fire delintegralene regnes ut hver for seg



Figur 4.5: Beregning av volumstrømmen gjennom sidekantflaten av en tynn rektangulær skive med sentrum i origo og med sidekanter Δx og Δy og tykkelse Δz .

$$\begin{aligned}
 \int_{ab} v_x dy &= \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{+\frac{\Delta y}{2}} v_x \left(x = \frac{\Delta x}{2}, y \right) dy \cong \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{+\frac{\Delta y}{2}} \left[(v_x)_0 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_0 \frac{\Delta x}{2} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_0 y \right] dy \\
 &= (v_x)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_0 \frac{\Delta x}{2} \Delta y \\
 \int_{dc} v_x dy &= \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} v_x \left(x = -\frac{\Delta x}{2}, y \right) dy \cong \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} \left[(v_x)_0 - \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_0 \frac{\Delta x}{2} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_0 y \right] dy \\
 &= (v_x)_0 \Delta y - \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_0 \frac{\Delta x}{2} \Delta y \\
 \int_{cb} v_y dx &= \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} v_y \left(x, y = \frac{\Delta y}{2} \right) dx \cong \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \left[(v_y)_0 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_0 x + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)_0 \frac{\Delta y}{2} \right] dx \\
 &= (v_y)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)_0 \frac{\Delta y}{2} \Delta x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{da} v_y dx &= \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} v_y \left(x, y = -\frac{\Delta y}{2} \right) dx \cong \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} \left[(v_y)_0 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_0 x - \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)_0 \frac{\Delta y}{2} \right] dx \\ &= (v_y)_0 \Delta x - \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)_0 \frac{\Delta y}{2} \Delta x. \end{aligned}$$

Setter man nå inn i uttrykket for ΔQ får man

$$\Delta Q = \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_0 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)_0 \right] \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Volumstrømmen ut av den rektangulære skiven per arealenhet er

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right]. \quad (4.8)$$

Siden dette må gjelde for et vilkårlig punkt i feltet har vi her sløyet indekset 0. Størrelsen innenfor klammeparantesen på høyre siden av denne likningen kalles *divergensen* til vektoren \mathbf{v} og vi bruker følgende symbol

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}. \quad (4.9)$$

Likning 4.8 kan nå skrives

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) \Delta \tau = \int_{\Delta \sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (4.10)$$

hvor $\Delta \tau = \Delta x \Delta y \Delta z$ er volumet av skiven.

For en tre-dimensjonal vektor $\mathbf{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$ hvor vektorkomponentene er funksjoner av romkoordinater x, y og z er divergensen til vektoren \mathbf{A} definert ved

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (4.11)$$

Ved en tilsvarende beregning av fluksen av vektoren \mathbf{A} gjennom sideflatene i en terning, som den vi nettopp har gjennomført for en to-dimensjonal vektor, kommer en frem til dette uttrykket for divergensen til en tre-dimensjonal vektor. For en terning med sidekanter er $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, volum $\Delta \tau$ og overflate $\Delta \sigma$ gjelder, på tilsvarende måte som i det to-dimensjonale tilfellet, likning 4.10 for divergensen til en tre-dimensjonal vektor \mathbf{v} . For et volumelement av vilkårlig form vil en tilsvarende likning gjelde.

Uttrykkene for divergensen ovenfor gjelder bare for kartesiske koordinater, i polarkoordinatsystemer får uttrykket en litt annerledes form som vi skal komme tilbake til senere.

Ved utledning av likning 4.8 har vi beregnet volumstrømmen på grunnlag av en rekkeutvikling av strømfeltet (4.7) hvor bare leddene med lineær variasjon (førsteordens) er tatt med. Dersom vi tok med andreordensleddene i rekkeutviklingen, dvs. kvadratiske ledd i x og y samt produktledd av formen xy , ville vi få tilleggsledd på høyre side i (4.8) som vil avhenge av Δx og Δy . Når Δx og Δy går mot null ville tilleggsleddene bli små og i grenseovergangen vil vi stå igjen med samme uttrykk for divergensen som vi har funnet her. For enkelhetsskyld har vi derfor gjennomført beregningen av volumstrømmen når bare førsteordensleddene i strømfeltet er tatt med.

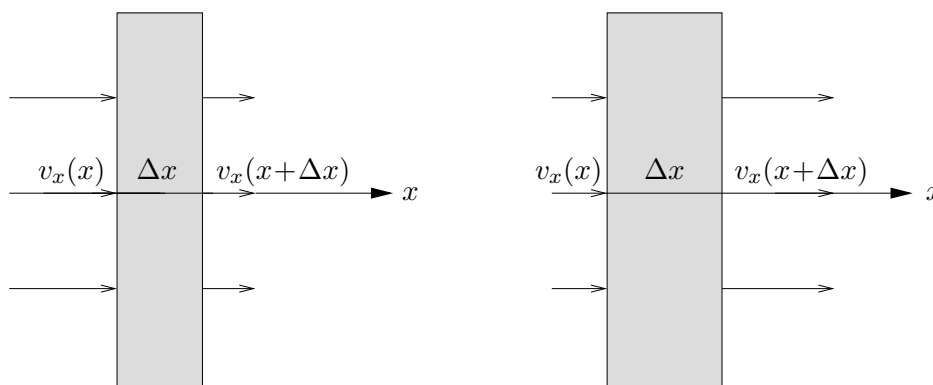
Ved å omformen av (4.10) får en et uttrykk som kan brukes som generell koordinatuavhengig definisjonslikning for divergensen.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\Delta\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (4.12)$$

når $\Delta\sigma \rightarrow 0$ og $\Delta\tau \rightarrow 0$

4.3.1 Fysikalsk tolkning av divergensen til et vektorfelt

Ved utledningen av uttrykket for divergensen til et vektorfelt har vi knyttet det til volumstrømmen eller vektorfluksen. Divergensen til strømvektoren \mathbf{v} er en skalar størrelse og den uttrykker hvordan volumstrømmen er i feltet. Dersom $\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$ er det en netto utstrømning i nærheten av punktet og med $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$ er det en netto innstrømning mot punktet hvor divergensen er beregnet. Vi sier at det henholdsvis er *ekspansjon* eller *kontraksjon* (konvergens) i feltet avhengig av om $\nabla \cdot \mathbf{v}$ er positiv eller negativ. For et en-dimensjonalt strømfelt $\mathbf{v} = v_x(x) \mathbf{i}$ kan dette illustreres ved figur 4.6.



Figur 4.6: Til venstre: kontraksjon $v_x(x) > v_x(x + \Delta x)$, $\frac{\partial v_x}{\partial x} < 0$ og $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$. Til høyre: ekspansjon $v_x(x) < v_x(x + \Delta x)$, $\frac{\partial v_x}{\partial x} > 0$ og $\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$.

Divergensen til et vektorfelt er en viktig størrelse som ofte dukker opp i mange forbindelser ved analyse av vektorfelter.

4.4 Virvlingen til vektorfeltet

Vi skal først beregne sirkulasjonen (4.6) av vektorfeltet \mathbf{v} gitt ved (4.4) og rekkeutviklingen (4.7) omkring rektanlet i figur 4.5. Linjeintegralet deles i fire deler tilsvarende sidekantene

$$\Delta C = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_b^c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_c^d \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_d^a \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

Langs sidekanten ab er $d\mathbf{r} = dy\mathbf{j}$ og vi får at

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{+\frac{\Delta y}{2}} v_y \left(x = \frac{\Delta x}{2}, y \right) dy \cong \int_{-\frac{\Delta y}{2}}^{+\frac{\Delta y}{2}} \left[(v_y)_0 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_0 \frac{\Delta x}{2} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)_0 y \right] dy \\ &= (v_y)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_0 \frac{\Delta x}{2} \Delta y. \end{aligned}$$

Langs sidekanten bc er $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i}$ og

$$\begin{aligned} \int_b^c \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{-\frac{\Delta x}{2}} v_x \left(x, y = \frac{\Delta y}{2} \right) dx \cong \int_{\frac{\Delta x}{2}}^{-\frac{\Delta x}{2}} \left[(v_x)_0 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_0 x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_0 \frac{\Delta y}{2} \right] dx \\ &= -(v_x)_0 \Delta x - \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_0 \frac{\Delta y}{2} \Delta x. \end{aligned}$$

På tilsvarende måte finner vi:

$$\begin{aligned} \int_c^d \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &\cong -(v_y)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_0 \frac{\Delta x}{2} \Delta y \\ \int_d^a \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &\cong (v_x)_0 \Delta x - \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_0 \frac{\Delta y}{2} \Delta x. \end{aligned}$$

Derved får vi følgende uttrykk for sirkulasjonen av vektoren \mathbf{v} omkring rektanlet

$$\Delta C = \left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_0 - \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_0 \right] \Delta x \Delta y \quad (4.13)$$

eller at sirkulasjonen per arealenheter er

$$\frac{\Delta C}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Her er indekset 0 som betegner derivasjon i origo sløyfet fordi beregningene må gjelde for et vilkårlig punkt i feltet. Uttrykket på høyre side i likningen ovenfor representerer

virvlingen til vektorfeltet. Virvlingen er en vektor som betegnes $\nabla \times \mathbf{v}$ og kan beregnes ved en determinanter. I det to-dimensjonale tilfellet er

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (4.14)$$

Beregningen av sirkulasjonen omkring rektanglet viser altså at sirkulasjon per areal-enhet er lik virvlingens komponent i retning normalt på rektanglets plan. Vi kan derfor skrive likning (4.13) som en vektorlikning

$$\oint_{\Delta\lambda_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \Delta\sigma_i$$

hvor $\Delta\sigma_i = \Delta x \Delta y$ og $\Delta\lambda_i$ er omkretsen av rektanglet.

For en vektor \mathbf{A} i et tre-dimensjonalt rom er virvlingen i kartesiske koordinater definert ved

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (4.15)$$

4.4.1 Fysikalsk tolkning av virvlingsvektoren

Som et eksempel kan vi beregne virvlingen for vektorfeltet $\mathbf{v} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$, og finner at $\nabla \times \mathbf{v} = 2\omega \mathbf{k}$. Siden dette feltet representerer en rotasjon med vinkelhastighet ω (se avsnitt 2.4.2) viser dette at virvlingen også kan knyttes til rotasjonen i feltet. Vinkelhastigheten ω er halvparten av virvlingen. I det generelle tre dimensjonale tilfellet kan det vises at vinkelhastighetsvektoren er

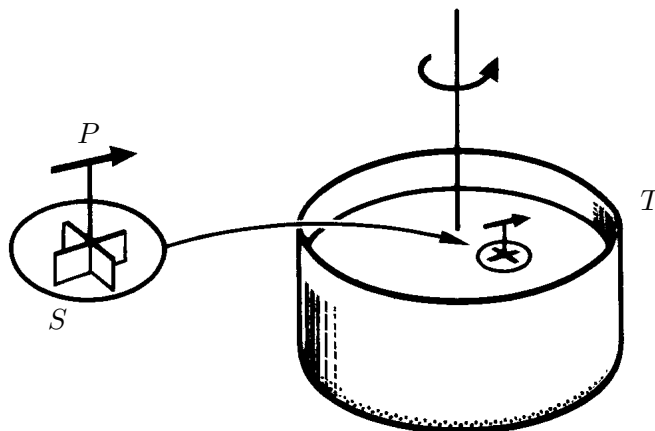
$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}.$$

Man kan benytte dette til å lage en enkel innretning som angir virvlingen. Det består av en liten skovel, og til skovelens akse er det montert en pil som vist på figur 4.7. Innretningen er laget slik at den kan flyte med skovelen neddykket og aksene i vertikal retning langs overflaten i den væsken man vil måle virvlingen. Setter man for eksempel skovelen i et sirkulært kar som er fylt med væske og karet roterer med konstant vinkelhastighet ω om symmetriaksen, så vil også pila rotere med vinkelhastighet ω . Hastighetsfeltet i væsken er i dette tilfellet med god tilnærming beskrevet med feltet behandlet i eksemplet ovenfor.

4.5 Divergensfrie og virvelfrie felt

Vektorfelter \mathbf{v} som er divergensfrie eller virvelfrie spiller en viktig rolle i mange forbindelser i fluidmekanikk og fysikk. Vi skal behandle slike felter mer inngående i kapittel 9. Her skal vi nøye oss med å vise at et felt som kan skrives som gradienten til en skalarfunksjon

$$\mathbf{v} = \nabla \beta \quad (4.16)$$



Figur 4.7: En enkel innretning i form av et skovelkors (S) og en pilfløy (P) som kan flyte i væsken med pilaksen vertikalt. Plassert i en tank T hvor væsken roterer vil skovelkorset trekkes med i rotasjonen og pilens dreining vil vise virvlingen i væsken!

automatisk er virvelfritt. Dette følger av at

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \nabla \beta \equiv 0.$$

Videre vil et felt \mathbf{v} som kan uttrykkes som virvlingen til et annet vektorfelt \mathbf{A}

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{4.17}$$

automatisk være divergensfritt fordi:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0.$$

Dette ser vi ved å bruke definisjonene av divergens og virvling. I likning (4.16) sier vi at β er et *skalarpotensial* eller bare et potensial for vektoren \mathbf{v} . I likning (4.17) sier vi at \mathbf{A} er et *vektorpotensial* for \mathbf{v} .

Om divergensfrie felter brukes ofte også betegnelsen *solenoidfelt* og om virvelfrie felt betegnelsen *irrotasjonale felt*.

4.6 Strømfunksjonen for to-dimensjonal divergensfri strøm

For et to-dimensjonalt divergensfritt strømfelt gitt ved $\mathbf{v} = v_x(x, y)\mathbf{i} + v_y(x, y)\mathbf{j}$ kan en innføre en *strømfunksjon* $\psi = \psi(x, y)$ slik at

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y &= \frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Ved innsetning ser en at ved dette valget er

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Vi har tidligere vist at en strømlinje i feltet er gitt ved (2.8)

$$v_y dx - v_x dy = 0.$$

Setter vi inn for v_x og v_y fra (4.18) får vi at tilveksten i strømfunksjonen er

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

langs en strømlinje. Det betyr at tilveksten i strømfunksjonen er null langs en strømlinje. Strømfunksjonen må derfor være konstant langs en strømlinje:

$$\psi(x, y) = \psi_0. \quad (4.19)$$

Dersom strømfunksjon er kjent kan man bruke (4.19) til å finne strømlinjene enten ved at man analytisk finner $y = y(x)$ eller ved at man numerisk finner samhørende verdier for x og y som passer i likningen. Dersom på den andre siden strømkomponentene v_x og v_y er kjent kan man finne strømfunksjonen fra (4.18) ved å integrere. Vi skal senere i avsnitt 6.7 se at strømfunksjonen også kan brukes til å beregne volumstrømmen i feltet.

På tilsvarende måte kan man finne feltlinjer for et hvilket som helst annet to-dimensjonalt vektorfelt. Dersom vektoren $\mathbf{H} = \{H_x, H_y\}$ betegner et divergensfritt felt vil feltlinjene for dette feltet være bestemt av *feltfunksjonen* ψ som kan finnes fra

$$H_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$H_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Med funksjonen ψ kan det i dette tilfelle innføres et vektorpotensial $\mathbf{A} = -\psi \mathbf{k}$ fordi relasjonene ovenfor kan uttrykkes ved en vektorlikning

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla \times (\mathbf{k}\psi).$$

4.6.1 Eksempel på hvordan en kan finne strømfunksjonen

Et eksempel vil illustrere hvordan man finner strømfunksjonen når strømvektor er kjent. La strømkomponentene være gitt ved

$$\mathbf{v} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j} \quad (4.20)$$

hvor ω er en konstant. Da kan strømfunksjonen finnes fra (4.18) som gir

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \omega y$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \omega x.$$

Integrerer vi første likning med hensyn på y fåes

$$\psi = \frac{1}{2}\omega y^2 + f_1(x)$$

hvor $f_1(x)$ er en vilkårlig funksjon av x . Integrerer vi den andre likningen med hensyn på x fåes

$$\psi = \frac{1}{2}\omega x^2 + f_2(y)$$

hvor $f_2(y)$ er en vilkårlig funksjon av y . Skal disse to uttrykkene for ψ gi identisk resultat må vi velge

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\omega x^2, \quad f_2(y) = \frac{1}{2}\omega y^2.$$

Derved blir strømfunksjonen

$$\psi = \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2).$$

Strømlinjene finnes ved å sette $\psi = \psi_0$ som gir

$$x^2 + y^2 = \frac{2\psi_0}{\omega} = 2C$$

altså sirkler med sentrum i origo. Dette samsvarer med uttrykket for strømlinjene som vi fant i kapittel 2 for det samme feltet. Her har vi funnet strømlinjene ved først å finne strømfunksjonen. Dersom strømfunksjonen ikke eksisterer kan vi finne strømlinjene ved å bruke likning 2.8.

4.7 Noen regneregler for ∇ -operatoren

Som fellesbetegnelse for gradient, divergens og virvling brukes ofte betegnelsen ∇ -operatorer fordi disse størrelsene er kombinasjoner av differensialoperasjoner. Tilsvarende de kjente regnereglene for derivasjon av sum, produkt og brøker kan det også formuleres regneregler for ∇ -operasjoner. La κ og β betegne to skalarstørrelser og \mathbf{A} et vilkårlig vektorfelt. Ved å benytte definisjonen av gradientvektoren

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\mathbf{k}$$

kan det vises at

$$\nabla(\kappa + \beta) = \nabla\kappa + \nabla\beta \tag{4.21}$$

$$\nabla(\kappa\beta) = \kappa\nabla\beta + \beta\nabla\kappa. \tag{4.22}$$

Likeledes at

$$\nabla\left(\frac{1}{\beta}\right) = -\frac{1}{\beta^2}\nabla\beta. \tag{4.23}$$

Videre kan en vise at

$$\nabla \cdot (\kappa \mathbf{A}) = \nabla \kappa \cdot \mathbf{A} + \kappa \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (4.24)$$

$$\nabla \times (\kappa \mathbf{A}) = \nabla \kappa \times \mathbf{A} + \kappa \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.25)$$

I tillegg til relasjonene (4.21)–(4.25) finnes det en rekke andre utviklingsformler for ∇ -operatoren som ofte kommer til anvendelse. Se for eksempel *Rottmann (1995)*.

I noen lærebøker vil man finne andre symboler for divergens og virvling enn hva vi har brukt her. Eksempelvis brukes ofte $\text{div } \mathbf{A}$ for divergens og $\text{rot } \mathbf{A}$ eller $\text{curl } \mathbf{A}$ for virvlingen.

4.8 ∇ -operatoren som en vektor

Det kan ofte være nyttig å tenke på ∇ -operatoren som en symbolsk vektor. Vi skal nøye oss med å se på kartesiske koordinater her, men en tilsvarende utledning kan gjøres for andre koordinatsystemer. I tre dimensjoner kan vi symbolsk skrive ∇ som en vektoroperator

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Gradientvektoren, divergens og virvling kan med denne definisjonen uttrykkes med vanlige vektoroperasjoner.

Anvender vi ∇ -operatoren på en skalarfunksjon β får vi:

$$\nabla \beta = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \beta = \frac{\partial \beta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \mathbf{k}$$

som er identisk med definisjonen av gradientvektoren.

Skalarproduktet av vektoroperatoren ∇ og et vektorfelt $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ kan regnes ut slik

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Dette kjenner vi igjen som divergensen til vektorfeltet \mathbf{A} .

Virvlingen til vektorfeltet \mathbf{A} kan vi nå regne ut ved å ta kryssproduktet av ∇ -operatoren og vektorfeltet

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

når vi bruker $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ osv. Svaret blir altså det samme som ved utregning av determinanten (4.15) side 69.

4.9 Oppgaver

1. Finn divergensen og virvling til vektorfeltene:

a) $\mathbf{v} = xy^2z^3\mathbf{i} + xy^2z^3\mathbf{j} + xy^2z^3\mathbf{k}$

b) $\mathbf{v} = e^{yz}\mathbf{i} + e^{xz}\mathbf{j} + e^{xy}\mathbf{k}$

c) $\mathbf{v} = e^{x^2}\mathbf{i} + \sin(xy)\mathbf{j} - \cos(z^2)\mathbf{k}$

d) $\mathbf{v} = (x + y + z)^2\mathbf{i} + \frac{xy}{z}\mathbf{k}$

2. Vi antar at vindfeltet i atmosfæren nær bakken kan beskrives ved en vindvektor $\mathbf{v} = v_x(z)\mathbf{i}$ hvor z -aksen er rettet vertikalt oppover fra bakken ($z = 0$) og x -aksen er horisontalt (flatt terreng). Skisser vindprofilen for $0 \leq z \leq h$ og beregn divergens og virvling til feltet når:

a) $v_x(z) = U_0 \frac{z^2}{h^2}$

b) $v_x(z) = U_0 \ln\left(\frac{z+h}{h}\right)$

hvor U_0 og h er konstanter. Finn strømfunksjonen i de to tilfellene. Skisser strømlinjene og bestem volumstrømmen gjennom et vertikalt snitt fra bakken opp til $z = h$. Vis at volumstrømmen er lik forskjellen i strømfunksjonens verdi mellom bakken og $z = h$.

3. Gitt et to-dimensjonalt strømfelt $\mathbf{v} = ax^2\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}$. Bestem $v(x, y)$ slik at feltet blir divergensfritt og finn strømfunksjonen. Vi begrenser oss til tilfellet $v(0, 0) = 0$. Skisser strømlinjene. Hint: Begynn med strømlinjene gjennom origo.

4. Regn ut volumstrømmen gjennom sidekantene av et rektangel med sentrum i origo og med sideflater Δx og Δy (se figur 4.5) for vektorfeltet: $\mathbf{v} = 3x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Kontroller resultatet ved å beregne $\nabla \cdot \mathbf{v}$. Hvorfor eksisterer det ikke en strømfunksjon i dette tilfellet? Finn likningen for strømlinjene og skisser disse.

5. Et to-dimensjonalt strømfelt i xy -planet er gitt ved $\mathbf{v} = ax\mathbf{i}$ hvor a er en konstant og \mathbf{i} er enhetsvektoren rettet langs x -aksen.

a) Beregn divergensen $\nabla \cdot \mathbf{v}$ til vektorfeltet.

b) Vis at volumstrømmen (fluksen) gjennom en rektangulær skive med sidekanter Δx og Δy i xy -planet og tykkelse 1 er $\Delta Q = a\Delta x\Delta y \cdot 1$. Sentrum av skiva er i origo.

c) Finn relasjonen mellom volumstrømmen og divergensen til vektorfeltet.

6. Et to-dimensjonalt strømfelt i xy -planet er gitt ved $\mathbf{v} = -ay\mathbf{i} + ax\mathbf{j}$ hvor a er en konstant og \mathbf{i} , \mathbf{j} er henholdsvis enhetsvektorene rettet langs x - og y -aksen.
- Beregn virvlingen $\nabla \times \mathbf{v}$ til vektorfeltet.
 - Vis at sirkulasjonen omkring et rektangel med sidekanter Δx og Δy i xy -planet og sentrum i origo er $\Delta C = 2a\Delta x\Delta y$.
 - Finn relasjonen mellom sirkulasjonen og virvlingen til vektorfeltet.
7. Et to-dimensjonalt strømfelt i xy -planet er gitt ved $\mathbf{v} = xy\mathbf{i} + v_y(x, y)\mathbf{j}$ hvor \mathbf{i} , \mathbf{j} er henholdsvis enhetsvektorene rettet langs x - og y -aksen og strømkomponenten $v_y = v_y(x, y)$ er funksjon av x og y .
- Bestem $v_y(x, y)$ slik at feltet blir divergensfritt og virvelfritt.
 - Finn strømfunksjonen for feltet og skisser strømlinjene.
8. Gitt en vilkårlig gradientvektor $\nabla\beta$. Vis at $\nabla \times \nabla\beta = 0$.
9. Bruk Matlab til å plote strømlinjene til vektorfeltene gitt ved følgende strømfunksjoner:
- $\psi(x, y) = xy$ på området $x, y \in [-5, 5]$.
 - $\psi(x, y) = 2 \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ på området $x, y \in [-5, 5]$.
 - $\psi(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ på området $x, y \in [-6, 6]$. Plott bare strømlinjene $\psi = -1, -.5, -.35, -.2, 0, .2, .35, .5, 1$.

Strømfunksjonene i denne oppgaven tilsvarer potensialfeltene *stagnasjonsstrøm*, *punktvirvelfeltet* og *dipolfeltet*. Vi skal stifte nærmere bekjentskap med disse og andre potensialfelt i kapittel 9.

Kapittel 5

En praktisk anvendelse av ∇ -operatorene i meteorologi

5.1 Innledning

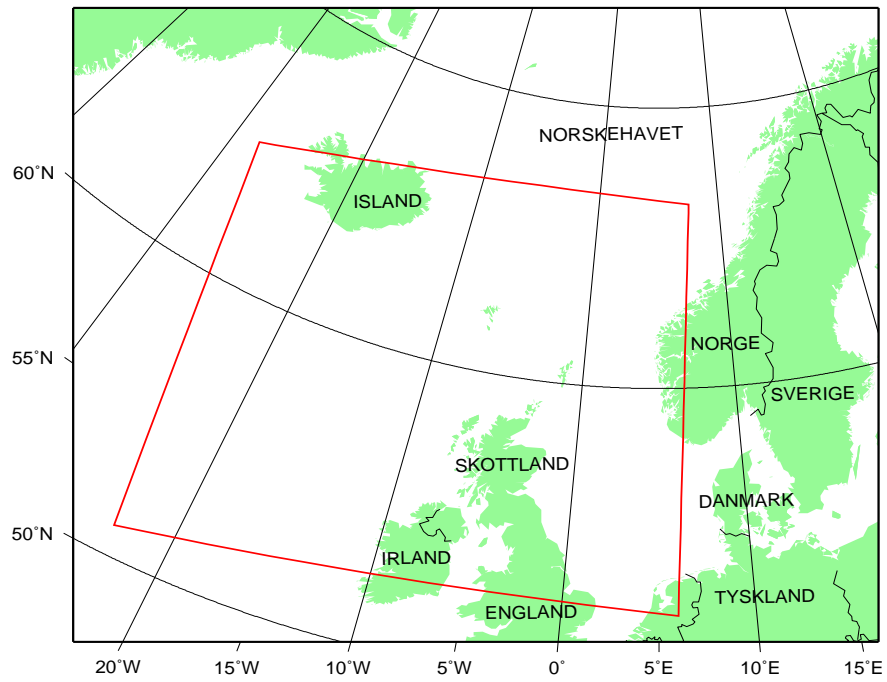
Meteorologi er et fagfelt der feltteori ofte kommer til anvendelse. For å lage værvarsel følger meteorologene utviklingen i trykk-, temperatur- og vindfeltene ved hjelp av værkart (figur 1.1). Vi skal her ved et enkelt eksempel demonstrere hvordan ∇ -operatorene divergens og virvling kan komme til nytte ved analysen av værkart. Forhåpentligvis vil dette også bidra til å utdype den fysiske forståelsen av divergens og virvling.

De meteorologiske dataene vi skal se på er fra et område i Nord-Atlanteren, Norskehavet og Nordsjøen som omfatter vestkysten av Norge, Nord-England, Skottland, Nord-Irland og Island (se figur 5.1). Et stort antall manuelle og automatiske meteorologiske målestasjoner, også kalt værstasjoner, er i drift i området og foretar regelmessige observasjoner flere ganger i døgnet. Værstasjonene er ikke jevnt fordelt og ligger, av naturlige årsaker, tettere over land enn over hav. Målinger fra et verdensomspennende nettverk av målestasjoner brukes til å drive værvarslingsmodeller som kan beregne tilstanden i atmosfæren også i områder hvor observasjoner mangler. Med slike modeller kan en for eksempel beregne lufttrykk, vindstyrke og vindretning i et sett av punkter som danner et regelmessig horisontalt gittersystem langs jordoverflaten (figur 5.3).

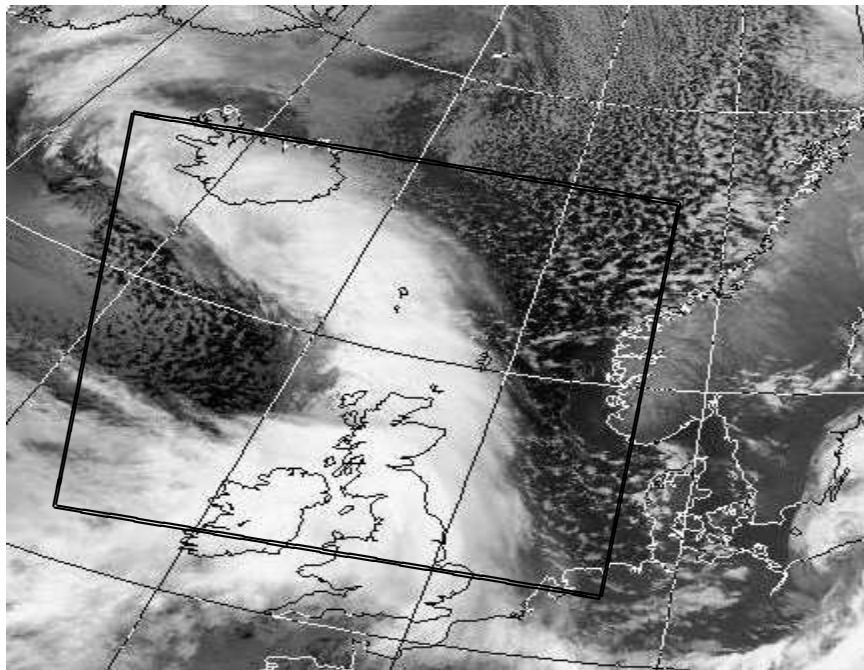
Dataene som vi skal bruke kommer fra Meteorologisk institutt, Blindern. Det er lufttrykk ved havnivået og vindvektoren i isobarflaten 850 hektopascal som ligger 1000-1500 meter over havnivået. Disse dataene er beregnet i et gittersystem med $\Delta x = \Delta y = 55\text{km}$ for tirsdag 19. februar 2002 18 UT¹ og representerer et best mulig estimat av tilstanden i atmosfæren på dette tidspunktet.

Et satellittbilde (figur 5.2) er tatt samme dag, men på et litt tidligere tidspunkt (16:13 UT). Bildet viser et stort sammenhengende skysystem som dekker Irland, England og Skottland og strekker seg som et lysegrått bånd nordvestover til Island. Nordøst for dette skysystemet, i Nordsjøen og Norskehavet, er det nesten skyfritt med spredte skyer i de nordlige delene av Norskehavet. På vestsiden av skysystemet i området sør for Island er det også nesten skyfritt. Vi kan få et mål på hvor bra beregningene våre er ved å sammenlikne resultatene med dette satellittbildet.

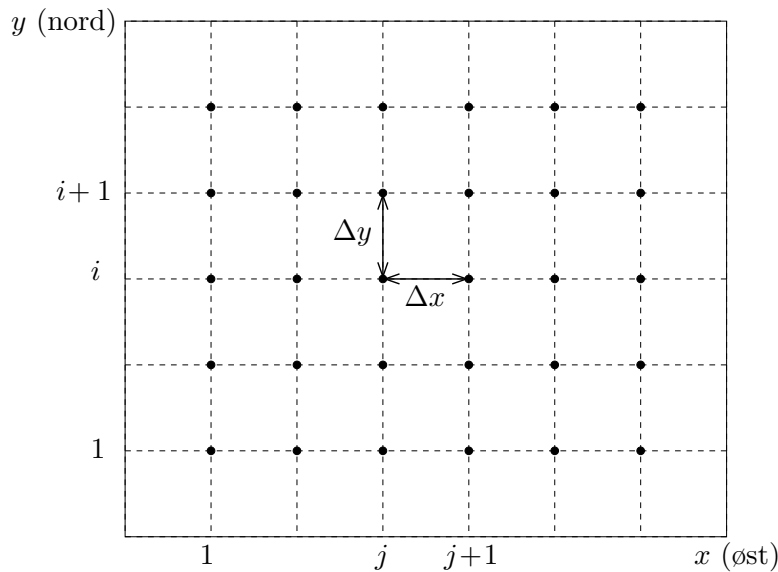
¹Universal Time. Norsk normaltid = UT + en time



Figur 5.1: Værddata som vi skal behandle er fra det innrammede området på kartet.



Figur 5.2: Satellittbilde fra 19. februar 2002. Lysgrå farvetone er skyer. Mørk farvetone er hav eller land.



Figur 5.3: Regelmessig gittersystem med gitteravstand Δx og Δy henholdsvis langs x - og y -aksen. Aksene er lagt langs den sørlige og vestlige rand av området (figur 5.1).

Du kan lese mer om hvordan meteorologene samler inn og behandler værdata på Meteorologisk institutts hjemmesider.

<http://met.no/Meteorologi/>

Klikk: “et værvarsel blir til” eller “fra observasjon til varsel”.

5.2 Innlesing av data

Innenfor det avmerkede området i figur 5.1 er det et gittersystem med 30×31 punkter. Det er 30 punkter i sør-nord retning og 31 punkter i vest-øst retning. Dataene er ordnet i matriser av tilsvarende størrelse som kan skrives

$$D_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, 30, \quad j = 1, 2, \dots, 31$$

hvor indeksene i og j angir gitterpunktene og D_{ij} betegner dataene. Disse ligger som tre filer:

- `trykkfelt.dat` inneholder luftrykket i hPa.
- `vindfelt_u.dat` inneholder vindfeltets komponent i øst/vest-retning (x -retning) i m/s.
- `vindfelt_v.dat` inneholder vindfeltets komponent sør/nord-retning (y -retning) i m/s.

For enkelhetsskyld vil vi i dette kapitlet betegne x - og y -komponentene av vindvektoren \mathbf{v} med henholdsvis u og v i stedet for som vanlig v_x og v_y .

Vi skal nå lese inn dataene i Matlab. Dette kan vi gjøre med kommandoen `load`:

```
>> p = load('trykkfelt.dat');
>> u = load('vindfelt_u.dat');
>> v = load('vindfelt_v.dat');
```

p , u og v vil nå være matriser der hvert element er enten en trykkverdi eller en komponent av vindstyrken. p_{ij} er altså en diskret representasjon av skalarfeltet $p(x, y)$ som beskriver trykkfeltet i området, og u_{ij} og v_{ij} er diskrete representasjoner for komponentene av vindvektoren $\mathbf{v} = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}$ i området. Vi lar først Matlab kontrollere størrelsen på matrisene:

```
>> size(p)

ans =

    30    31

>> size(u)

ans =

    30    31

>> size(v)

ans =

    30    31
```

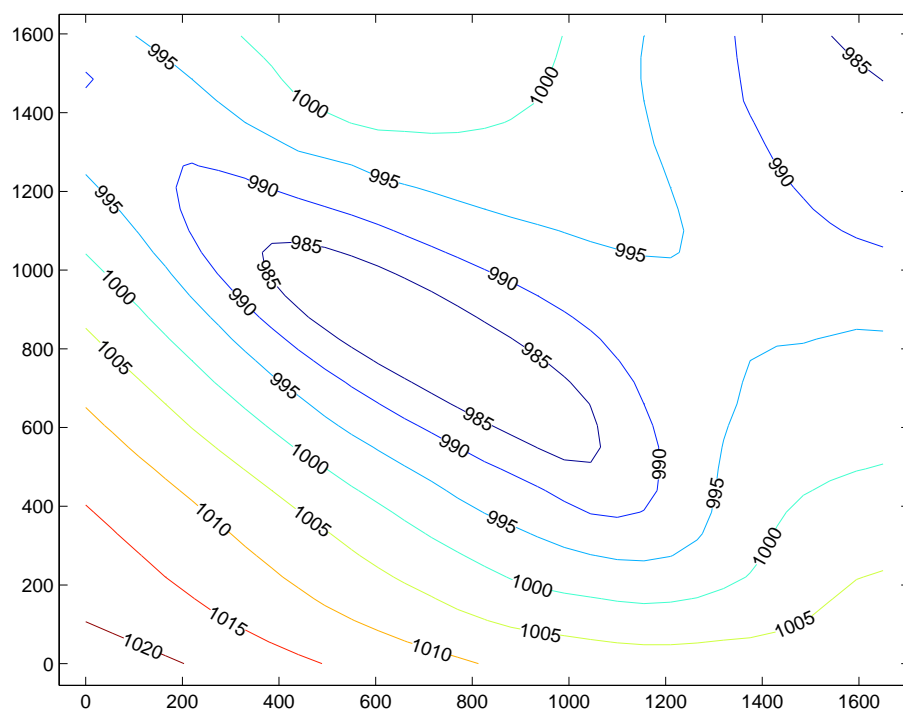
Altså har vi 31 punkter i øst/vest-retning og 30 punkter i sør/nord-retning for hver av de tre matrisene.

5.3 Plotting av isobarer

Vi kan nå plote konturlinjer til trykket (isobarer). For å finne et riktig antall konturlinjer med passende trykkverdier kreves det gjerne litt eksperimentering. For dette feltet passer det bra med jevnt fordelte isobarer fra 980 hPa til 1025 hPa med 5 hPa differanse. Husk at trykket er gitt som en matrise p .

```
>> isobarer = 980:5:1025;
>> [C,h] = contour(x,y,p,isobarer);
>> clabel(C, h);
>> axis([-55 55*31 -55 55*30])
```

Vi har her markert isobarenes verdi ved å bruke funksjonen `clabel`. Resultatet er gjengitt i figur 5.4.



Figur 5.4: Isobarene $p = 980, 985, \dots, 1025$. Trykkfeltet viser et langstrakt lavtrykksområde som ligger diagonalt i området. Sammenlikninger vi med kartet (figur 5.1) ser vi at sentrum for lavtrykket ligger i havet nordvest for Skottland.

5.4 Plotting av vindfelt

Siden vi nå har vindkomponentene gitt som to like store matriser kan vi enkelt plote vindfeltet (vektorfeltet).

```
>> quiver(u,v)
>> axis([0,32,0,31])
```

Resultatet kan vi se i figur 5.5. Aksene er her nummerert etter gridpunktene. Ønsker man seg akseverdier oppgitt som avstanden mellom hvert punkt (det er ca. 55 km mellom gridpunktene) kan man isteden utføre:

```
>> x = 0:55:55*30;
>> y = 0:55:55*29;
>> quiver(x,y, u,v)
>> axis([-55 55*31 -55 55*30])
```

Aksene er nå gitt i km med den nederste venstre hjørnet definert som origo (se figur 5.6). Vi skal bruke disse akseverdiene videre i oppgaven. Et smalt område med sterke vindgradienter går diagonalt i feltet og faller nært sammen med lavtrykksområdet (figur 5.4). På sørsiden er det sterk sørvestlig vind og på nordsiden svakere norøstlig vind.

Vi kan nå sjekke hvor stor vindstyrken er på sitt største. Dette kan vi gjøre ved å finne lengden til vindvektorene i feltet og plukke ut den største. Lengden av vindvektoren finner vi ved å bruke Pythagoras:

```
>> l = sqrt(u.^2 + v.^2);
```

Vi må huske å bruke et punktum (".") foran operasjonen " \wedge " slik at denne operasjonen virker på alle elementene i matrisene u og v . Vi har nå en ny matrise l som inneholder vindstyrken i hvert av de 30×31 punktene i feltet. Den største verdien kan vi finne ved å bruke funksjonen `max`. `max` virker på hver kolonne i en matrise slik at resultatet av `max(l)` vil være en vektor der hvert element er den største verdien i hver kolonne av l . Hvis vi i så anvender `max` en gang til på dette resultatet får vi den største verdien av hele matrisen:

```
>> max(max(l))
```

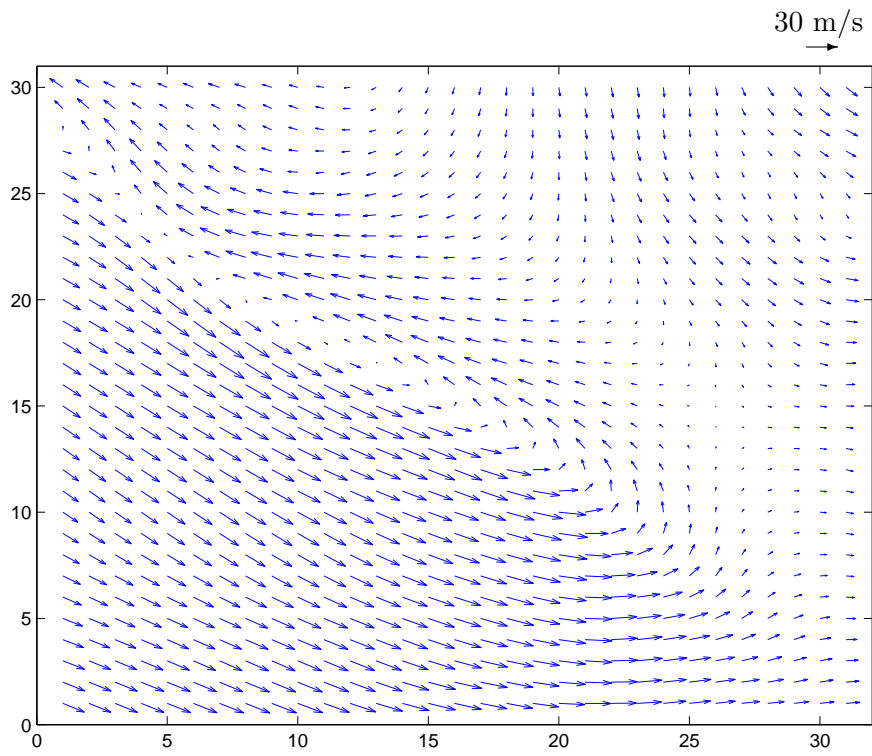
```
ans =
```

```
37.8860
```

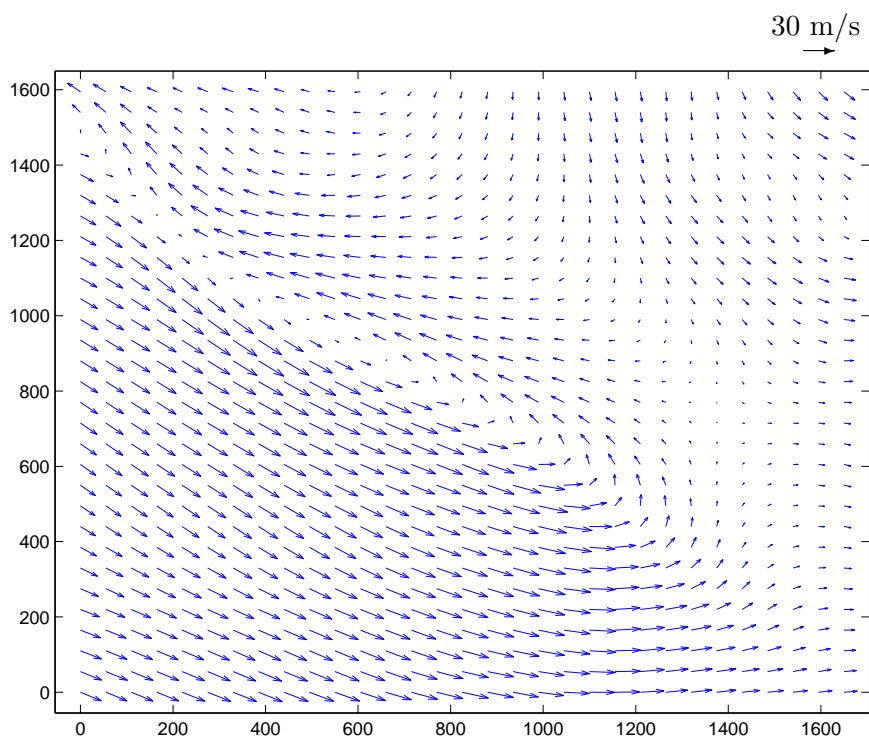
Vindstyrken er altså på det meste nesten 38 m/s som tilsvarer orkan styrke. Dette er ikke hastigheten langs bakken, men i en høyde på 850 hPa eller omtrent 1000-1500 m. I en slik høyde vil vindstyrken være betydelig større enn den er langs bakken. Hvis du lurer på hva som kjennetegner en vindstyrke med hastighet oppgitt i m/s finner du en vindstyrketabell med beskrivelser her:

<http://metlex.met.no/wiki/Beaufortskalaen/>

Ved å klikke "vindens virkning på land" får du vite hvordan de forskjellige vindstyrkene oppleves.



Figur 5.5: Vindfeltet plottet med antall gitterpunkter som koordinater på aksene.



Figur 5.6: Det samme vindfeltet med avstand i km som enhet på x - og y -aksen.

5.5 Divergens

Divergensen til et vektorfelt er en skalar størrelse. Denne størrelsen kan vi beregne i Matlab dersom vi kjenner komponentene til vektorfeltet. Vindfeltet har komponenter u og v og uttrykket for divergensen er

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Her hvor u og v er kjent bare i gitterpunktene ved matrisene u_{ij} og v_{ij} kan de deriverte i uttrykket for divergensen approksimeres ved differanser. Et brukbart nøyaktig uttrykk for den deriverte av u m.h.p x i punktet (i, j) finnes ved å ta middelverdien av den deriverte til høyre og venstre for punktet (sentrert tre-punkts differanse)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta x} + \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x}\right) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

På tilsvarende måte finnes et uttrykk for den deriverte av v m.h.p y i punktet (i, j)

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_{i,j+1} - v_{ij}}{\Delta y} + \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta y}\right) = \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

På randen av området, hvor en mangler verdier for u og v utenfor området, må en bruke for eksempel en ensidig to-punkts approksimasjon til de deriverte hvor bare punkter på randen og området innfor inngår.

Legg merke til at Matlab-rutinen som vi bruker setter $\Delta x = \Delta y = 1$ slik at for å få den riktige verdien for $\nabla \cdot \mathbf{v}$ må vi etterpå multiplisere svaret med $\frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{55000}$. Her må Δx angis i enheten meter fordi u og v er regnet i m/s. Vi kan si at divergensen er skalert med denne faktoren. Enheten for divergensen blir da 1/s.

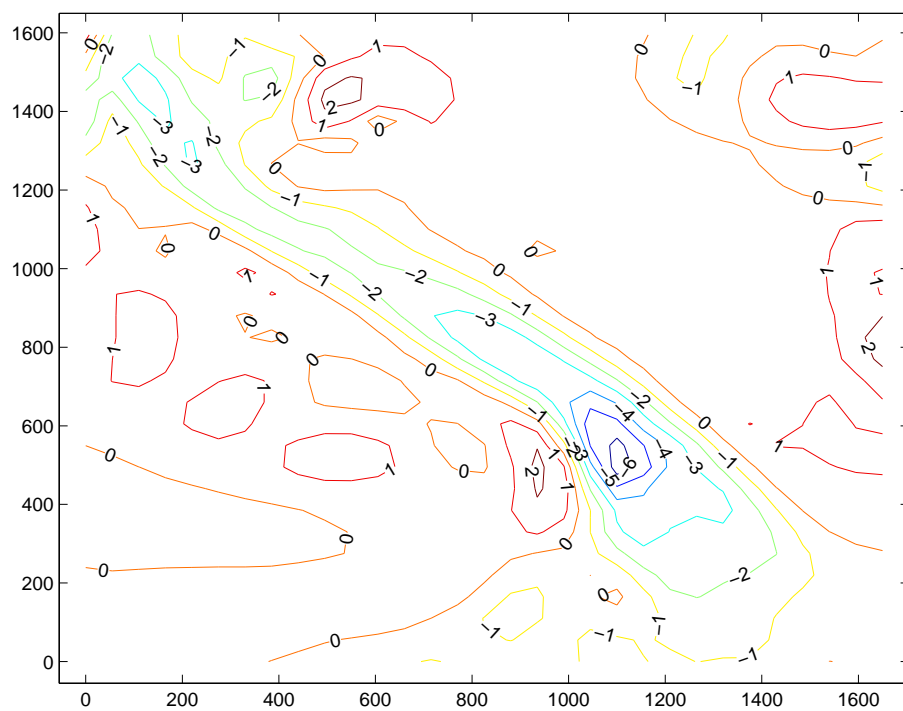
```
>> div = divergence(u,v);
>> [C,h] = contour(x,y,div);
>> clabel(C,h)
>> axis([-55 55*31 -55 55*30])
```

5.6 Virvling

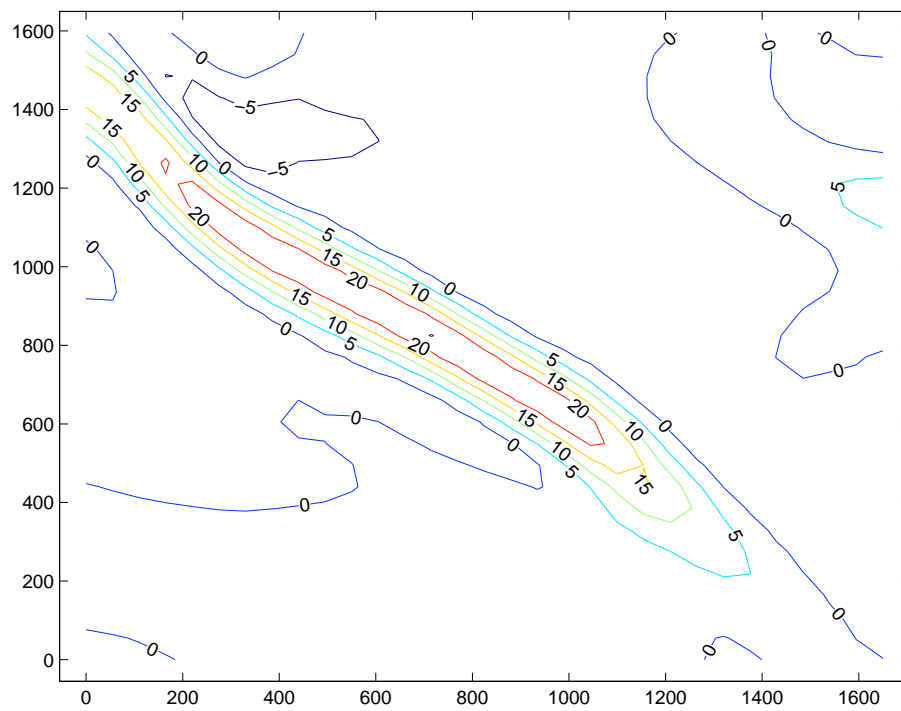
Virvlingen for vindfeltet er rettet normalt xy -planet og størrelsen er

$$c = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

På tilsvarende måte som for divergensen approksimeres de deriverte med differanser av de diskrete verdiene. Matlab-rutinen som beregner virvlingen er:



Figur 5.7: Konturlinjer for divergensen til vindfeltet skalert med en faktor $\frac{1}{55000}$. Området hvor divergensen er mindre enn -2 faller nært sammen med skysystemet (figur 5.4).



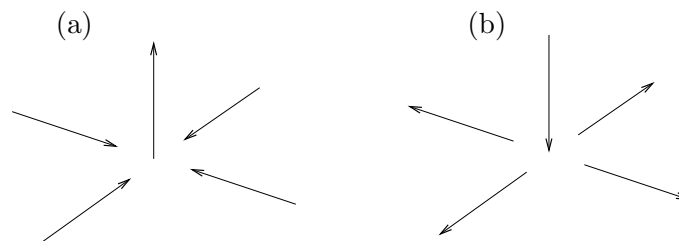
Figur 5.8: Konturlinjer for virvlingen til vindfeltet skalert med en faktor $\frac{1}{55000}$. Området med virvling større enn 5 faller nært sammen med lavtryksområdet (figur 5.4).

```
>> [curlz,cav] = curl(u,v);
>> [C,h] = contour(x,y,curlz);
>> clabel(C,h)
>> axis([-55 55*31 -55 55*30])
```

Tilsvarende skalering blir brukt som ved beregning av divergensen.

5.7 Tolkninger

La oss først se på divergensen for vindfeltet (figur 5.7). Det er klart at området med negativ divergens faller nært sammen med det utstrakte skyområdet som vi ser på satellittbildet (figur 5.2). Forklaringen på dette er enkel. Negativ divergens betyr at det er kontraksjon (konvergens) i feltet. Siden luften ikke kan trykkes nevneverdig sammen må den stige opp. Oppstigende fuktig luft betyr at vanndampen vil kondensere når luften avkjøles under oppstigning til høyere nivå. Skyer og nedbør blir derved resultatet.



Figur 5.9: Konvergens i vindfeltet ved bakken ($\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$) betyr oppstigende luft (a). Ekspansjon i vindfeltet ved bakken ($\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$) betyr nedsynkning i atmosfæren over (b).

To områder med positiv divergens og ekspansjon sees på figur 5.7 henholdsvis med koordinater (950, 500) og (500, 1500). Ekspansjonen fører til nedsynkning i luften og oppvarmingen som følger av dette gjør at skyene løser seg opp. De to områdene med positiv divergens er klart knyttet til de skyfrie områdene vest for Skottland og nord for Island som vi ser på satellittbildet.

Virvlingen i vindfeltet (figur 5.8) er konsentrert langs lavtrykksområdet og henger sammen med det kraftige vindskjæret (vindgradienter) som vi har i dette området (figur 5.6). Dette viser at ∇ -operatorene divergens og virvling sier noe om forholdene i atmosfæren. Faktisk kan beregninger av divergensen til et vindfelt fortelle oss hvor vi kan vente skyer og nedbør og hvor vi kan vente skyfri himmel. Vi kan altså varsle været ved hjelp av divergens og virvling til vindfeltet!

5.8 En fil med hele Matlab-koden

```
% Innlesing av data
p = load('trykkfelt.dat');
u = load('vindfelt_u.dat');
```

```
v = load('vindfelt_v.dat');

% Vi finner størrelsen av dataene
disp 'Størrelsene til p, u og v er:'
size(p)
size(u)
size(v)

% Plott vindfeltet (vektorfeltet) v = ui + vj i gitterpunktene
% NB! Her er komponentene vx og vy henholdsvis kalt u og v
figure(1)
quiver(u,v)
axis([0 32 0 31])

% Plott vindfeltet med avstand i kilometer langs aksene
figure(2)
x = 0:55:55*30;
y = 0:55:55*29;
quiver(x,y, u,v)
axis([-55 55*31 -55 55*30])

% Beregn vindhastigheten og finn største verdi
l = sqrt(u.^2 + v.^2);
maks = max(max(l))

% Plott isobarene med 5 hektopascal intervall
figure(3)
isobarer = 980:5:1025;
[C,h] = contour(x,y,p,isobarer);
clabel(C, h);
axis([-55 55*31 -55 55*30])

% Regn ut divergensen og plott konturlinjene
figure(4)
div = divergence(u,v);
[C,h] = contour(x,y,div);
clabel(C,h)
axis([-55 55*31 -55 55*30])

% Regn ut virvlingen og plott konturlinjene
figure(5)
[curlz,cav] = curl(u,v);
[C,h] = contour(x,y,curlz);
clabel(C,h)
axis([-55 55*31 -55 55*30])
```


Kapittel 6

Kurve-, flate- og volumintegraler, beregning av trykkraft

6.1 Innledning

Vi får ofte bruk for å integrere skalar- eller vektorfelt og vi kan klassifisere integralene som kurve-, flate-, eller volumintegraler avhengig om integrasjonen foretas langs en kurve, over en flate, eller over et volum. Vi har allerede sett at en kan beregne volumfluksen (volumstrømmen) og sirkulasjon i et vektorfelt ved henholdsvis å integrere strømvektoren over en flate og langs en kurve. Ved å integrere trykket langs overflaten av en flyving kan man for eksempel beregne den totale løftekraften som flyvingen gir. For å systematisere litt skal vi nå samlet sette opp og klassifisere endel integraler som ofte kommer til anvendelse i feltteori.

6.2 Kurveintegraler (linjeintegraler)

En kurve eller bane (K) i rommet beskrives ved vektoren $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ hvor parameteren t f.eks. kan være tiden. Da kan $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ tolkes som posisjonsvektoren for en partikkel som beveger seg langs banen. Langs banen er koordinatene funksjoner av parameteren t :

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (6.1)$$

Buelementet langs banen betegner vi ved

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \quad (6.2)$$

som er tangent til kurven i hvert punkt langs banen. Siden

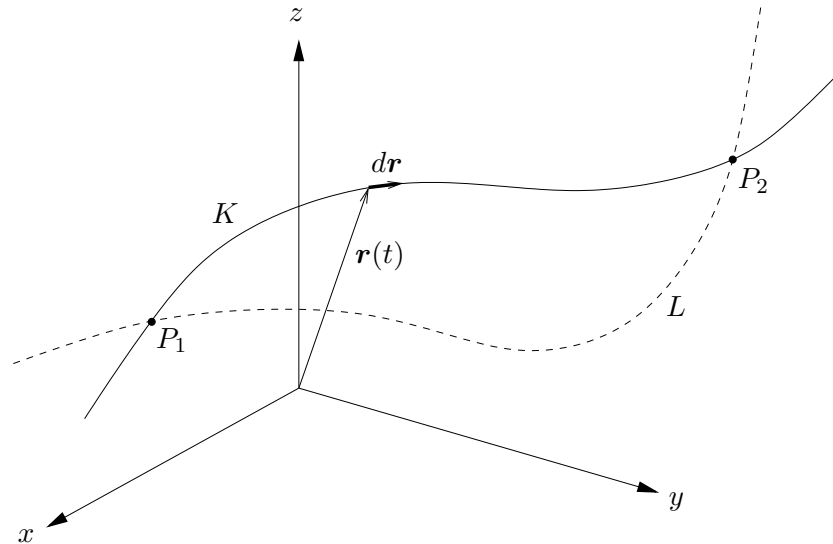
$$dx = x'(t) dt \quad , \quad dy = y'(t) dt \quad \text{og} \quad dz = z'(t) dt$$

hvor $'$ betegner derivasjon med hensyn på t , kan vi uttrykke buelementet bare med parameteren t

$$d\mathbf{r} = (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}) dt \quad (6.3)$$

Vi kan også i prinsippet finne t som en funksjon av x , $t = t(x)$, fra den første av disse relasjonene. Ved å sette inn i de to andre finner vi at y og z er funksjoner av x langs banen

$$y = y(t(x)), \quad z = z(t(x)) \quad (6.4)$$



Figur 6.1: To baner eller kurver K og L mellom to punkter P_1 og P_2 og et bueelement $d\mathbf{r}$ langs banen K .

Vi definerer to *kurveintegraler* langs kurven K henholdsvis av skalaren β og vektoren $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ som ofte kommer til anvendelse. Her er $\beta = \beta(x, y, z)$ og vektor-komponentene $A_i = A_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$ funksjoner av romkoordinatene x , y og z .

$$\int_K \beta d\mathbf{r} = \mathbf{i} \int_K \beta dx + \mathbf{j} \int_K \beta dy + \mathbf{k} \int_K \beta dz \quad (6.5)$$

$$\int_K \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_K A_1 dx + \int_K A_2 dy + \int_K A_3 dz \quad (6.6)$$

Ved å benytte relasjonene (6.4) og (6.2) kan y , z , dy og dz uttrykkes ved x og dx slik at alle integralene på høyre side i (6.5) og (6.6) kan omformes til integraler over x . Alternativt kan man bruke (6.1)-(6.4) til å eliminere x , y og z samt dx , dy og dz slik at integrandene blir uttrykt med t og alle integrasjonene går over denne parameteren.

Kurveintegraler vil i alminnelighet være avhengig av kurven som man integrerer langs og verdien av integralet vil som regel være forskjellig for forskjellige kurver selv om endepunktene for integrasjonen er det samme. Linjeintegralet langs kurven K fra P_1 til P_2

$$\int_{K(P_1, P_2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

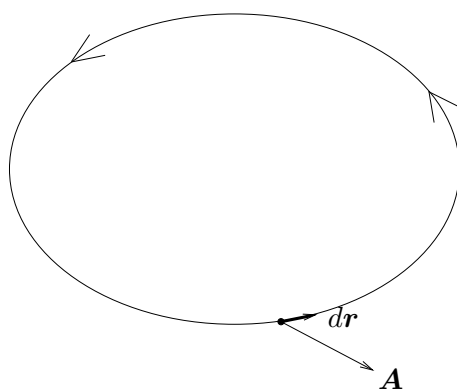
er altså forskjellig fra linjeintegralet langs en annen kurve L fra P_1 til P_2

$$\int_{L(P_1, P_2)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

Noen ganger får vi behov for å beregne integralet omkring en lukket kurve (λ). Vi betegner dette ved

$$\oint_{\lambda} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

I figur 6.1 vil kurven fra P_1 til P_2 langs L og kurven fra P_2 tilbake til P_1 langs K utgjøre en lukket kurve λ . Her må man, for å bestemme integralet entydig, definere *omløpsretningen* i integrasjonen (se figur 6.2).



Figur 6.2: Positiv omløpsretning defineres som omløp av kurven mot urviseren.

6.2.1 Eksempel på beregning av et kurveintegral

Regn ut kurveintegralet $\int_{\lambda} \beta d\mathbf{r}$ langs en sirkel i xy -planet med sentrum i origo når $\beta = \beta_0$ er konstant. Parameterformen for sirkelen er

$$x = a \sin \omega t, \quad y = a \cos \omega t$$

og

$$dx = x'(t) dt, \quad dy = y'(t) dt$$

der a er radius til sirkelen. Kurveintegralet blir

$$\begin{aligned} \oint_{\lambda} \beta d\mathbf{r} &= \beta_0 \mathbf{i} \oint_{\lambda} dx + \beta_0 \mathbf{j} \oint_{\lambda} dy \\ &= \beta_0 \left[\mathbf{i} \int_0^{2\pi/\omega} a\omega \cos \omega t dt - \mathbf{j} \int_0^{2\pi/\omega} a\omega \sin \omega t dt \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

6.2.2 Buelengden av en sirkel

Buelengden av en sirkel kan lett beregnes med kurveintegralet

$$\int_{\lambda} \beta |d\mathbf{r}|$$

hvor $|d\mathbf{r}| = [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2}$ er lengden av buelementet. Vi setter $\beta = 1$ og bruker formler fra eksemplet i forrige avsnitt. Det gir $|d\mathbf{r}| = a\omega dt$. Dermed får vi

$$\int_0^{2\pi/\omega} a\omega dt = 2\pi a$$

6.2.3 Fysikalsk tolkning av kurveintegralet $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$

Vi har tidligere sett at dersom $\mathbf{A} = \mathbf{v}$ representerer hastighetsvektoren i et strømningsfelt så er integralet

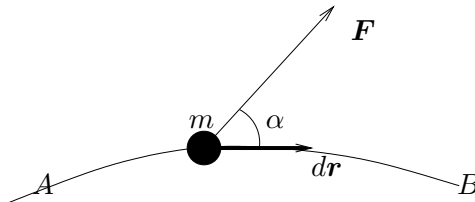
$$\oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

sirkulasjonen omkring en lukket kurve λ og sirkulasjonen kan knyttes til virvlingen i feltet (se seksjon 4.4).

Dersom $\mathbf{A} = \mathbf{F}$ representerer et kraftfelt vil integralet

$$W = \int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

være *arbeidet* som blir utført på en partikkel som utsettes for kraften når partikkelen flyttes langs kurven eller banen K fra A til B (se figur 6.3).



Figur 6.3: Arbeidet som utføres ved å flytte partikkelen m et veistykke $d\mathbf{r}$ er $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{F}||d\mathbf{r}| \cos \alpha = |\mathbf{F}| \cos \alpha dr$. Altså kraftens komponent i veiretningen multiplisert med veistykket $dr = |d\mathbf{r}|$.

6.3 Kurveintegralet av gradientvektoren. Konservativt kraftfelt. Potensialfunksjonen.

Dersom vektoren \mathbf{A} kan uttrykkes som gradienten til et skalarfelt $\beta = \beta(x, y, z)$: $\mathbf{A} = \nabla\beta$ så kan kurveintegralet av \mathbf{A} skrives

$$\int_K \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_K \nabla\beta \cdot d\mathbf{r}.$$

I følge definisjonslikningen for gradientvektoren (likning 2.4, kapittel 2) er $\nabla\beta \cdot d\mathbf{r} = d\beta$ og vi får

$$\int_K \nabla\beta \cdot d\mathbf{r} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} d\beta = \beta_2 - \beta_1$$

hvor β_1 og β_2 er verdien av skalaren henholdsvis i start- og endepunktet for integrasjonen. Dette viser det viktige resultatet:

Et kurveintegral av en gradientvektor er uavhengig av kurven og bare avhengig av skalarverdien i start- og endepunktet for integrasjonen.

6.3.1 Konservativt kraftfelt

Et kraftfelt \mathbf{F} hvor arbeidet som kraften utfører mellom to punkter i feltet er uavhengig av veien kalles et *konservativt kraftfelt*. Det er tilfelle dersom kraften kan uttrykkes som gradienten til en skalarfunksjon V

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (6.7)$$

Symbolet V brukes ofte om potensialfunksjonen for kraftfelt. Det er vanlig å bruke minustegnet i denne definisjonen og betydningen av dette blir forklart nedenfor. Arbeidet som utføres på en partikkel som beveger seg langs en kurve K i feltet er da

$$W = \int_K \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_K \nabla V \cdot d\mathbf{r} = - \int_{V_1}^{V_2} dV = V_1 - V_2.$$

Skalarfunksjonen V betegnes *kraftpotensialet*, eller bare *potensialet*, og likningen ovenfor viser at arbeidet som utføres er lik forskjellen i potensialet.

Eksempel: I tyngdefeltet, hvor z -aksen er rettet vertikalt og g er tyngdens akselerasjon, er tyngdekraften $-g\mathbf{k}$ per masseenhet. Potensialet for denne kraften er

$$V = gz.$$

Dette kalles for *tyngdepotensialet*. Arbeidet som må utføres for å løfte en partikkel med masse m langs en eller annen kurve fra høydenivå $z = 0$ til $z = h$ er derfor

$$W = V_1 - V_2 = 0 - mgh = -mgh.$$

At arbeidet i dette tilfellet ($h > 0$) er negativt betyr at vi må utføre et arbeid mot tyngdekraften for å løfte partikkelen. Med andre ord; kraft og vei er motsatt rettet. På den andre siden er tilveksten i potensialfunksjonen mellom de to nivåene $V = mgh$ som altså representerer den potensielle energien som partikkelen har fått ved forflytningen.

Visse krefter utgjør ikke konservative kraftfelt i den betydningen som vi har brukt her. Det gjelder for eksempel friksjonskrefter, Corioliskraften i geofysikk og Lorentz-kraften i elektromagnetisme. Disse kreftene avhenger av hastighetsfeltet og er derfor ikke en entydig funksjon av posisjonen i rommet.

6.4 Hvordan finne potensialfunksjonen for et konservativt kraftfelt?

En betingelse for at det skal eksistere en potensialfunksjon er at kraftfeltet er virvelfritt

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0.$$

Det følger av relasjonen

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\nabla \times (\nabla V) \equiv 0.$$

Vektorlikningen (6.7) kan skrives ut som tre komponentlikninger

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -F_x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -F_y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -F_z$$

hvor F_x, F_y og F_z er komponentene av vektoren \mathbf{F} . Tilsvarende sett av komponentlikninger kan man selvfølgelig sette opp i polarkoordinater. Disse komponentlikningene kan brukes til å finne potensialfunksjonen dersom komponentene av \mathbf{F} er kjente.

Eksempel: Vi skal demonstrere dette ved et eksempel. En to-dimensjonal vektor er gitt ved $\mathbf{F} = -\lambda(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ hvor λ er en positiv konstant. Her er $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ og potensialfunksjonen kan finnes ved å integrere likningene

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lambda x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \lambda y.$$

Dette gir henholdsvis

$$V = \frac{\lambda}{2}x^2 + f_1(y), \quad V = \frac{\lambda}{2}y^2 + f_2(x)$$

hvor $f_1(y)$ og $f_2(x)$ er ubestemte funksjoner. For å få en entydig potensialfunksjon må vi velge funksjonene $f_1(y) = \frac{\lambda}{2}y^2 + C$ og $f_2(x) = \frac{\lambda}{2}x^2 + C$ hvor C er en vilkårlig konstant.

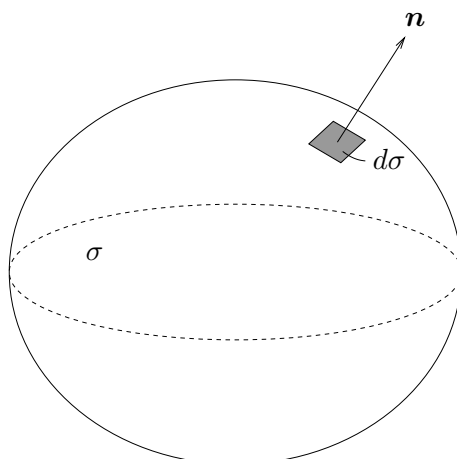
$$V = \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2) + C.$$

Her kan \mathbf{F} tolkes som en fjærkraft som trekker inn mot origo og kraften øker med utslaget fra origo. Konstanten λ representerer stivheten i fjæra og V blir den potensielle energien når fjæra strammes.

6.5 Flateintegraler

En lukket flate σ i rommet som omslutter et volum τ kan deles i infinitesimale flateelementer som kan ansees som plane med areal $d\sigma$ og retning definert ved normalen \mathbf{n} til flateelementet. Her bruker vi konvensjonen at flatenormalen regnes positiv når den peker ut fra volumet som flaten omslutter.

Det er tre flateintegraler som ofte kommer til anvendelse. Integralet av en skalar β over en flate, integralet av normalkomponenten av en vektor \mathbf{A} langs en flate, og integralet av tangensialkomponenten av en vektor \mathbf{A} langs en flate. Integralene er egentlig



Figur 6.4: Volum τ med begrensingsflate σ , flateelement med areal $d\sigma$ og normalvektor \mathbf{n} .

summer over et stort antall små flateelementer med areal $d\sigma_i$ og normalvektor \mathbf{n}_i der skalarens eller vektorens verdi er henholdsvis β_i og \mathbf{A}_i . Overgangen fra summer til integral skjer ved grenseovergangen $N \rightarrow \infty$ og $d\sigma_i \rightarrow 0$. De tre integralene kan skrives henholdsvis:

$$\int_{\sigma} \beta \mathbf{n} d\sigma = \sum_{i=1}^N \beta_i \mathbf{n}_i d\sigma_i \quad (6.8)$$

$$\int_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{n}_i d\sigma_i \quad (6.9)$$

$$\int_{\sigma} \mathbf{A} \times \mathbf{n} d\sigma = \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \times \mathbf{n}_i d\sigma_i \quad (6.10)$$

I det enkle tilfellet med en plan flate σ må det være en linær sammenheng mellom de tre romkoordinatene uttrykt ved flatelikningen

$$z = \eta(x, y)$$

hvor η betegner en linær funksjon av x og y . Følgelig har normalvektoren til flaten konstant retning. Dette kan vi bruke til å eliminere z i flateintegralene ovenfor og derved transformere dem til dobbeltintegraler av typen

$$\iint_{\sigma} \phi(x, y) dx dy.$$

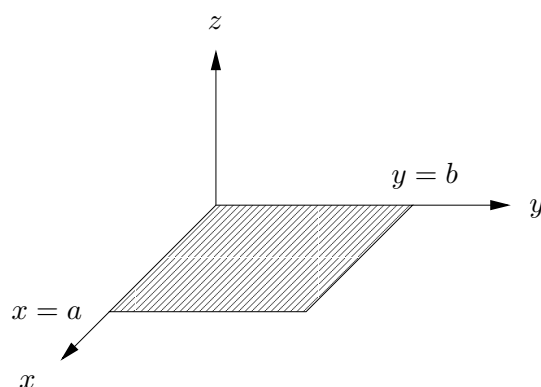
Dersom flaten er krummet kan en liknende transformasjon gjøres, men det blir mer omstendelig.

Flateintegralene kan være vanskelig å regne ut. Dersom flaten σ deles i delflater $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ kan flateintegralet deles tilsvarende. For eksempel

$$\int_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\sigma_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \int_{\sigma_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma + \int_{\sigma_3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Kan man nå velge σ_1, σ_2 og σ_3 slik at \mathbf{n} eller \mathbf{A} er konstant over flaten vil delintegralene kunne regnes ut forholdsvis enkelt. Slik oppdeling av flateintegralet blir demonstrert i eksemplet i seksjon 6.6.

6.5.1 Eksempel på beregning av flateintegral



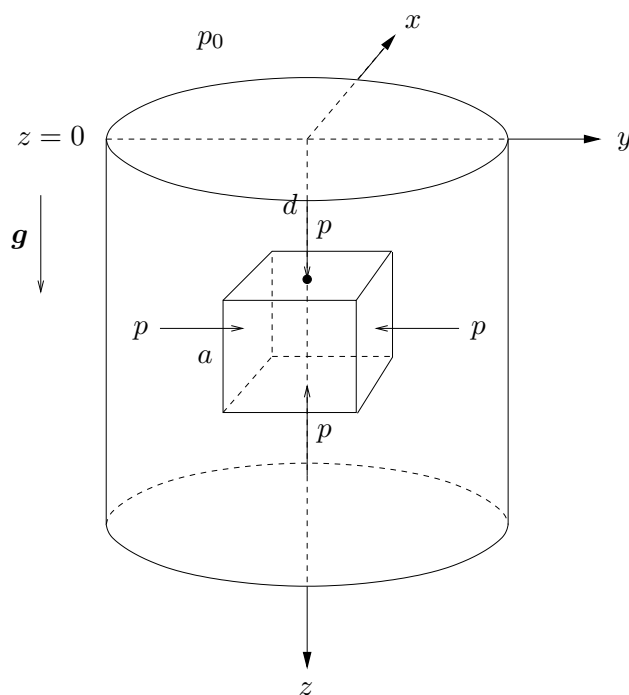
Integralet av en skalar $\beta = \beta(x, y)$ over et rektangel i xy -planet med sidekanter a, b . Normalvektoren til rektangelet er $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, enhetsvektoren i z -retning. Flateintegralet blir:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \beta \mathbf{n} \, d\sigma &= \int_0^b \int_0^a \beta \mathbf{k} \, dx \, dy \\ &= \beta_0 \mathbf{k} \int_0^b \int_0^a dx \, dy \\ &= \beta_0 ab \mathbf{k} \end{aligned}$$

6.6 Beregning av trykkraft

Ofte får en behov for å beregne integralet av en skalar over en flate i rommet. Et eksempel på dette er beregning av trykkraften på en gjenstand begrenset av en lukket flate. I den lukkede flaten σ merker vi av et lite flateelement med areal $d\sigma$ og flatenormal \mathbf{n} (se figur 6.5). Trykkraften på dette flateelementet er

$$-p \mathbf{n} \, d\sigma.$$



Figur 6.5: En kvadratisk terning som er neddykket i en væskebeholder.

Trykk er definert som kraft per flateenhet og ved å multiplisere med arealet $d\sigma$ får vi trykkraften. Vektoren $-\mathbf{n}$ angir at trykkraften er rettet inn mot flaten. Den totale trykkraften får vi ved å summere bidragene fra alle flatelementene som flaten σ består av

$$\mathbf{F} = - \int_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma. \quad (6.11)$$

Dette integralet kan være vanskelig å regne ut. Vi skal vise hvordan utregning kan gjøres i et enkelt tilfelle. La oss beregne trykket på en kvadratisk terning med sidekanter a som er neddykket i en væskebeholder og hvor toppflaten er i avstand d under overflaten. Vi legger koordinataksene x og y i overflaten $z = 0$, med z -aksen pekende vertikalt nedover i væsken som vist på figur 6.5. Trykket i væsken antar vi er gitt ved *den hydrostatiske trykkformelen*

$$p = p_0 + \rho g z \quad (6.12)$$

hvor p_0 er lufttrykket over væsken, ρ er tettheten av væsken og g er tyngdeakselerasjonen. Den hydrostatiske trykkformelen uttrykker at trykket er lik vekten av væsken over stedet hvor trykket måles. Trykkraften på terningen er gitt ved (6.11) og vi kan dele opp integralet i tre deler

$$\mathbf{F} = - \int_{\sigma_{\text{topp}}} p \mathbf{n} d\sigma - \int_{\sigma_{\text{bunn}}} p \mathbf{n} d\sigma - \int_{\sigma_{\text{side}}} p \mathbf{n} d\sigma$$

hvor σ_{topp} betegner toppflaten av terningen, σ_{bunn} er bunnflaten og σ_{side} er de fire vertikale sideflatene.

På toppflaten σ_{topp} er flatenormalen $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ og på bunnflaten er flatenormalen $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. På de fire sideflatene er flatenormalene henholdsvis $\pm\mathbf{i}$ og $\pm\mathbf{j}$. Trykket på toppflaten er $p_{\text{topp}} = p_0 + \rho g d$ og på bunnflaten $p_{\text{bunn}} = p_0 + \rho g(d + a)$. Vi kan nå beregne delintegralene:

$$\begin{aligned} - \int_{\sigma_{\text{topp}}} p \mathbf{n} d\sigma &= (p_0 + \rho g d) \mathbf{k} \int_{\sigma_{\text{topp}}} d\sigma = (p_0 + \rho g d) a^2 \mathbf{k} \\ - \int_{\sigma_{\text{bunn}}} p \mathbf{n} d\sigma &= - [p_0 + \rho g(d + a)] \mathbf{k} \int_{\sigma_{\text{bunn}}} d\sigma = - [p_0 + \rho g(d + a)] a^2 \mathbf{k} \\ - \int_{\sigma_{\text{side}}} p \mathbf{n} d\sigma &= 0. \end{aligned}$$

At summen av integralene over sideflatene er null skyldes at trykkvirkningen er parvis like stor og motsatt rettet på motstående sideflater. Den totale kraftvirkningen på terningen blir følgelig

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (p_0 + \rho g d) a^2 \mathbf{k} - [p_0 + \rho g(d + a)] a^2 \mathbf{k} \\ &= -\rho g a^3 \mathbf{k} \\ &= -M g \mathbf{k} \end{aligned}$$

hvor $M = \rho a^3$ er massen av væsken som er fortrenget av terningen. Vi legger også merke til at resultatet av trykkraften på terningen er rettet vertikalt oppover. Dette er et bemerkelsesverdi resultat! Vi har her funnet *oppdriftskraften* slik som forutsagt av *Arkimedes* ved direkte beregning av integralet (6.11).

6.7 Volumstrøm gjennom et strømrør

Volumstrømmen eller strømfluksen gjennom et strømrør begrenset av to strømlinjer (se figur 6.6) er:

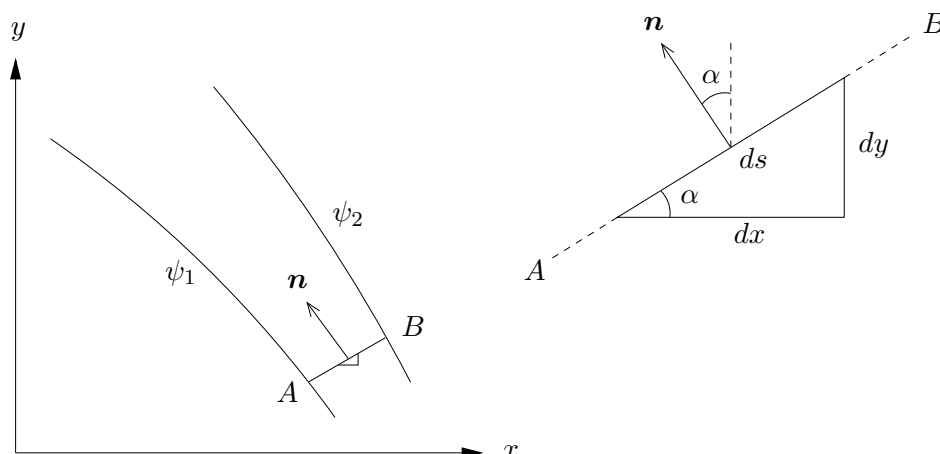
$$Q = \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (6.13)$$

hvor $d\sigma$ er et flateelement i snittet AB med areal σ . Flateelementet har areal $d\sigma = 1 \cdot ds$ hvor 1 representerer en lengdeenhet normalt planet og ds er sidekanten av flateelementet i xy -planet. Normalen til flateelementet er \mathbf{n} (se figur 6.6). Regner vi retningen av normalvektoren \mathbf{n} positiv mot venstre i forhold til retningen AB , har vi at

$$n d\sigma = \mathbf{n} ds = -dy \mathbf{i} + dx \mathbf{j}$$

fordi komponentene av normalvektoren er

$$n_x = -\sin \alpha = -\frac{dy}{ds}, \quad n_y = \cos \alpha = \frac{dx}{ds}.$$



Figur 6.6: Strømrør i plan strøm begrenset av strømlinene ψ_1 og ψ_2 . Til høyre en forstørret skisse av et flatelement $d\sigma$ i snittflaten AB med flatenormal \mathbf{n} .

Derfor kan vi skrive integralet (6.13)

$$Q = \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\sigma} -v_x dy + v_y dx.$$

Nå kan strømkomponentene v_x og v_y uttrykkes ved strømfunksjonen ψ (likning 4.18) og det siste integralet kan derfor skrives

$$Q = \int_{\sigma} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) = \int d\psi.$$

Integranden i det første integralet er tilveksten i strømfunksjonen $d\psi$. For den nye integrasjonsvariabelen blir grensene i integrasjonen ψ_1 og ψ_2 . Derved får vi at

$$Q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1. \quad (6.14)$$

Volumstrømmen per lengdeenhet normalt xy -planet gjennom strømrøret (i retning mot venstre i forhold til retningen AB) er derfor lik differansen mellom strømfunksjonens verdier på de to strømlinene som begrenser strømrøret.

6.8 Volumintegraler

Volumintegralet av en skalar $\beta = \beta(x, y, z)$ over et volum τ er

$$\int_{\tau} \beta d\tau = \iiint_{\tau} \beta(x, y, z) dx dy dz.$$

Vi bruker ofte egen notasjonen for volumelementet $d\tau = dx dy dz$. Trippelintegralet ovenfor kan være vanskelig å regne ut. Dersom volumet er rotasjonsymmetrisk (sylinderform) eller kulesymmetrisk (kuleform) kan det lønne seg å innføre forskjellige former

for polarkoordinater. Vi skal komme tilbake til dette senere. Ved å sette $\beta = \rho(x, y, z)$ som er massetettheten i feltet blir volumintegralet

$$\int_{\tau} \beta d\tau = \int_{\tau} \rho d\tau = M$$

hvor M er den totale massen innenfor volumet.

6.9 Oppgaver

1. Regn ut kurveintegralet $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ langs kurven $y = x^3$ i xy -planet når $-1 \leq x \leq 2$ og $\mathbf{v} = xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$.

2. Finn arbeidet som kraften $\mathbf{F} = (y^2 + 5)\mathbf{i} + (2xy - 8)\mathbf{j}$ utfører langs to veier ABC og ADC som består av rette linjer mellom punktene A, B, C, D i xy -planet. A, B, C, D er hjørner i et kvadrat og hjørnene har henholdsvis koordinatene $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ og $(0, 1)$. Beregn også arbeidet langs en rett linje fra A til C . Siden arbeidet ser ut til å være uavhengig av veien forventer vi at kraften kan skrives som gradienten til et potensial V . Finn potensialfunksjonen og vis at forskjellen i potensialet mellom A og C er lik arbeidet som utføres.

3. En sirkel S i xy -planet med sentrum i origo og radius r er beskrevet ved $x^2 + y^2 = r^2$. Vis at enhetsnormalen til sirkelen kan skrives som $\mathbf{n} = \frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j}$ der \mathbf{i} og \mathbf{j} er enhetsvektorer henholdsvis langs x - og y -aksen. Gitt strømhastighetsfeltet $\mathbf{v} = -\frac{Ay}{r^2}\mathbf{i} + \frac{Ax}{r^2}\mathbf{j}$ hvor A er en positiv konstant.

- Vis at strømhastigheten er tangensial til sirkelen S og konstant i størrelse langs sirkelen.
- Vis at det eksisterer en strømfunksjonen og finn denne. Skisser strømfeltet.
- Vis at linjeintegralet $C = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi A$ når integrasjonen utføres langs sirkelen i samme retning som strømhastigheten peker. Hva kaller vi størrelsen C ?
- Vis at linjeintegralet $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ omkring et kvadrat med sentrum i origo og sidekanter lik 2 har samme verdi som linjeintegralet omkring sirkelen beregnet i c).

Magnetfeltet \mathbf{B} rundt en rett strømførende elektrisk ladning som skjærer loddrett gjennom xy -planet i origo kan uttrykkes ved tilsvarende formel som for strømhastighet i en væske ovenfor. Altså $\mathbf{B} = -\frac{Ay}{r^2}\mathbf{i} + \frac{Ax}{r^2}\mathbf{j}$. Beregningene av feltlinjer etc. for dette magnetfeltet blir derfor analog til det vi har gjort ovenfor. Dette feltet vil du stifte nærmere bekjentskap med dersom du studerer elektromagnetisme eller elektronikk.

4. Beregning av trykkraft:

- Finn trykkraften på en sylinder med radius a og lengde l som er neddykket i en væske slik at sylinderens lengdeakse er vertikal og toppflaten av sylinderen er en avstand d under overflaten. Trykket i væsken er gitt ved den hydrostatiske trykkformelen (6.12).

- b) Trykkraften på en kule med radius a som er neddykket i en væske kan beregnes med samme fremgangsmåte, men utregningen av integralet blir svært vanskelig dersom man ikke bruker kulekoordinater. Sett opp integraluttrykket for trykkraften på kula. Kan du gjette hva svaret blir?

5. La τ være et volum i \mathbf{R}^3 der $x \in [0, 0.5]$, $y \in [0, 2]$ og $z \in [0, 1]$.

- a) Regn ut

$$\iiint_{\tau} 3xye^z \, dx \, dy \, dz.$$

- b) Kontroller at du får det samme resultatet ved å bruke en annen integrasjonsrekkefølge, f.eks.

$$\iiint_{\tau} 3xye^z \, dz \, dx \, dy.$$

6. Regn ut

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y (x^2 + 3xy - z^2) \, dz \, dy \, dx.$$

7. En kule med radius 1 kan uttrykkes ved

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \tag{6.15}$$

- a) Hvis vi nå lar x variere fritt på området $-1 \leq x \leq 1$, hvordan kan først y og så z variere slik at (6.15) holder?
- b) Hvis $\beta = 1$ vil integralet $\iiint_{\tau} \beta \, dx \, dy \, dz$ være lik volumet til τ . Vis at volumet til en kule med radius 1 er $\frac{4}{3}\pi$.

Kapittel 7

Integralsatser: Green, Stokes og Gauss

7.1 Innledning

Flate- og volumintegraler hvor integranden inneholder ∇ -operatoren kan i noen tilfeller omformes fra flateintegraler til linjeintegraler og fra volumintegraler til flateintegraler og vise versa. Dette er nyttige formler eller satser som ofte kommer til anvendelse. Her skal vi behandle tre slike integralsatser nemlig Greens, Stokes' og Gauss' sats. De har henholdsvis navn etter George Green (1793-1841) en selvlært engelsk matematiker og fysiker, George Gabriel Stokes (1819-1903) irsk-engelsk fysiker, særlig kjent for sine arbeider innen hydrodynamikk, og Karl Friedrich Gauss (1777-1855) berømt tysk matematiker og astronom.

7.2 Greens sats

I kapittel 4.4, viste vi at sirkulasjonen av en vektor $\mathbf{v} = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}$ rundt et lite rektangel i xy -planet med sidekanter Δx og Δy og omkrets $\Delta\lambda_i$ kan skrives

$$\oint_{\Delta\lambda_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

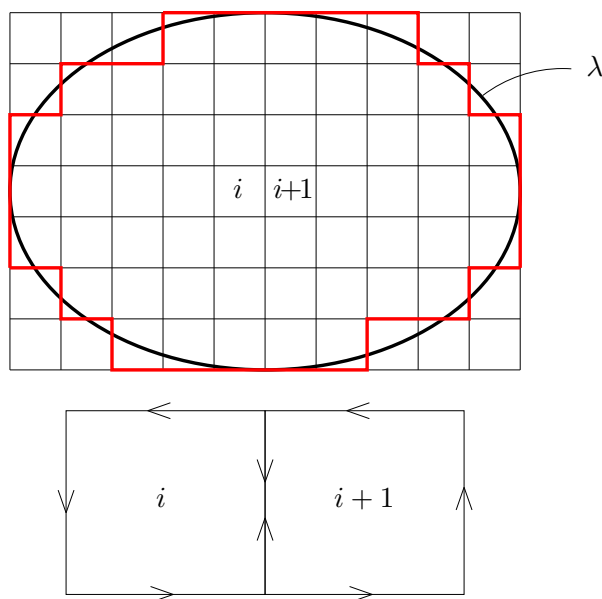
hvor $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{k}$ er z -komponenten av virvlingsvektoren som i dette tilfellet bare har komponent normalt xy -planet. Følgelig kan vi skrive likningen ovenfor:

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \Delta\sigma_i = \oint_{\Delta\lambda_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.1)$$

hvor $\Delta\sigma_i = \Delta x \Delta y$ er arealet av rektanget og $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ er normalvektoren.

Et større flateareal σ med uregelmessig begrensingslinje λ kan vi tenke oss dekket av et stort antall små flatelementer av form som rektangler eller kvadrater som vist på figur 7.1.

For hvert av disse må formelen (7.1) gjelde og vi kan summere opp bidragene for alle flatelementene som dekker det avgrensede arealet:



Figur 7.1: Et flateareal med begrensingslinje λ oppdelt i rektangulære flatelementer med trapperandtilnærming til λ . To naboelementer i og $i + 1$ er forstørret med integrasjonsretningen langs omkretsen inntegnet.

$$\sum_{i=1}^{i=N} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{i=N} \oint_{\lambda_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \quad (7.2)$$

I summen på høyre side av denne likningen må bidraget fra sidekanten som grenser inn mot et naboelement oppheves av bidraget fra den felles sidekant. Dette fordi integrasjonsretningen er motsatt rettet mens integranden er den samme (se figur 7.1). Det eneste bidragene til sirkulasjon som ikke heves av bidraget fra motstående sidekanter er de ytre sidekantene som begrenser arealet. Ved forfinet oppdeling i flatelementer slik at $N \rightarrow \infty$ mens $\Delta\sigma_i \rightarrow 0$ vil summen på venstre side i (7.2) gå over til flateintegral over arealet og summen på høyre side av samme likning gå over til et linjeintegral langs den ytre begrensingskurven for flatearealet. Dette gir *Greens sats*:

$$\int_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \quad (7.3)$$

Omløpsretningen i linjeintegralet er i positiv retning dvs. mot urviserens dreining slik som tidligere definert. Skriver vi ut denne vektorlikningen på skalar form blir flateintegralet til et dobbeltintegral av virvlingskomponenten over x og y og linjeintegralet kan uttrykkes som integrasjon av hastighetskomponenten over de samme variable

$$\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\lambda} u dx + v dy. \quad (7.4)$$

Denne formen av Greens sats eller teorem finnes i boken *Calculus (2000)* som har blitt brukt i kurset MAT1110. Der blir det også gitt et alternativt bevis for Greens sats.

Ved utledningen av Greens sats forutsatte vi at området var begrenset av en begrensingskurve. Dersom det i tillegg til den “ytre” begrensingskurven λ er en eller flere begrensingskurver $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ som avgrensner “huller” innenfor området, vil man i tillegg til bidraget fra kurven λ få bidrag til fra de øvrige begrensingskurvene. Omløpsretningen for linjeintegralene langs begrensingskurvene $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ må velges slik at en har området som det integreres over til venstre for omløpsretningen.

7.3 Stokes' sats

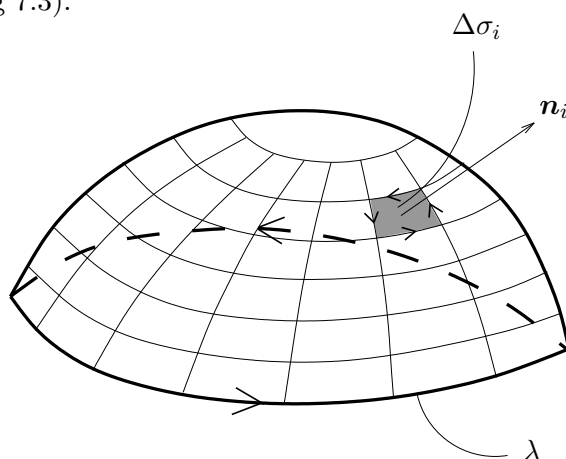
Greens sats omhandler integrasjon av sirkulasjon og virvling av vektorer i et plan. Stokes' sats er en generalisering av Greens sats til tre-dimensjonale vektorer og krumme flater. For et lite flatelementet med areal $\Delta\sigma_i$ og normalvektor \mathbf{n} på en krum flate slik som skissert i figur 7.2 må

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \Delta\sigma_i = \oint_{\Delta\lambda_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.5)$$

i tråd med likning 7.1. Summerer vi bidragene fra alle flatelementene som hele flaten kan deles i, på tilsvarende måte som under utledelsen av Greens sats, så vil bidragene til linjeintegralene for felles sidekanter av flatelementene heve hverandre. Vi blir derfor stående igjen med linjeintegralet langs flatens begrensingskurve λ som er lik integralet av virvlingens vertikalkomponent integrert over hele flaten.

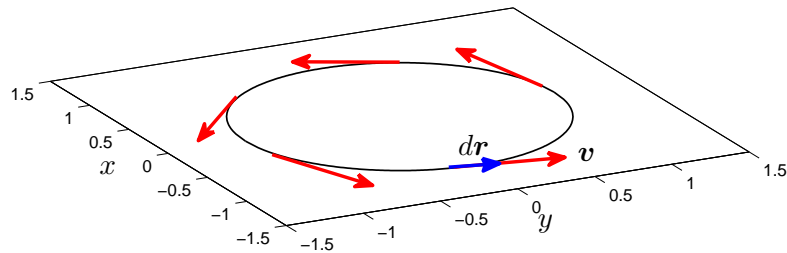
$$\int_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (7.6)$$

Dette er *Stokes' sats*. Ofte vil en se samme navnet brukt om det vi her har kalt Greens sats i planet (likning 7.3).



Figur 7.2: En krum flate med begrensingskurve λ deles inn i små flatelementer med areal $\Delta\sigma_i$ med normalvektor \mathbf{n}_i .

7.3.1 Eksempler på beregning med Stokes' sats



Figur 7.3: Sirkulasjonen omkring en sirkel i xy -planet.

Eksempel 1. Gitt vektorfeltet $\mathbf{v} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, $|\mathbf{v}| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = r$. Sirkulasjonen av \mathbf{v} omkring en sirkel $r = a$ er

$$\oint_{r=a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{v}| \cdot 2\pi a = 2\pi a^2.$$

Virvlingen er

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right] \mathbf{k} = 2\mathbf{k}.$$

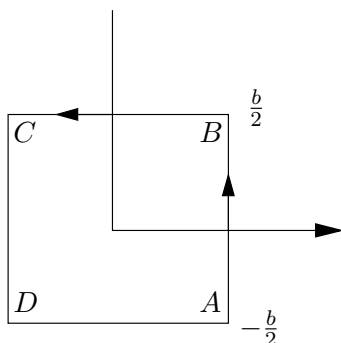
Virvlingens vertikalkomponent integrert over sirkelflaten skal nå i følge Stokes' sats være lik sirkulasjonen. Vi sjekker:

$$\int_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\sigma} 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \, d\sigma = 2 \int_{\sigma} d\sigma = 2\pi a^2.$$

Dette viser at vi får samme resultat fra høyre og venstre side i Stokes' sats.

Eksempel 2. La oss nå beregne sirkulasjonen om et rektangel med sidekanter a og b for samme vektorfelt som i eksempel 1:

$$\begin{aligned} \oint_{ABCD} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{BC} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{CD} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{DA} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{a}{2} dy + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{b}{2} dx + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{a}{2} dy + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{b}{2} dx \\ &= 2ab. \end{aligned}$$

Figur 7.4: Sirkulasjonen om et rektangel i xy -planet.

Virvlingens vertikalkomponent integrert over rektangelet blir nå

$$\int_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\sigma} 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \, d\sigma = 2 \int_{\sigma} d\sigma = 2\alpha\beta.$$

Igjen får vi at høyre og venstre side i Stokes' sats gir samme resultat.

7.4 Gauss' sats (divergensteoremet)

Vi betrakter et avgrenset volum τ innenfor en begrensingsflate σ i et vektorfelt hvor \mathbf{A} er en vilkårlig vektor. Vi forutsetter at volumet er begrenset av en sammenhengende flate slik at det ikke er "huller" innenfor volumet. Dette volumet tenker vi oss delt opp i et stort antall små volumelementer i form av rettvinklede bokser (epiped) med overflateareal $\Delta\sigma_i$ og volum $\Delta\tau_i$. For hvert av disse elementene må vi i henhold til resultatene i kapittel 4 (likning 4.8 generalisert til 3-D) ha:

$$(\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta\tau_i = \int_{\Delta\sigma_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

La oss summere bidragene i denne likningen for alle elementene som volumet τ består av:

$$\sum_{i=1}^{i=N} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta\tau_i = \sum_{i=1}^{i=N} \left(\int_{\Delta\sigma_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \right). \quad (7.7)$$

Summetegnet på høyre side betyr at vi skal summere flateintegralene for alle de del-elementene som volumet er delt opp i. Bidraget til flateintegralene fra tilgrensende sideflater i to naboelementer vil være like store, men med motsatt fortegn. Dette fordi normalvektoren \mathbf{n} har motsatt retning for den felles sideflaten avhengig av om den tilhører det ene eller det andre av naboelementene. Bidraget fra tilgrensende sideflater i naboelementene vil da, når vi summerer over elementene, oppheve hverandre. Bare sideflater som ikke har noe tilgrensende sideflate τ vil derfor gi bidrag til summen. Summen over alle volumelementene reduserer seg derfor til et integral over flaten σ som omslutter volumet. Ved forfinet oppdeling i elementer slik at $N \rightarrow \infty$ mens $\Delta\tau_i \rightarrow 0$ og $\Delta\sigma_i \rightarrow 0$ vil summen på venstre side i (7.7) gå over til volumintegralet over

volumet og summen på høyre side av samme likning gå over til flateintegralet langs begrensingsflaten som avgrenser volumet. Vi får følgende

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (7.8)$$

Dette er *Gauss' sats*. Den sier hvordan et divergensintegral over et volum kan omformes til et flateintegral over volumets begrensingsflate. Skalarproduktet $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ kalles fluksen av vektoren \mathbf{A} gjennom flatelementet $d\sigma$. Gauss' sats (7.8) uttrykker dermed at den samlede vektorfluksen gjennom en flate er lik integralet av divergensen av vektoren over det volumet som flaten avgrenser. Spesielt har vi at:

Dersom vektoren \mathbf{A} er en strømvektor \mathbf{v} så vil flateintegralet i (7.8) være den totale volumstrømmen gjennom flaten og Gauss' sats sier at den er lik integralet av divergensen i strømfeltet over volumet som flaten avgrenser.

7.4.1 Gauss' sats for gradient- og virvlingsvektoren

Det finnes to andre nyttige varianter av Gauss' sats som omhandler henholdsvis gradient- og virvlingsvektoren:

$$\int_{\tau} \nabla \beta d\tau = \int_{\sigma} \beta \mathbf{n} d\sigma \quad (7.9)$$

og

$$\int_{\tau} \nabla \times \mathbf{A} d\tau = - \int_{\sigma} \mathbf{A} \times \mathbf{n} d\sigma. \quad (7.10)$$

Disse integralsatsene blir også ofte betegnet som Gauss' sats og disse kan også utledes på tilsvarende måte som divergensteoremet (7.8). Alternativt kan likning (7.9) enkelt utledes ved å sette $\mathbf{A} = \mathbf{a}\beta$ hvor \mathbf{a} er en konstant vektor inn i likning (7.8). I dette kurset skal vi benytte Gauss' sats for gradientvektoren (7.9) i noen øvingsoppgaver.

7.4.2 Eksempel: Gauss' sats brukt til å beregne volum og overflate av kule

Et vektorfelt som overalt peker utover fra origo og hvor størrelsen (lengden) av vektor øker med avstanden fra origo, er gitt i kartesiske koordinater ved

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

og i kulekoordinater ved

$$\mathbf{v} = r\mathbf{i}_r.$$

Divergensen til vektoren er $\nabla \cdot \mathbf{v} = 3$ uavhengig av om den beregnes fra formel (4.11) i kartesiske koordinater eller formel (8.15) for kulekoordinater. Volumintegralet på venstre side i Gauss' sats (7.8) for en kule med radius r og sentrum i origo blir:

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{v} d\tau = 3 \int_{\tau} d\tau = 3V$$

hvor volumet av kula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Vektorfluksen på høyre side i Gauss' sats blir:

$$\int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\sigma} r \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_r d\sigma = r \int_{\sigma} d\sigma = rO$$

hvor overflaten av kula $O = 4\pi r^2$. Fra Gauss' sats får vi altså $3V = rO$ eller $V = \frac{r}{3}O$. Det viser at beregningene med Gauss' sats gir riktig resultat.

7.5 Noen kommentarer til utledningen av satsene

Vi har i det foregående ikke gjennomført stringente bevis for Greens, Stokes' og Gauss' sats, snarere en begrunnelse eller rettfærdiggjøring av satsenes gyldighet. Et fullstendig bevis vil først og fremst kreve at summen av bidragene fra "boksene" som flaten og volumet er delt i konvergerer mot volum- og flateintegraler når omdelingen i bokser forfines og går mot uendelig. Ved å benytte en oppdeling i flatelementer i trekanter og volumelementer i form av volumelementer med trekantede sideflater ville man kunne få en glattere tilpassning til et volum av en vilkårlig form som vil gjøre et stringent bevis lettere. En slik oppdeling ville ha felles trekk med den oppdelingen i gridelementer som brukes i finite-element metoder ved numeriske beregninger. I dette kurset hvor vi i første rekke skal fokusere på bruken av disse nyttige satsene vil vi imidlertid nøye oss med den utledningen som er gjort ovenfor.

7.6 Oppgaver

1. Gitt et to-dimensjonalt strømfelt i xy -planet $\mathbf{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$ hvor ω er en konstant.
 - a) Finn strømfarten $|\mathbf{v}|$ og vis at den er konstant på sirkler med origo som sentrum. Beregn deretter sirkulasjonen $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ omkring en sirkel med sentrum i origo og radius r .
 - b) Integrer $\nabla \times \mathbf{v}$ over samme sirkelflate og vis at Greens sats gjelder.
 - c) Beregn sirkulasjonen $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ om et kvadrat med sentrum i origo og sidekanter $\Delta x = \Delta y$. Demonstrer at Greens sats gjelder også i dette tilfellet.

2. Vi betrakter to-dimensjonal strøm i et tynt lag på en kuleflate. Det betyr at strømvektoren er tangensialt kuleflaten. Vi tenker oss å dele kula i to like store deler med et plan gjennom sentrum av kula. Delelinjen blir en storsirkel på kuleflaten.
 - a) Bruk Stokes' sats til å vise at integralet av virvlingsvektorens komponent normalt kuleflaten over de to kuleskalkene må være like store.
 - b) Radius av jordkloden er $R = 6370$ km og det meste av luften i atmosfæren er inneholdt i et tynt lag bare 10 km tykt. Hva blir den relative tykkelsen av atmosfæren dersom jordkloden skaleres ned til en kule med radius 1 meter? Begrunn hvorfor integralet av virvlingen i atmosfæren må være omtrent like stor på den sørlige og nordlige halvkule.

3. Gitt et tre-dimensjonalt strømfeltet $\mathbf{v} = \alpha(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ hvor α er en konstant.
- Beregn volumstrømmen $\int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ gjennom en kuleflate (σ) med radius r og sentrum i origo.
 - Hva blir volumstrømmen om kuleflaten deformeres til en flate av vilkårlig form?
4. Vis at flateintegralet av normalkomponenten av en vektor \mathbf{A} med konstant lengde og retning over en vilkårlig lukket, sammenhengende flate er lik null.
5. Vis at flateintegralet av en konstant (skalar) ganget med enhetsvektoren for en vilkårlig lukket, sammenhengende flate σ er lik null.
6. I en tank fylt med væske som er i ro er trykket gitt ved den hydrostatiske trykkformelen $p = p_0 - \rho gz$ hvor p_0 er lufttrykket over væsken, ρ er tettheten og g er tyngdens akselerasjon. z -aksen er lagt vertikalt og overflaten av væsken er ved $z = 0$. Enhetsvektoren i z -retning er \mathbf{k} . Vi tenker oss at vi “merker” et væskevolum τ med overflate σ av vilkårlig form.

- Begrunn at den totale trykkraften på det merkede væskevolumet er

$$\mathbf{F} = - \int_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma$$

hvor \mathbf{n} er normalvektoren på flata σ .

- Bruk Gauss' sats til å regne ut flateintegralet og vis at $\mathbf{F} = mg\mathbf{k}$ hvor m er den totale massen av den “merkede” væsken.
- Vi tenker oss at den merkede væsken “fryser”, men beholder form og volum. Den stivnede væsken erstattes av en fast kropp av nøyaktig samme form. Hva tror du at trykkraften på denne kroppen blir? Argumentet med solidifikasjon (frysing) ble først brukt av Simon Stevin (1558-1620) til å beregne oppdriftskraften på et legeme av vilkårlig form. Han var sjef for kanaler og vannverk i Nederland og matematiker.

7. En kraft \mathbf{F} er gitt ved uttrykket:

$$\mathbf{F} = (y^2 + 5)\mathbf{i} + (2xy - 8)\mathbf{j}$$

hvor x, y er kartesiske koordinater og \mathbf{i}, \mathbf{j} er enhetsvektorer henholdsvis langs de to akseretningene. I xy -planet merker vi av et kvadrat med et hjørne i origo $O = (0, 0)$ og sidekanter langs koordinataksene med de andre tre hjørnene $A = (1, 0)$, $B = (1, 1)$ og $C = (0, 1)$.

- Vis at kraften oppfyller kravet for at den kan avledes av et kraftpotensiale V og finn dette.

-
- b) Beregn arbeidet som kraften utfører langs veiene OAB og OB direkte ved å regne ut linjeintegralet for \mathbf{F} langs disse veiene.
- c) Beregn arbeidet ved å bruke kraftpotensialet. Hva slutter du av resultatene du får i b) og c).
- d) Beregn vektorfluksen av \mathbf{F} gjennom sidekantene av kvadratet $OABC$ både ved å beregne integraluttrykket for fluksen direkte og ved å bruke Gauss' sats.
- e) Beregn sirkulasjonen av \mathbf{F} rundt sidekantene av kvadratet $OABC$ både ved å beregne integraluttrykket for sirkulasjonen direkte og ved å bruke Greens (Stokes') sats.

Kapittel 8

Polarkoordinater

8.1 Innledning

Gradient, divergens og virvling er koordinatuavhengige størrelser, men uttrykket for disse størrelsene vil være forskjellig i forskjellige koordinatsystem. Frem til nå har vi hovedsakelig benyttet et kartesiske koordinatsystem, men i mange tilfeller vil det være mer hensiktsmessig å benytte andre koordinatsystemer. Vi skal her innføre plane, sylindriske og sfæriske polarkoordinater som ofte kommer til anvendelse henholdsvis i problemer hvor det er sirkulær eller sfærisk geometri. Ved strømming i sirkulære rør er det f.eks. hensiktsmessig å bruke sylindrisk polarkoordinatsystem og for strømming på en kuleflate (f.eks. i jordatmosfæren) kan det være nyttig å bruke sfæriske polarkoordinater (kulekoordinater). Med utgangspunkt i divergensteoremet (7.8) eller utledningene fram til likning (4.12) kan det formuleres koordinatuavhengige definisjonslikninger for divergens, gradient og virvling

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\Delta\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (8.1)$$

$$\nabla\beta = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\Delta\sigma} \beta \mathbf{n} d\sigma \quad (8.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = -\frac{1}{\Delta\tau} \int_{\Delta\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma \quad (8.3)$$

når $\Delta\sigma \rightarrow 0$ og $\Delta\tau \rightarrow 0$. Disse likningene kan brukes til å finne uttrykk for divergens, gradient og virvling i polarkoordinatsystemer, men utledningen blir fort omfattende og uoversiktlig. Her skal vi derfor innskrenke oss til å demonstrerer hvordan uttrykkene kan finnes direkte ved koordinattransformasjoner.

8.2 Transformasjon mellom kartesiske og polare koordinater

8.2.1 Plane polarkoordinater

I plane polarkoordinater er koordinatene r og θ , og vi betegner enhetsvektorene i radial og asimutal retning med henholdsvis \mathbf{i}_r , \mathbf{i}_θ (figur 8.1). Uttrykket for gradientvektoren i plane polarkoordinater kan utledes på en enkel måte. Vi tar da utgangspunkt i definisjonsligningen for gradientvektoren (2.5)

$$d\beta = \nabla\beta \cdot d\mathbf{r} \quad (8.4)$$

hvor $\beta = \beta(r, \theta)$ er en skalarfunksjon av r og θ . Tilveksten i β når r og θ endres henholdsvis med en størrelse dr og $d\theta$ kan skrives

$$d\beta = \frac{\partial\beta}{\partial r} dr + \frac{\partial\beta}{\partial\theta} d\theta$$

Nå er det vektorielle bueelementet i plane polarkoordinater

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{i}_r + r d\theta\mathbf{i}_\theta$$

Skal ligningen (8.4) stemme, må

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\mathbf{i}_\theta \quad (8.5)$$

som altså blir uttrykket for gradientvektoren i plane polarkoordinater. Vi legger merke til at faktoren $\frac{1}{r}$ inngår i θ -komponenten slik at begge komponentene i (8.5) uttrykker endring per lengdeenhet.

Uttrykket (8.5) kan også utledes ved en formel transformasjon fra x, y -koordinater til polarkoordinater r, θ . Utrekningene blir noe omstendelige. Sammenhengen mellom (r, θ) og de kartesiske koordinater (x, y) er gitt ved transformasjonsrelasjonene

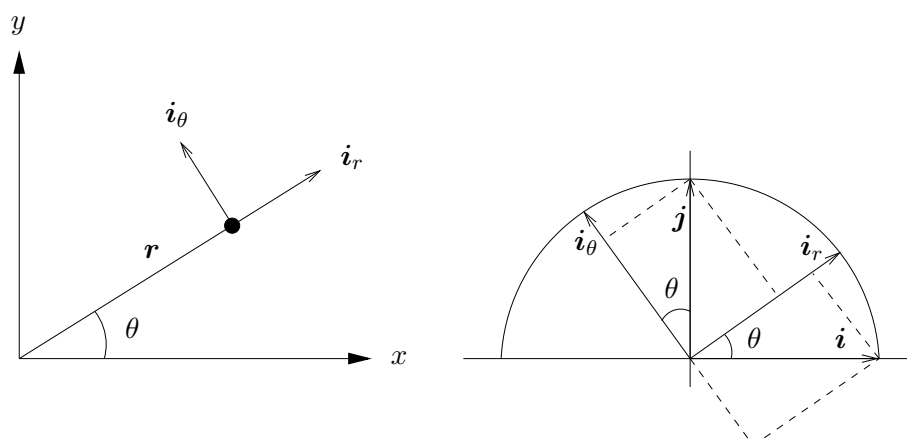
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (8.6)$$

og for enhetsvektorene

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \cos \theta \mathbf{i}_r - \sin \theta \mathbf{i}_\theta \\ \mathbf{j} &= \sin \theta \mathbf{i}_r + \cos \theta \mathbf{i}_\theta. \end{aligned}$$

Disse likningene danner grunnlaget for en mer formell utledning av ∇ -operatoren i plane polarkoordinater. Ved partiell derivasjon av de to likningene (8.6) med hensyn på x får en:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial r}{\partial x} \cos \theta - r \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial r}{\partial x} \sin \theta + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}. \end{aligned}$$



Figur 8.1: Plane polarkoordinater. Definisjonsskisse (til venstre), enhetsvektorer (til høyre).

Likeledes ved partiell derivasjon av de to likningene (8.6) med hensyn på y

$$0 = \frac{\partial r}{\partial y} \cos \theta - r \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$1 = \frac{\partial r}{\partial y} \sin \theta + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Ovenfor har vi nå fått to likningssett hver med to likninger til å bestemme de partielt deriverte $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ og $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$. Løsningene er:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}. \quad (8.7)$$

De partielt deriverte med hensyn på x, y av en skalar $\beta = \beta(r, \theta)$ er

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Ved hjelp av relasjonene (8.7) kan vi skrive

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \beta}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \beta}{\partial \theta}.$$

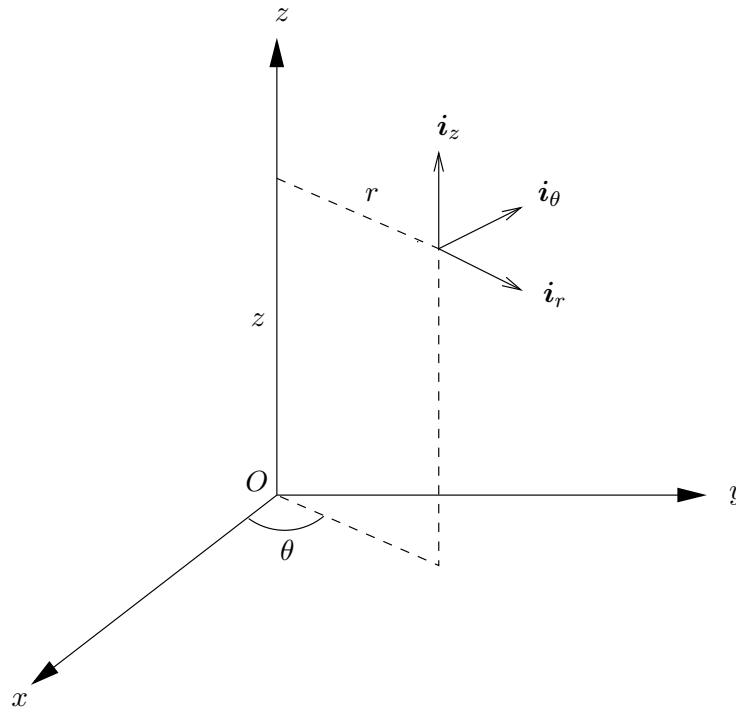
De relasjonene som her er utledet kan for eksempel brukes til å beregne uttrykket for gradienten til en skalar i plane polarkoordinater. Vi tar da utgangspunkt i definisjonslikningen for gradientvektoren i et kartesisk system

$$\nabla \beta = \frac{\partial \beta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \mathbf{j}.$$

Ved substitusjon på høyre side i denne likning finner vi etter enkel regning uttrykket for $\nabla\beta$ i plane polarkoordinater (likning (8.5)).

8.2.2 Sylindrisk polarkoordinatsystem

I et sylindrisk polarkoordinatsystem er koordinatene r , θ og z , og vi betegner enhetsvektorene i radial, asimutal og aksial retning med henholdsvis \mathbf{i}_r , \mathbf{i}_θ og \mathbf{i}_z .



Figur 8.2: Sylindriske polarkoordinater.

Sammenhengen mellom (r, θ) og de kartesiske koordinater (x, y) blir tilsvarende som for plane polarkoordinater. For z -koordinaten er det en enkel sammenheng

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} = \frac{\partial\beta}{\partial z}.$$

og $\mathbf{i}_z = \mathbf{k}$. Tar vi utgangspunkt i definisjonslikningen for gradientvektoren i et kartesisk system

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\mathbf{k}$$

kan vi ved substitusjon på høyre side finne uttrykket for $\nabla\beta$ i sylindriske polarkoordinater (se avsnitt 8.3).

8.2.3 Sfærisk polarkoordinatsystem (kulekoordinater)

I et sfærisk polarkoordinatsystem er koordinatene r , θ og φ med enhetsvektorer \mathbf{i}_r , \mathbf{i}_θ og \mathbf{i}_φ henholdsvis i radial, sonal og asimutal retning (se figur 8.3). Sammenlignet med

geografiske koordinater (bredde, lengde) vil koordinaten φ tilsvare lengdegrad og koordinaten θ polavstanden dvs. komplementvinkelen til breddegraden. Sammenhengen mellom (r, θ, φ) og de kartesiske koordinater (x, y, z) er gitt ved transformasjonsrelasjonene

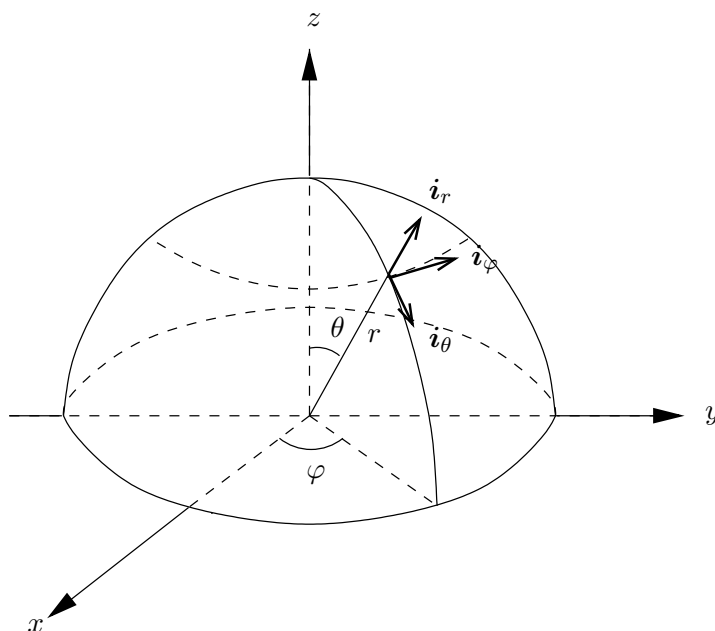
$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (8.8)$$

og for enhetsvektorene

$$\mathbf{i} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i}_r + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i}_\theta - \sin \varphi \mathbf{i}_\varphi$$

$$\mathbf{j} = \sin \theta \sin \varphi \mathbf{i}_r + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{i}_\theta + \cos \varphi \mathbf{i}_\varphi$$

$$\mathbf{k} = \cos \theta \mathbf{i}_r - \sin \theta \mathbf{i}_\theta.$$



Figur 8.3: Sfæriske polarkoordinater.

Ved partiell derivering av (8.8) finner man, etter ganske omfattende regninger, de partielt deriverte av r med hensyn på x, y og z

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \sin \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta \sin \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \cos \theta$$

for de partielt derivert av φ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

og for de partielt deriverte av θ

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\sin \theta}{r}.$$

Ved hjelp av disse formlene kan man nå gå frem på tilsvarende måte som for sylindriske polarkoordinater: først finne uttrykket for de partielt deriverte av en skalar $\beta = \beta(r, \theta, \varphi)$ med hensyn på x, y og z , og bruk dette til å finne uttrykkene for ∇ -operatorene i sfæriske koordinater. Selve framgangsmåten er grei, men regningene fører til ganske kompliserte uttrykk hvor flere ledd kan trekkes sammen dersom man regner riktig. Det er ingen grunn til å gjennomføre disse regningene her. Resultatene finnes i avsnitt 8.3.

8.3 ∇ -operatorene i polarkoordinater

Når man skal beregne uttrykket for ∇ -operatorene i plane, sylindriske og sfæriske polarkoordinatsystem er det enklest å gå ut fra de tilsvarende uttrykkene i kartesiske koordinater. En benytter de transformasjonsrelasjonene som ble utledet i forrige avsnitt og går frem på tilsvarende måte som vist i eksemplet for beregning av uttrykket for gradient i plane polarkoordinater. Dette leder til følgende uttrykk for gradient, divergens og virvling:

8.3.1 Plane polarkoordinater

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\mathbf{i}_\theta \quad (8.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} \quad (8.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\mathbf{k} \quad (8.11)$$

hvor A_r og A_θ betegner komponentene av vektoren \mathbf{A} og \mathbf{k} er enhetsnormalen til planet.

8.3.2 Sylindriske polarkoordinater

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\mathbf{i}_\theta + \frac{\partial\beta}{\partial z}\mathbf{i}_z \quad (8.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (8.13)$$

hvor A_r, A_θ og A_z betegner komponentene av vektoren \mathbf{A} .

8.3.3 Sfærisk polarkoordinater

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\beta}{\partial\varphi}\mathbf{i}_\varphi \quad (8.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (8.15)$$

hvor A_r , A_θ og A_φ betegner komponentene av vektoren \mathbf{A} .

Formelen for virlingen til en vektor i sfæriske polarkoordinater blir ganske komplisert

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mathbf{i}_r}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] + \frac{\mathbf{i}_\theta}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] + \frac{\mathbf{i}_\varphi}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$$

Formler for andre ∇ -operatører finnes i matematiske formelsamlinger om man skulle få bruk for dem (se f.eks. *Rottmann (1995)*).

8.4 Eksempler

Eksempel 1. Et skalarfelt er gitt i kartesiske koordinater (x, y) ved funksjonen

$$\beta = x^2 + y^2.$$

Det tilsvarende uttrykket for funksjonen i plane polarkoordinater (r, θ) finnes ved hjelp av transformasjonsformlene (8.6):

$$\beta = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2.$$

Uttrykket for gradientvektoren i kartesiske koordinater blir

$$\nabla \beta = \frac{\partial \beta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \mathbf{j} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} = 2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = 2\mathbf{r}$$

og i plane polarkoordinater

$$\nabla \beta = \frac{\partial \beta}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta = 2r\mathbf{i}_r.$$

Siden $2\mathbf{r} = 2r\mathbf{i}_r$, ser vi at de to uttrykkene for gradienten er det samme. Alternativt kan vi bruke transformasjonsformlene (8.6) og omforme uttrykket for gradientvektoren i kartesiske koordinater til polarkoordinater.

Eksempel 2. Skalarfeltet

$$\beta = \ln(x^2 + y^2)^{1/2}$$

kan skrives i plane polarkoordinater

$$\beta = \ln r.$$

Gradientvektoren uttrykt i polarkoordinater blir:

$$\nabla \beta = \frac{\partial \beta}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta = \frac{\partial \beta}{\partial r} \mathbf{i}_r = \frac{\mathbf{i}_r}{r}.$$

Beregning av gradientvektoren i kartesiske koordinater blir i dette tilfellet mer komplisert.

Eksempel 3. Et skalarfelt i kartesiske koordinater

$$\beta = xy$$

kan skrives i plane polarkoordinater

$$\beta = r \cos \theta r \sin \theta = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta$$

I kartesiske koordinater er gradientvektoren

$$\nabla \beta = \frac{\partial \beta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \mathbf{j} = y \mathbf{i} + x \mathbf{j}$$

Ved å bruke formler fra avsnitt 8.2.1 kan vi transformere dette uttrykket

$$\begin{aligned} \nabla \beta &= r \sin \theta (\cos \theta \mathbf{i}_r - \sin \theta \mathbf{i}_\theta) \\ &\quad + r \cos \theta (\sin \theta \mathbf{i}_r + \cos \theta \mathbf{i}_\theta) \\ &= r \sin 2\theta \mathbf{i}_r + r \cos 2\theta \mathbf{i}_\theta \end{aligned}$$

Samme uttrykk for $\nabla \beta$ får vi ved å bruke uttrykket for β i plane polarkoordinater ovenfor og formel (8.9).

8.5 Oppgaver

1. Gitt et skalarfelt $\beta = xy$ i kartesiske koordinater.
 - a) Finn uttrykket for β i plane polarkoordinater (r, θ) .
 - b) Beregn gradientvektoren $\nabla \beta$ både i kartesiske og polare koordinater og vis at dette gir samme vektor.
 - c) Beregn divergensen til $\nabla \beta$ i kartesiske og polare koordinater og vis at du får samme uttrykk.
 - d) Beregn virvlingen til $\nabla \beta$ i kartesiske og polare koordinater og vis at du får samme uttrykk.

2. Gitt et skalarfelt $\beta = \frac{A}{r}$ hvor $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ og A er en konstant.
 - a) Beregn gradientvektoren $\nabla \beta$ både i kartesiske og sfæriske polarkoordinater.
 - b) Beregn divergensen til $\nabla \beta$ i begge koordinatsystemene.

- 3.** I kartesiske koordinater er et hastighetsfelt gitt ved $\mathbf{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$.
- Finn det tilsvarende uttrykket for \mathbf{v} i polarkoordinater og vis at en kan skrive $\mathbf{v} = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{r}$ hvor $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ og \mathbf{k} er enhetsvektoren normalt xy -planet.
 - Beregn sirkulasjonen av \mathbf{v} langs begrensingskurven for et flatelement $ABCD$ som er del av et sektorsegment. Sidekantene ab og cd er sirkelbuer henholdsvis med lengde $r\Delta\theta$ og $(r + \Delta r)\Delta\theta$ og sidekantene bc og ad er deler av stråler fra origo med lengde Δr .
 - Bruk Stokes' sats og finn komponenten av virvlingen i z -retning i et vilkårlig punkt i feltet. Kontroller resultatet ved å beregne virvlingen direkte.
- 4.** I kartesiske koordinater er et hastighetsfelt gitt ved $\mathbf{v} = \frac{C}{2\pi} \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} \right)$ hvor C er en konstant.
- Finn det tilsvarende uttrykket for \mathbf{v} i polarkoordinater.
 - Beregn sirkulasjonen av \mathbf{v} langs begrensingskurven for flatelementet $ABCD$ definert i oppgave 3b.
 - Finn virvlingen i feltet.
 - Beregn sirkulasjonen av \mathbf{v} langs en sirkellinje med sentrum i origo. Hvordan tolker du resultatene i c) og d)?
- 5.** Et strømfelt i jordatmosfæren er gitt i sfæriske polarkoordinater ved $\mathbf{v} = f(\theta)\mathbf{i}_\varphi$ hvor enhetsvektoren \mathbf{i}_φ er rettet østover, θ er polavstanden og $f(\theta)$ er en vilkårlig funksjon av θ .
- Vis at feltet representerer en divergensfri strømning.
 - Velg $f(\theta) = C \sin 3\theta$ hvor C er en positiv konstant. Skisser strømprofilen som funksjon av breddegrad. Begrunn at man ved dette valget får et felt som skjematisk beskriver passat- og vestenvinds-feltet på henholdsvis lavere og høyere bredder.
 - Beregn sirkulasjonen av \mathbf{v} om en passende valgt lukket kurve på kuleflaten og finn deretter vertikalkomponenten av virvlingen i feltet.
- 6.** Jordkloden er omgitt av et gravitasjonsfelt hvor gravitasjonskraft (tyngdekraft) på en masse m kan uttrykkes ved Newtons gravitasjonslov

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM\mathbf{r}}{r^3}$$

hvor G er gravitasjonskonstanten, M er massen av jordkloden, \mathbf{r} er en vektor fra jordens sentrum til massen m og r er lengden av denne vektoren. Det er da forutsatt at jordkloden er kuleformet og at massefordelingen i jordens indre er kulesymmetrisk. I virkeligheten er det små avvik fra kuleformen og mindre lokale ujevnheter i massefordelingen i jorden som vi ser bort fra her.

- a) Vis at gravitasjonsfeltet er virvelfritt.
- b) Vis at gravitasjonspotensialet kan skrives $V = -\frac{GmM}{r} + V_0$ hvor V_0 er en konstant.
- c) Bestem V_0 slik at $V = 0$ ved jordoverflaten $r = R$. Finn et uttrykk for arbeidet som skal til for å løfte en romplattform med masse m fra jordoverflaten til en høyde h . Vi ser bort fra luftmotstand og antar at tyngdekraften er eneste kraft som virker. Bruk at tyngdeakselerasjonen ved jordoverflaten $g = \frac{GM}{R^2}$ til å forenkle formelen.

Kapittel 9

Divergens- og virvelfrie felter. Potensialstrøm

9.1 Innledning

Divergens- og virvelfrie felt spiller en viktig rolle i fluidmekanikk og elektromagnetisme. Det er derfor naturlig å behandle teorien for slike felter særskilt i et innføringskurs som dette.

Væske- eller gass-strømmer er vanligvis virvelfrie når friksjonsvirkningen er liten. For et skip som går gjennom vannet vil for eksempel friksjonsvirkningen være begrenset til et forholdsvis tynt *grensesjikt* langs bunnplatene og dessuten i kjølvannsstrømmen bak skipet. Likeledes vil friksjonsvirkningen i luftstrømmen omkring en flyving være begrenset til et tynt grensesjikt langs vingen. Utenfor grensesjiktet og kjølvannet vil strømmingen både omkring skipet og flyet være tilnærmet virvelfri. Det finnes mange andre eksempler hvor bevegelsen er virvelfri. Bølgebevegelse i vann er et annet viktig tilfelle. Strømning i vann eller luft kan regnes som divergensfri dersom strømhastigheten er mye mindre enn lydshastigheten som i luft er ca. 330 m/s og i vann ca. 1500 m/s. For praktiske anvendelser av hydrodynamikk spiller derfor virvelfri og divergensfri strøm en viktig rolle. I elektromagnetiske felter er den elektriske feltstyrken definert som en vektor ofte betegnet \mathbf{E} . Utfør områder med elektriske ladninger vil \mathbf{E} være divergensfri. Dersom det er stasjonære forhold slik at feltet ikke varierer i tiden vil \mathbf{E} også være virvelfri. Divergensfrie og virvelfrie elektriske felter er derfor et viktig spesialtilfelle i elektromagnetisk teori.

9.2 Hastighetspotensialet

Siden virvlingen til en gradientvektor er identisk null så vil betingelsen om at strømvektoren kan skrives som gradienten til en skalarfunksjon

$$\mathbf{v} = \nabla\phi \tag{9.1}$$

sikre at feltet er virvelfritt. Skalarfunksjonen ϕ kaller vi *hastighetspotensialet* eller *potensialfunksjonen*. Når bevegelsen er virvelfri eksisterer det alltid et potensiale som

hastigheten kan avledes av. Komponentene av vektoren $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ kan finnes fra potensialet

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

Kjenner man v_x , v_y og v_z som funksjoner av x , y og z kan man integrere disse likningene henholdsvis med hensyn på disse tre variable og bestemme hastighetspotensialet ϕ . Eksempelvis kan en finne potensialet for en kjent strømvektor på følgende måte. La komponentene av vektoren være $v_x = x$, $v_y = y$, $v_z = -2z$. At vektoren er virvelfri ser vi fort ved utregning og hastighetspotensialet er da bestemt ved likningene

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = y, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = -2z.$$

Vi integrerer likningene og får henholdsvis

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + f_1(y, z)$$

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2}y^2 + f_2(x, z)$$

$$\phi(x, y, z) = -z^2 + f_3(x, y)$$

hvor f_1 , f_2 og f_3 er ubestemte funksjoner. For å få entydig uttrykk for potensialet må vi velge

$$f_1(y, z) = \frac{1}{2}y^2 - z^2$$

$$f_2(x, z) = \frac{1}{2}x^2 - z^2$$

$$f_3(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

slik at potensialet blir

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - z^2.$$

Til dette potensialet kan vi alltid addere en vilkårlig integrasjonskonstant C , uten at det påvirker strømhastigheten fordi $\nabla C = 0$.

Er feltet i tillegg divergensfritt slik at:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

kan vi sette inn $\mathbf{v} = \nabla\phi$ og får

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0.$$

Det betyr at de funksjoner som kan brukes som hastighetspotensialet i et virvelfritt og divergensfritt felt må oppfylle likningen ovenfor.

9.3 Laplace-operatoren. Laplaceiske felt

Ovenfor dukket det opp en ny ∇ -operator som i kartesiske koordinater i tre dimensjoner har formen

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Denne operatoren kalles *Laplace-operatoren*. I to dimensjoner i xy -planet er den

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Bruker man uttrykket fra kapittel 8 for divergens og gradient i plane polarkoordinater (r, θ) finner man lett uttrykket for Laplace-operatoren i polarkoordinater.

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Betingelsen eller likningen som potensialet oppfyller kalles *Laplace-likningen* og skrives:

$$\nabla^2 \phi = 0.$$

Vi sier derfor at hastighetsfeltet er et Laplaceisk felt og selve strømningsformen blir ofte betegnet *potensialstrømning*.

Pierre Simon Laplace (1749-1827), født i Normandie i en bondefamilie. Ble tidlig lagt merke til på grunn av usedvanlige analytiske evner og ble 18 år gammel professor i matematikk ved *Ecole Militaire* i Paris. Kjent for sine arbeider innen beregninger av planetbaner (celest mekanikk). Formulerte de grunnleggende likninger for beregning av tidevann i havet. Arbeidet også med overflatebølger. Han ble vist stor respekt under skiftende politiske forhold i Frankrike. Hadde flere ansvarsfulle stillinger under Napoleon, men Napoleon bemerket: "Matematiker av første klasse, men en middelmådig administrator som tok med seg inn i administrasjonen sansen for det infinitesimale".

9.4 Potensialfelter i to dimensjoner

I det følgende skal vi studere noen viktige potensialfelter som altså kan avledes fra et hastighetspotensial ϕ som oppfyller Laplace-likningen. Holder vi oss til to-dimensjonale strømfelt eller vektorfelt, $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$, vil det, siden feltet er divergensfritt, alltid eksistere en *strømfunksjon* eller *feltfunksjon* ψ slik at:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Samtidig har vi fra (9.1) at:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Derved har vi følgende relasjoner mellom hastighetspotensialet og strømfunksjonen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x} &= -\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{\partial\psi}{\partial x}.\end{aligned}$$

Dette kan skrives som en vektorlikning

$$\nabla\phi = \mathbf{k} \times \nabla\psi. \quad (9.2)$$

Disse likningene har navnet Cauchy-Riemann relasjonene etter Baron Augustin Louis Cauchy (1789-1857), kjent fransk ingeniør og matematiker, og Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), professor i matematikk i Göttingen. Cauchy-Riemann relasjonene viser at gradientvektorene til hastighetspotensialet og strømfunksjonen står vinkelrett på hverandre.

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

Ekviskalarlinjene for ϕ og ψ er altså normale, eller ortogonale, til hverandre.

Tar man utgangspunkt i likning 9.2 kan en sette opp uttrykkene for Cauchy-Riemann relasjonene i plane polarkoordinater (r, θ) . Nå er

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \mathbf{i}_\theta$$

og

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \mathbf{i}_\theta.$$

Derved blir

$$\mathbf{k} \times \nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} \mathbf{i}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \mathbf{i}_r.$$

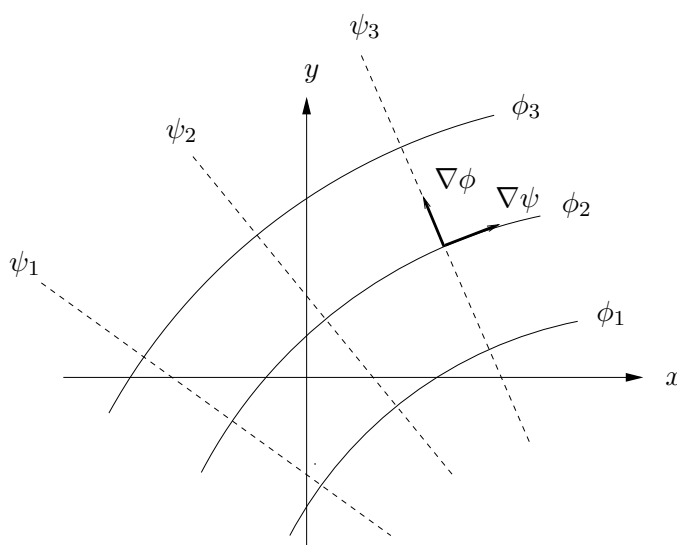
Innsatt i vektorlikningen 9.2 gir dette

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial r}$$

som er Cauchy-Riemann relasjonene uttrykt i polarkoordinater. Komponentene av strømvektoren $\mathbf{v} = \{v_r, v_\theta\}$ er altså:

$$\begin{aligned}v_r &= \frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\end{aligned} \quad (9.3)$$

For feltene som vi skal studere i fortsettelsen vil det ofte være hensiktsmessig å bruke polarkoordinater og relasjonene som vi har satt opp her vil da komme til nytte.

Figur 9.1: Ekviskalarlinjene for ϕ og ψ er ortogonale

9.4.1 Rettlinjet strøm (uniformt felt)

Strømvektoren \mathbf{v} har konstante komponenter v_x, v_y . I dette feltet er det ingen hastighetsgradienter og feltet er automatisk divergensfritt og virvelfritt. Hastighetspotensialet med tilhørende strømfunksjon er henholdsvis:

$$\begin{aligned}\phi &= v_x x + v_y y \\ \psi &= -v_x y + v_y x.\end{aligned}$$

Feltet representerer en uniform rettlinjet strøm U_0 , hvor strømretningen danner vinkelen α med x -aksen og

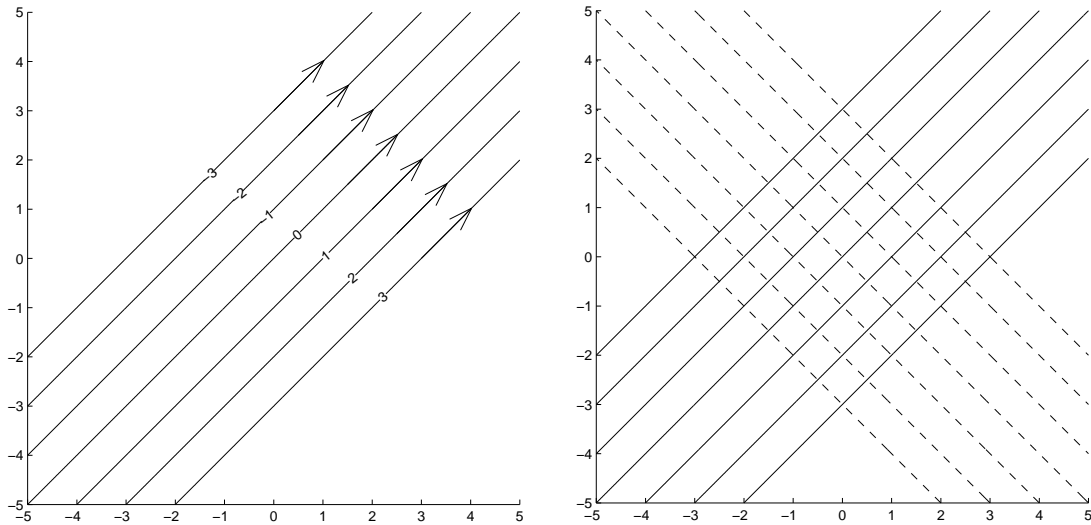
$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}.$$

9.4.2 Stagnasjonsstrøm

I et strømfelt snakker vi ofte om *stagnasjonspunkter* dvs punkter hvor strømhastigheten er null ($\mathbf{v} = 0$). Slike punkter dukker opp i forskjellige forbindelser. Her skal vi vise et eksempel på strømfeltet i nærheten av et stagnasjonspunkt.

Hastighetspotensialet med tilhørende strømfunksjon

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{A}{2}(x^2 - y^2) \\ \psi &= -Axy\end{aligned}$$



Figur 9.2: Uniformt felt med $u_0 = v_0 = 1$. Strømlinjer med verdier til venstre, strømmlinjer (heltrukne linjer) og feltlinjer for hastighetspotensialet (stiplede linjer) i samme figur til høyre. Strømretningen er som angitt på figuren til venstre.

representerer et divergensfritt og virvelfritt felt. Strømvektoren \mathbf{v} har komponenter:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = Ax$$

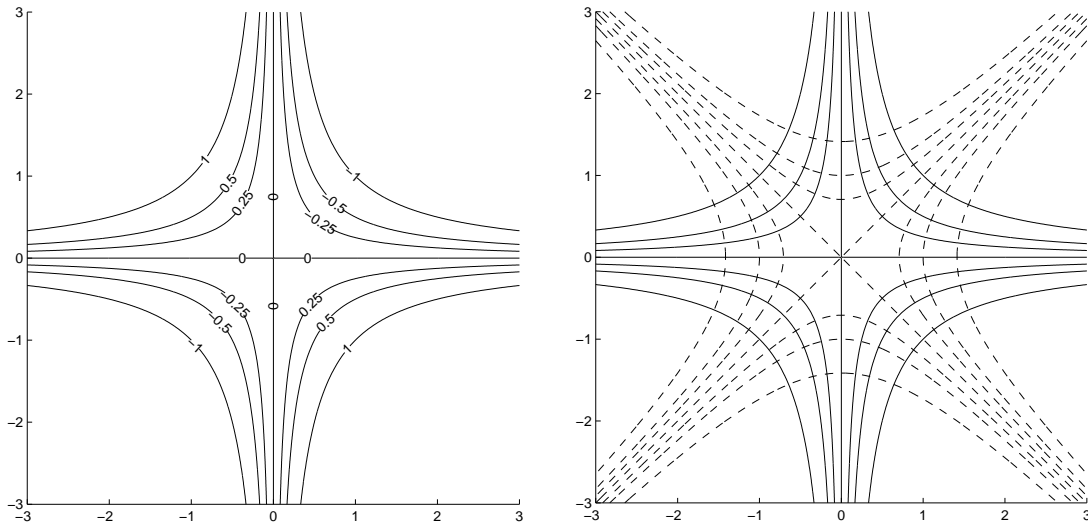
$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -Ay$$

og en ser lett at både $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ og $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Strømlinjene er gitt ved $\psi = \psi_0 = \text{konstant}$, og likningen for strømmlinjene blir

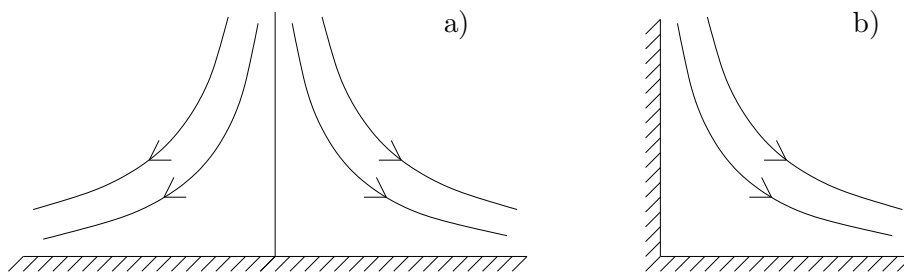
$$Axy = \psi_0.$$

Strømlinjene blir hyperbler med x - og y -aksen som asymptoter. For strømlinjen $\psi_0 = 0$ er $x = 0$ eller $y = 0$ og hyperblene degenereres til koordinataksene. Strømlinjebildet for $A > 0$ er skissert i figur 9.3.

For $A < 0$ vil strømlinjene ha samme form, men retningen av strømmen vil være motsatt. I origo er strømhastigheten null og vi har altså et *stagnasjonspunkt* i feltet. Funksjonene ϕ og ψ kan brukes til å beskrive strømmen i nærheten av stagnasjonspunkter. Siden x - og y -aksen danner et sett av strømlinjer, kan vi for eksempel tenke oss at deler av disse representerer faste vegger. Vi kan da få strømlinjebildet for en strøm inn mot en vegg og for strøm i et rettvinklet hjørne (se figur 9.4). I praksis vil friksjonsvirkningen være stor særlig nær veggen hvor friksjonen medfører at hastigheten er null. I tilfellet (a) vil friksjonsvirkningen være begrenset til et tynt lag nær veggen (grensesjikt) og det virvelfrie feltet gir en god beskrivelse av strømmen utenfor dette tynne sjiktet. I tilfellet (b) vil friksjonsvirkningen blant annet medføre at det vil oppstå en eller flere virvler ved hjørnet og strømmen kan avvike betydelig fra det virvelfrie feltet også langt fra hjørnet.



Figur 9.3: Stagnasjonsfelt med $A = 1$. Strømlinjer med verdier til venstre, strømlinjer (heltrukne linjer) og feltlinjer for hastighetspotensialet (stiplede linjer) i samme figur til høyre. Origo $(0,0)$ er et stagnasjonspunkt i dette feltet.



Figur 9.4: Strøm mot vegg (til venstre) og i hjørne (til høyre).

9.4.3 Kilde og sluk

Kilde og sluk representerer strøm radielt rettet henholdsvis ut fra eller inn mot et senter. Det er enklest å diskutere dette når vi bruker polarkoordinater r, θ . Hastighetskomponentene er da:

$$v_r = \frac{A}{r}, \quad v_\theta = 0$$

hvor A er en konstant. Det tilsvarende at hastighetspotensialet (potensialfunksjonen) og strømfunksjonen (feltfunksjonen) er

$$\phi = A \ln r$$

$$\psi = -A\theta$$

Fra formler i kapittel 8 finner vi at

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = 0$$

og

$$\nabla \times \mathbf{v} = -\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \mathbf{k} = 0.$$

Feltet er altså divergensfritt og virvelfritt overalt utenom i origo. I origo ($r = 0$) er hastigheten uendelig og dette punktet må utelates. Matematisk sier vi at $r = 0$ er et *singulært punkt* i feltet. Hastigheten er overalt i feltet rettet radielt fra origo (O) og den avtar omvendt proporsjonalt med avstanden fra O . Strømhastigheten er rettet utover eller innover fra O avhengig av om A er positiv eller negativ. I begge tilfeller ser strømlinjebildet ut som på figur 9.5.

Utstrømningen fra eller innstrømningen mot origo finner vi ved å integrere volumstrømmen over en sirkel om O med radius r . Dette gir

$$Q = \int_0^{2\pi} v_r r \, d\theta = 2\pi A.$$

Konstanten Q betegnes ofte som *styrken* av kilden eller sluket. Noen ganger blir konstanten A i potensialfunksjonen kalt styrken.

9.4.4 Punktvirvel

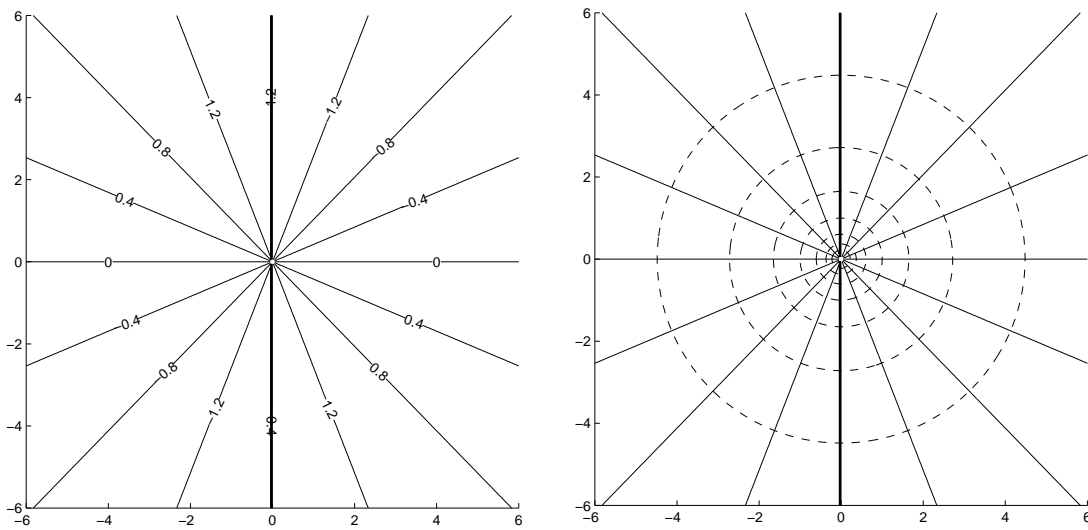
Hastighetskomponentene i radiell og asimutal retning er henholdsvis

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{A}{r}$$

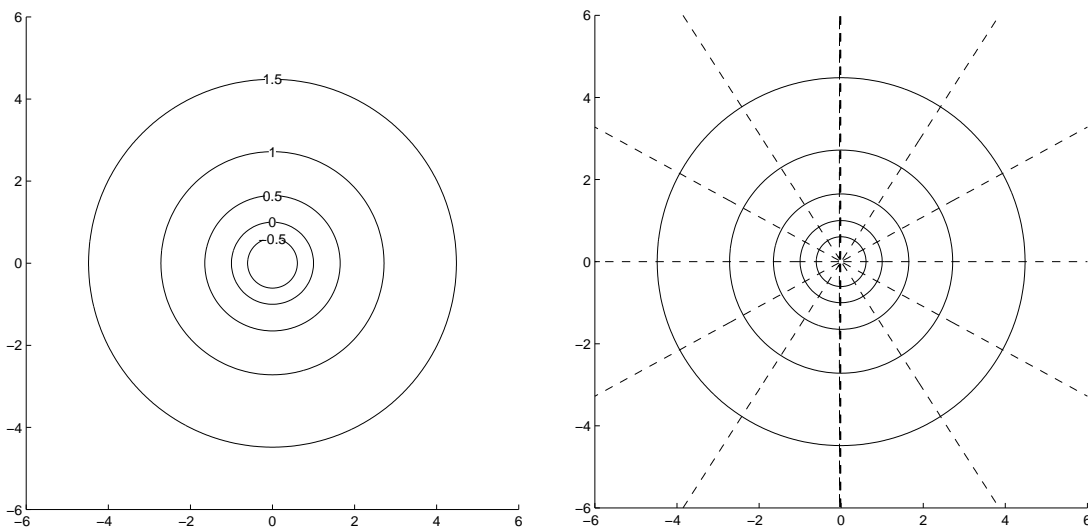
hvor A er en konstant. Hastigheten er rettet normalt på radiusvektor fra origo (O), og den avtar omvendt proporsjonalt med avstanden fra O . Hastighetspotensialet (potensialfunksjonen) og strømfunksjonen (feltfunksjonen) for punktvirvelfeltet er henholdsvis

$$\phi = A\theta$$

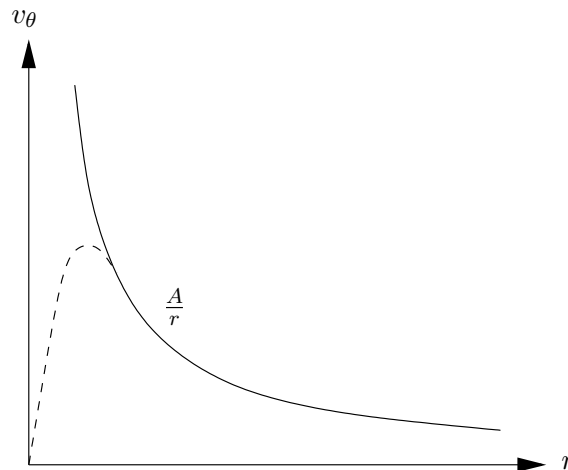
$$\psi = A \ln r.$$



Figur 9.5: Kilde og sluk. Strømlinjer med verdier til venstre, strømlinjer (heltrukne linjer) og feltlinjer for hastighetspotensialet (stiplede linjer) i samme figur til høyre. For $A > 0$ vil det strømme ut fra origo (kilde), mens det for $A < 0$ vil strømme inn mot origo (sluk). I denne figuren er $A = 1$.



Figur 9.6: Punktvirvelfelt for $A = 1$. Strømlinjer med verdier til venstre, strømlinjer (heltrukne linjer) og feltlinjer for hastighetspotensialet (stiplede linjer) i samme figur til høyre. Feltet beveger seg i retning mot klokken.



Figur 9.7: Hastigheten v_θ som funksjon av r for punktvirvel (heltrukken kurve). I en virkelig virvel vil hastigheten gå mot null i sentrum av virvelen (stiplet).

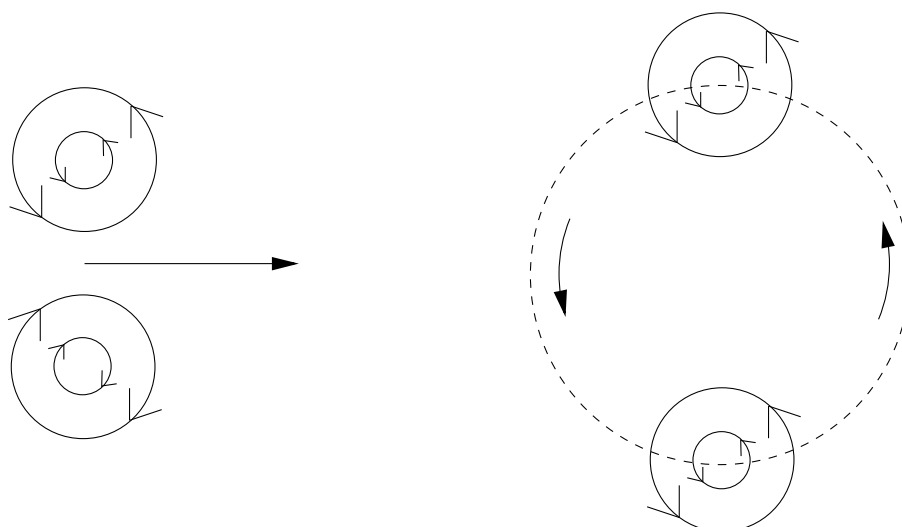
Strømlinjene som i dette tilfellet blir sirkler med sentrum i O er skissert i figur 9.6. I punktet O hvor $r = 0$ er hastigheten uendelig stor, og dette punktet må utelates om man skal gi feltet en fysikalsk tolkning. Matematisk sier vi at $r = 0$ er et *singulært punkt* i feltet. Overalt utenfor origo er feltet divergensfritt og virvelfritt og det kan lett vises ved å regne ut $\nabla \cdot \mathbf{v}$ og $\nabla \times \mathbf{v}$ slik som vi gjorde for kilde/sluk. Hastighetssirkulasjonen om en lukket kurve som omgir O er forskjellig fra null. Velger vi å integrere hastigheten langs en sirkel med sentrum i O og radius r finner vi at hastighetssirkulasjonen er

$$C = \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = 2\pi A.$$

Sirkulasjonen om en lukket kurve som ikke omslutter origo er imidlertid null. Fordi feltet er virvelfritt vil et væskeelement (untatt i O) ikke rotere. Et væskeelement i O vil imidlertid rotere med uendelig stor vinkelhastighet. Av den grunn sier vi at feltet representerer en *punktvirvel*. En kaller også dette feltet *virvelfri sirkulasjon* for å understreke at feltet er virvelfritt, men har sirkulasjon når vi beregner sirkulasjonen om en kurve som omslutter singulariteten i origo.

Punktvirvelfeltet er en primitiv modell av en virkelig virvel. Eksempler på dette er intense virvler i atmosfæren (sykloner) eller virvler i tynne væskelag hvor de dominerende strømhastigheter tilnærmet tilsvarer plan bevegelse. I disse virvlene vil hastigheten avta på grunn av friksjonsvirkningen inn mot sentret i virvelen slik som antydnet på figur 9.6. Er man tilstrekkelig langt fra sentret, så vil hastigheten imidlertid ofte variere på samme måten som i punktvirvelen.

Punktvirvler vil bevege seg under påvirkning av hverandre ved at virvlene driver i hastighetsfeltet satt opp av nabovirvlene. To virvler av samme styrke, men med motsatt sirkulasjon, vil for eksempel bevege seg rettlinjett fremover, mens de holder samme avstand fra hverandre (virvelpar). To virvler av samme styrke, men med samme sirkulasjon, vil rotere omkring hverandre som planeter (figur 9.8). Studiet av dannelse av virvler og interaksjon mellom virvler er et interessant og aktuelt forskningsfelt hvor det



Figur 9.8: To punktvirvler som beveger seg i hverandres felt

er stor aktivitet. Ved Eindhoven University of Technology, Nederland¹ og ved Cornell University, USA² er det blant annet meget aktive forskningsgrupper innen dette feltet.

9.4.5 Superposisjon av felt

Felter som representerer potensialstrøm kan adderes sammen (superponeres) og resultatet vil være et nytt potensialfelt. Har man for eksempel to potensialfelt med strømvektorer henholdsvis \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 så er

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v}_1 = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v}_2 = 0.$$

Superponerer man de to feltene får man en ny strømvektor $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Nå er

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \nabla \cdot \mathbf{v}_2 = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}_1 + \nabla \times \mathbf{v}_2 = 0$$

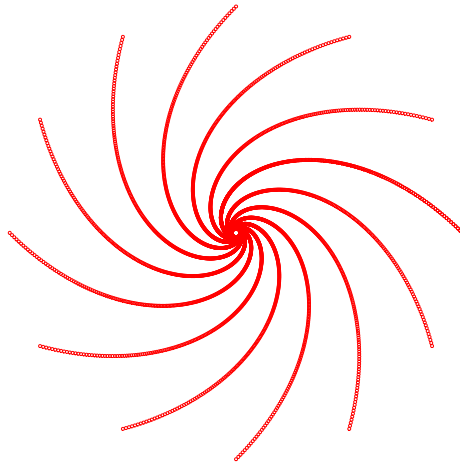
som viser at det nye feltet også er divergens- og virvelfritt. Dersom hastighetspotensialet og strømfunksjonene for de to feltene betegnes henholdsvis ϕ_1 , ϕ_2 og ψ_1 , ψ_2 så får man hastighetspotensialet og strømfunksjonen for det nye feltet ved å addere

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2.$$

¹<http://www.fluid.tue.nl/>

²<http://dragonfly.tam.cornell.edu/cfd.html>



Figur 9.9: Spiralfeltet, likning 9.4, tegnet med $a = 1$, $\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \dots$

9.4.6 Spiralvirvel

Eksempelvis skal vi addere feltet for en sluk med et punktvirvelfelt. I polarkoordinater blir strømfunksjonen for det nye feltet:

$$\psi = A_1\theta + A_2 \ln r.$$

Likningen for en strømlinje blir da:

$$A_1\theta + A_2 \ln r = \psi_0$$

som kan skrives:

$$\ln r = \frac{\psi_0}{A_2} - \frac{A_1}{A_2}\theta.$$

Lar vi henholdsvis høyre og venstre side i denne likningen være eksponenter for e

$$e^{\ln r} = e^{\frac{\psi_0}{A_2} - \frac{A_1}{A_2}\theta}$$

som gir

$$r = e^{-a(\theta - \theta_0)} \tag{9.4}$$

hvor $a = \frac{A_1}{A_2}$ og $\theta_0 = \frac{\psi_0}{A_1}$.

9.4.7 Dipolfeltet

Et spesielt viktig felt fremkommer ved å addere feltene for en kilde og sluk som ligger nært inntil hverandre. Dette feltet kalles dipolfeltet. Potensialet kan skrives

$$\phi = \frac{Ax}{x^2 + y^2} \tag{9.5}$$



Figur 9.10: Spiralgalaksen M51, også kalt malstrømgalaksen, fotografert med Hubble Space Telescope, NASA. Spiralstrukturen tyder på en rotasjon i feltet inn mot sentrum av galaksen tilsvarende spiralfeltet, men bare to armer synes å fremheves.

med tilhørende strømfunksjonen

$$\psi = \frac{Ay}{x^2 + y^2}.$$

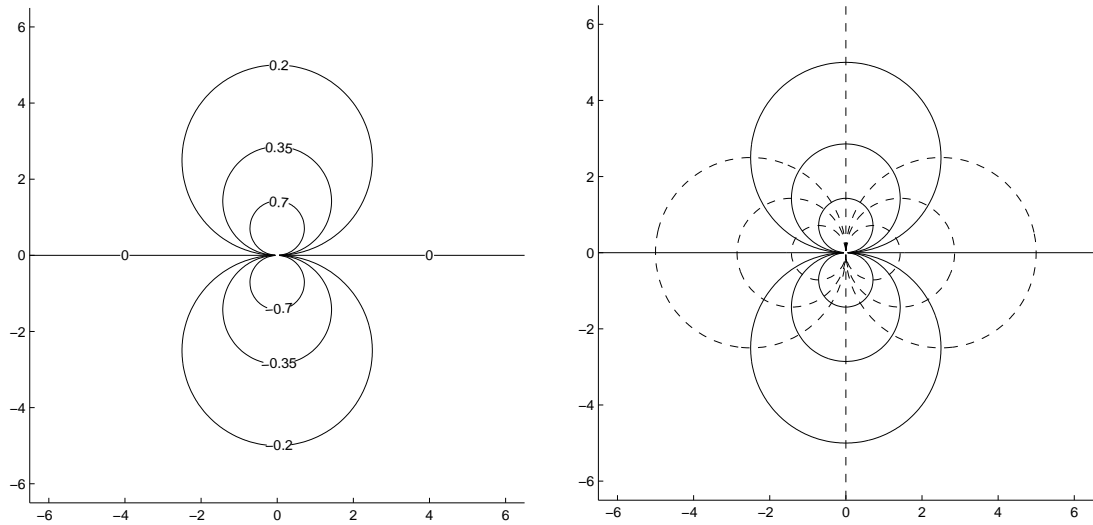
Likningen for strømlinjene er gitt ved $\psi = \psi_0 = \text{konstant}$. Etter litt regning (se oppgave 3) får man

$$x^2 + \left(y - \frac{A}{2\psi_0}\right)^2 = \left(\frac{A}{2\psi_0}\right)^2.$$

Dette viser at strømlinjene er sirkler med sentrum på y -aksen og med x -aksen som tangent (figur 9.11). En sier derfor at denne dipolen har x -aksen som dipolakse.

Dipolfeltet opptrer i mange grener av fysikk ikke bare i hydrodynamikk. I elektromagnetisme kan for eksempel de magnetiske feltlinjene omkring en magnetstav representeres ved et dipolfelt.

Dipolfeltet fremkommer ved en grenseovergang hvor en kilde og en sluk legges uendelig nært inntil hverandre. Vi legger en sluk i punktet $(a, 0)$ og en kilde i $(-a, 0)$ hvor



Figur 9.11: Dipolfelt med $A = 1$. Strømlinjer med verdier til venstre, strømlinjer (heltrukne linjer) og feltlinjer for hastighetspotensialet (stiplede linjer) i samme figur til høyre. For $y > 0$ strømmer det med klokken, mens for $y < 0$ vil strømmen gå mot klokken.

a er positiv. Settes styrken av kilden og sluket til $\frac{A}{2a}$ kan potensialet skrives

$$\phi = -\frac{A}{2a} \ln \left[(x-a)^2 + y^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{A}{2a} \ln \left[(x+a)^2 + y^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ved å bruke regneregler for logaritmefunksjonen og Taylorutvikling (se oppgave 3) kan vi vise at dette uttrykket for potensialet i grensen $a \rightarrow 0$ vil få formen (9.5).

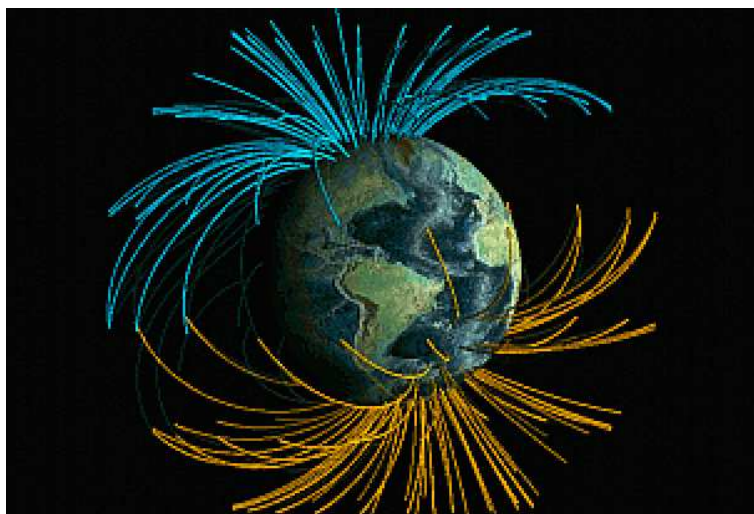
9.5 Oppgaver

1. For hvilke av følgende to-dimensjonale strømfelt \mathbf{v} eksisterer det et hastighetspotensiale? Finn hastighetspotensialet ϕ i de tilfellene det eksisterer. Finn strømfunksjonen i de tilfellene den eksisterer.

- $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
- $\mathbf{v} = x^2y\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j}$
- $\mathbf{v} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$

2. Hvilke av følgende tre skalarfunksjoner $\phi = \phi(x, y)$ kan brukes som hastighetspotensiale for en divergensfri strøm? Finn strømfunksjonen $\psi = \psi(x, y)$ i de tilfellene den eksisterer og skisser strømlinjene og ekviskalarlinjer for potensialfunksjonen.

- $\phi = xy$



Figur 9.12: Det jordmagnetiske feltet beregnet og visualisert på grunnlag av modeller av en antatt dynamo i jordens kjerne. Dipolstrukturen i feltet kan tydelig gjenkjennes. Fra Gary Glatzmaier, Los Alamos and Paul Roberts, UCLA, <http://www.psc.edu/research/graphics/gallery/geodynamo.html>.

b) $\phi = xy^2 - x^2y$

c) $\phi = x^2 - y^2$

3. Vi skal i denne oppgaven utføre mellomregningene fra seksjon 9.4.7.

a) Dipolfeltet har strømfunksjon

$$\psi = \frac{Ay}{x^2 + y^2}.$$

Vis at likningen for strømlinjene kan skrives som

$$x^2 + \left(y - \frac{A}{2\psi_0}\right)^2 = \left(\frac{A}{2\psi_0}\right)^2.$$

b) Vi legger en sluk i punktet $(a, 0)$ og en kilde i punktet $(-a, 0)$ hvor a er en liten positiv verdi ($x^2 + y^2 \gg a^2$). Styrken av kilden og sluket settes til $A/2a$. Vis at potensialet kan skrives som

$$\phi = -\frac{A}{2a} \ln \left[(x - a)^2 + y^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{A}{2a} \ln \left[(x + a)^2 + y^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

c) Bruk kjente regneregler for logaritmefunksjonen til å omskrive potensialet til

$$\phi = \frac{A}{4a} \ln \frac{(x + a)^2 + y^2}{(x - a)^2 + y^2}.$$

d) Vis at brøken i logaritmeargumentet over kan tilnærmes med

$$\frac{1 + \frac{1}{2}\epsilon}{1 - \frac{1}{2}\epsilon}, \quad \epsilon = \frac{4ax}{x^2 + y^2}.$$

e) Bruk Taylorutvikling (til første orden) til å vise

$$\frac{1 + \frac{1}{2}\epsilon}{1 - \frac{1}{2}\epsilon} \cong 1 + \epsilon.$$

f) Bruk Taylorutvikling (til første orden) til å vise

$$\ln(1 + \epsilon) \cong \epsilon.$$

Anvend rekkeutviklingene fra e) og f) til å komme frem til uttrykket

$$\phi = \frac{Ax}{x^2 + y^2}.$$

4. Adder (superponer) translasjonsfeltet med strømfunksjon $\psi_1 = Uy$ og kildefeltet med strømfunksjon $\psi_2 = -A\theta$. Finn likningen for strømlinjene. Vis at strømlinjene $\psi = 0$ er gitt ved $r = \frac{A\theta}{U \sin \theta}$. Velg $\frac{A}{U} = 1$ og skisser strømlinjene.

5. Vis at hastighetspotensialet og strømfunksjonen for en kilde i origo kan uttrykkes i kartesiske koordinater xy henholdsvis ved $\phi = A \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ og $\psi = -A \arctan(y/x)$. Finn x - og y -komponentene av strømvektoren.

6. Finn hastighetspotensialet og strømfunksjonen for to kilder med samme styrke A , en i punktet $(0, a)$ den andre i $(0, -a)$. Bruk Matlab til å tegne strømlinjene. Velg konstantene $A = 1$, $a = 1$ og $A = 1$, $a = 5$.

7. Finn uttrykket for hastighetspotensialet og strømfunksjonen for en punktvirvel med sentrum i origo i kartesiske koordinater xy og bestem x - og y -komponentene av strømvektoren.

8. Adder (superponer) translasjonsfeltet med strømfunksjon $\psi_1 = -Uy$ og dipolfeltet med strømfunksjon $\psi_2 = \frac{Ay}{x^2 + y^2}$.

- Innfør polarkoordinater $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Sett $A = a^2 U$ hvor a er en konstant. Vis at $\psi = \psi_1 + \psi_2$ kan skrives $-U \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \right] r \sin \theta$.
- Finn strømkomponentene v_r og v_θ . Hva er strømhastigheten på sirkellinjen $r = a$?
- Skisser strømlinjene [Hint: Begynn med strømlinjen $\psi = 0$]. Forklar hvorfor feltet for $r > a$ representerer strøm omkring en sylinder. Hva representerer feltet for $r < a$?

9. Den elektriske feltstyrken utenfor en elektrisk ladet partikkel er gitt ved

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{r^2} \mathbf{i}_r$$

hvor r er avstanden fra partikkelen og \mathbf{i}_r er en enhetsvektor i radiell retning. Q er ladningen som er konstant. Finn potensialet.

Kapittel 10

Feltlikninger for fluider

10.1 Innledning

Som fellesnavn for væsker og gasser brukes betegnelsen *fluider*. Felles for dem er at de er flytende og tar form av den beholder de er i. Vann og luft er de mest vanlige eksemplene på fluider. Disse er kontinuerlige medier i den betydning at selv meget små mengder av mediet inneholder et stort antall molekyler ved vanlig trykk og temperatur. De fysiske parametrene som strømhastighet, trykk, temperatur og tetthet kan derfor defineres selv for små delmengder som ligger tett inntil hverandre. Slik kan de fysiske parametrene oppfattes som kontinuerlige funksjoner av rom og tid bestemt i alle punkter i mediet. Vi kan på denne måten beskrive de fysiske forhold i fluidet ved hastighetsfelt, trykkfelt, temperaturfelt og tetthetsfelt.

Noen ganger er det nyttig å følge bevegelsen av en liten delmengde av fluidet. Vi bruker ofte betegnelsen en *fluidpartikkel* om en slik delmengde.

I det følgende skal vi bruke den matematikk som vi nå har lært til å formulere de fundamentale feltlikningene som styrer strømning og varmetransport i fluider.

10.2 Partikkelderivasjon

Vi har tidligere i avsnitt 2.3 innført begrepet retningsderivert som uttrykker hvordan en variabel endrer seg i en bestemt retning. Nå skal vi se på endringer i en parameter når vi følger en partikkel som flyter i feltet. Strømfeltet er gitt ved vektoren

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

som er en funksjon av posisjonsvektoren \mathbf{r} og tiden t . Forskyvningen av en partikkel i feltet i tidsintervallet Δt er

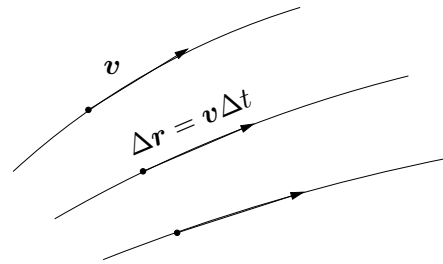
$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \Delta t. \quad (10.1)$$

På komponentform kan denne vektorlikningen skrives

$$\Delta x = v_x \Delta t, \quad \Delta y = v_y \Delta t, \quad \Delta z = v_z \Delta t,$$

hvor v_x , v_y og v_z betegner komponentene av \mathbf{v} . Endringen av en skalarstørrelse $\theta(\mathbf{r}, t)$ langs partikkelens forskyvningsretning i tidsrommet Δt er

$$\Delta \theta = \theta(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) - \theta(\mathbf{r}, t).$$



En Taylorutvikling til første orden av første ledd på høyre side i uttrykket gir at

$$\Delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\theta}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\theta}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial\theta}{\partial t}\Delta t.$$

Bruker vi nå komponentformen av likning 10.1 får vi

$$\Delta\theta = \left[\frac{\partial\theta}{\partial x}v_x + \frac{\partial\theta}{\partial y}v_y + \frac{\partial\theta}{\partial z}v_z + \frac{\partial\theta}{\partial t} \right] \Delta t.$$

Derved kan endringen i θ per tidsenhet skrives

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + \frac{\partial\theta}{\partial t}. \quad (10.2)$$

Lar vi $\Delta t \rightarrow 0$ vil $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ gå mot den tidsderiverte av parameteren θ når vi følger en partikkel som flyter i feltet. Vi skriver dette

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow \frac{D\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta$$

når $\Delta t \rightarrow 0$. Derivasjonen $\frac{D\theta}{dt}$ blir kalt den *partikkelderiverte* av funksjonen θ . Vi markerer at det her er snakk om en spesiell derivasjon ved å bruke notasjonen med stor D i derivasjonssymbolet. Denne derivasjonen kan oppfattes som en differensialoperator

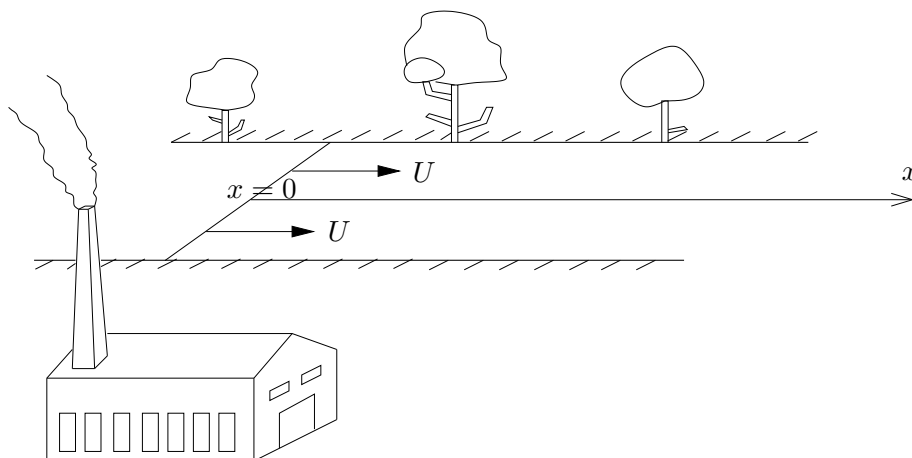
$$\frac{D}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (10.3)$$

som her altså er brukt på skalarfunksjonen $\theta = \theta(\mathbf{r}, t)$. Skalarfunksjonene θ kan for eksempel betegne temperaturfeltet i atmosfæren, saltholdighet eller konsentrasjonen av sporstoffer eller forurensninger i havet.

10.2.1 Eksempel: Transport av forurensninger i en elv

Vi antar at elva er rett og jevnbred. Vi legger x -aksen midt i elva langs lengderetningen. Strømmen i elva antar vi er konstant i lengderetningen og at strømmen heller ikke varierer på tvers av elva. Strømvektoren kan da skrives

$$\mathbf{v} = U\mathbf{i}.$$



Figur 10.1: Giftstoffene ble sluppet i elva på stedet $x = 0$ ved tiden $t = 0$. Strømmen i elva er rettet langs x -aksen og har hastighet U .

En industribedrift som ligger ved elva har ved et uhell sluppet giftstoffer ut i elva ved tiden $t = 0$. Konsentrasjonen av gift per volumenhet er gitt ved

$$c(x, t = 0) = c_0 e^{-(x/L)^2}$$

hvor lengden L beskriver utstrekningen av området som er forurenset. Konsentrasjonen er høyest rett ut for fabrikkens og avtar oppover og nedover elva slik at i en avstand L fra fabrikkens er konsentrasjonen sunket til en e -del. Det er ingen variasjon i konsentrasjonen på tvers av elva. Dersom forurensningen flytter med elvestrømmen uten ytterligere spredning, vil konsentrasjonen for $t > 0$ kunne skrives

$$c(x, t) = c_0 e^{-[(x-Ut)/L]^2}.$$

Står vi på et sted $x = 4L$ nedstrøms for fabrikkens, vil konsentrasjonen av giftstoffer variere i tiden etter formelen

$$c(x = 4L, t) = c_0 e^{-[(4L-Ut)/L]^2}.$$

Høyest konsentrasjon vil komme når

$$4L - Ut = 0.$$

Det vil si for $t = 4L/U$. For $t \gg 4L/U$ vil $c \cong 0$. Det meste av stoffet har da passert.

Vi ønsker også å beregne konsentrasjonen som en vil måle fra en båt som flytter med elvestrømmen. Endringen i konsentrasjonen per tidsenhet må være gitt ved den partikkelderiverte (likning 10.3). Altså

$$\frac{Dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x}.$$

Nå lønner det seg å innføre $\xi = x - Ut$ slik at c blir en funksjon av bare ξ

$$c = c_0 e^{-(\xi/L)^2}.$$

Nå er

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{dc}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{dc}{d\xi} (-U)$$

og

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{dc}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dc}{d\xi}$$

slik at

$$\frac{Dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + U \frac{\partial c}{\partial x} = 0.$$

Den partikkelderiverte viser altså at konsentrasjonen holder seg konstant når vi måler fra en båt som flyter med strømmen i elva.

Kjører vi derimot med båten oppover elva med hasighet U (i negativ x -retning) og måler konsentrasjonen vil endringen per tidsenhet være:

$$\frac{Dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} - U \frac{\partial c}{\partial x} = -2U \frac{dc}{d\xi} = 4Uc \frac{\xi}{L^2}.$$

10.3 Partikkelakselerasjon

Partikkelens akselerasjon er hastighetsendringen per tidsenhet. Hastighetsendringen i et tidsrom Δt for en partikkel som flyter i feltet er

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t).$$

På tilsvarende måte som ved utledningen av likning 10.2 gir en Taylorutvikling til første orden

$$\Delta \mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Delta t \right).$$

Ved innsetting for Δx , Δy og Δz får vi at hastighetsendringen per tidsenhet er

$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}.$$

I grensen $\Delta t \rightarrow 0$ går $\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ mot akselerasjonen for partikkelen som vi betegner ved vektoren \mathbf{a} . Akselerasjonen for partikkelen kan altså uttrykkes ved den partikkelderiverte av strømhastigheten

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (10.4)$$

hvor

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}.$$

Akselerasjonen setter seg sammen av to deler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

som er den lokale endringen per tidsenhet av hastighetsfeltet på stedet (*lokalakselerasjonen*) og

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

som er akselerasjonen på grunn av de romlige endringer i hastighetsfeltet. Siste delen blir ofte betegnet den *konvektive akselerasjonen* i feltet.

10.3.1 Eksempler på beregning av partikkelakselerasjon

1. Rotasjonsfeltet. Dette feltet er gitt ved strømvektoren

$$\mathbf{v} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$$

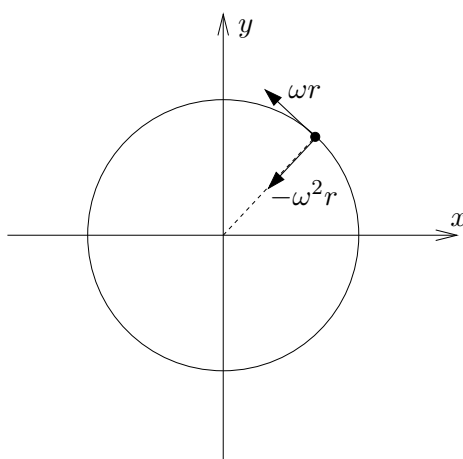
hvor ω er en konstant vinkelhastighet. Farten $|\mathbf{v}| = \omega r$, hvor $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Partiklene går i sirkulære baner, og farten øker med avstanden fra origo. Siden $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ er det ingen lokalakselerasjon i feltet. Den konvektive akselerasjonen beregnes fra formelen

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} &= -\omega y \frac{\partial}{\partial x} (-\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}) \\ &\quad + \omega x \frac{\partial}{\partial y} (-\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}) \\ &= -\omega^2 y \mathbf{j} - \omega^2 x \mathbf{i} = -\omega^2 \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Partikkelakselerasjonen blir derved

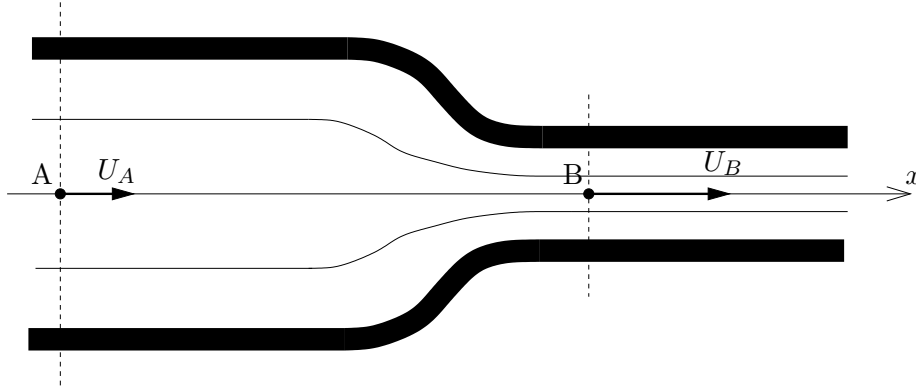
$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 \mathbf{r}.$$

Dette uttrykket gjenkjenner vi som sentripetalakselerasjonen i sirkelbanen.



Figur 10.2: Partikkel i sirkelbane med konstant vinkelhastighet ω .

2. Strøm gjennom rørinnsnevring. Vi betrakter stasjonær tidsuavhengig strøm av usammentrykkbar (inkompressibel) væske. Siden det må gå like mye væske gjennom snittflaten ved B som ved A, må strømhastigheten ved B (U_B) være større enn ved A (U_A). Det betyr at en partikkel som flyter med feltet fra A til B opplever en hastighetsøkning, altså en akselerasjon fra A til B selv om feltet er tidsuavhengig. Lokalakselerasjonen $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$, men den konvekktive akselerasjonen $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} > 0$ i dette feltet.



Figur 10.3: Figuren illustrerer hvordan en fluidpartikkel akselererer idet den flyter gjennom rørinnsnevringen selv om hastighetsfeltet er stasjonært.

10.4 Likninger for massebevarelse

I et strømfelt er det flere fundamentale fysiske betingelser som må være oppfylt. Siden masse ikke kan skapes eller ødelegges må for eksempel massen være bevart. Vi lar på vanlig måte strømhastigheten i feltet betegnes med strømvektoren

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

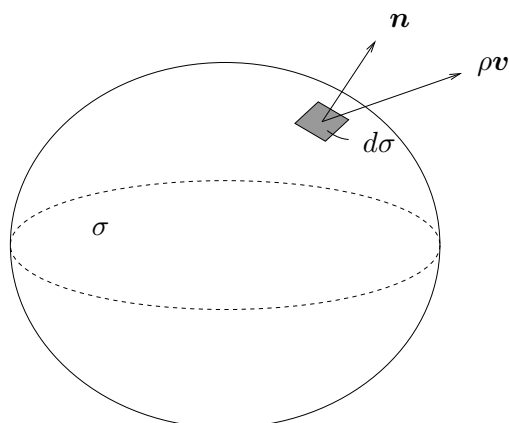
som viser at strømvektoren er en funksjon av posisjonen \mathbf{r} og tiden t . På tilsvarende måte er massetettheten i feltet beskrevet ved

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t).$$

Enhetene i SI-systemet for ρ er kg/m^3 og for \mathbf{v} m/s . Massestrømmen per tidsenhet ut gjennom en lukket flate σ er da gitt ved integralet

$$\int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

hvor \mathbf{n} er normalvektoren til flatelementet $d\sigma$. Massestrømmen får derved enheten kg/s . Dersom massestrømmen er positiv strømmer det netto masse ut gjennom flaten,



Figur 10.4: Lukket volum τ med begrensingsflate σ og flateelement $d\sigma$.

i motsatt fall er det netto innstrømning. Endringen i masse per tidsenhet innenfor volumet τ begrenset av flaten σ må være

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau.$$

Krever vi at det ikke skapes eller ødelegges masse innenfor volumet må endringen i masse innenfor volumet tilsvare det som strømmer ut og inn gjennom overflaten. Dette kan uttrykkes i likningen

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0.$$

Den sier at endringen i masse innenfor volumet balanseres av utstrømningen eller innstrømningen. Flateintegralet i denne likningen kan omskrives til et volumintegral ved hjelp av Gauss' sats. Derved får vi

$$\int_{\tau} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] d\tau = 0.$$

Skal dette integralet være oppfylt må integranden være lik null i alle punkter i feltet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (10.5)$$

Vi innser at dette må være riktig ved å velge et volum τ som omslutter et vilkårlig punkt i feltet og la $\tau \rightarrow 0$. Betingelsen er selvfølgelig at ρ og \mathbf{v} er kontinuerlige funksjoner av \mathbf{r} og t .

Likning 10.5 er en likning mellom tids- og romderiverte av ρ og \mathbf{v} og en slik likning betegnes en differensiallikning. Differensiallikningen 10.5 går under navnet *kontinuitetslikningen* og er en fundamental likning som knytter hastighetsfeltet og tetthetsfeltet sammen. Et spesialtilfelle er av særlig interesse. Dersom massetettheten i fluidet holder seg konstant, $\rho = \rho_0 = \text{konstant}$, reduserer likningen seg til

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (10.6)$$

Det betyr at alle strømfelt hvor tettheten er konstant må være divergensfrie. Dersom tettheten ikke er konstant kan vi skrive

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = (\nabla \rho) \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}$$

slik at likning 10.5 får formen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

På venstre side i denne likningen gjenkjenner vi uttrykket for den partikkelderiverte av tettheten

$$\frac{D\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho.$$

Etter dette kan vi altså skrive kontinuitetslikningen

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Dersom forholdene i feltet er slik at alle partikler bevarer sin tetthet når de flyter omkring vil

$$\frac{D\rho}{dt} = 0.$$

Det innebærer at strømfeltet må være divergensfritt også i dette tilfellet. Slike forhold opptrer f.eks. i havet og i atmosfæren når diffusjonsprosesser og blandingsprosesser spiller liten rolle slik at en individuell mengde av luft eller sjø ikke utveksler varme eller saltholdighet med omgivelsen og derved bevarer sin tetthet.

10.5 Bevegelseslikningen

Newtons andre lov sier at produktet av masse og akselerasjon for en partikkel er lik summen av kreftene som virker på partikkelen. Vi skal nå formulere denne loven for en liten avgrenset delmengde av et fluid med overflate σ og volum τ . La oss anta at bevegelsen kan regnes som friksjonsfri og at fluidet bare er påvirket av trykkraften som virker langs overflaten og tyngdekraften som virker på all masse innenfor begrensingsflaten. Den totale kraften kan da skrives

$$-\int_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma + \int_{\tau} \rho \mathbf{g} d\tau$$

hvor p betegner trykket, \mathbf{n} er flatenormalen for flatelementet $d\sigma$, ρ er massetettheten, \mathbf{g} er tyngdeakselerasjonen og $d\tau$ er et volumelement innenfor volumet τ . Newtons 2. lov om at kraften er massen ganger akselerasjonen kan derved uttrykkes

$$\int_{\tau} \rho \mathbf{a} d\tau = -\int_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma + \int_{\tau} \rho \mathbf{g} d\tau$$

hvor \mathbf{a} er akselerasjonen for fluidpartiklene innenfor volumet, definert ved likning 10.4. Nå kan flateintegralet i uttrykket for trykkraften omformes til et volumintegral ved hjelp av Gauss' sats (likning 7.9)

$$\int_{\sigma} p \mathbf{n} d\sigma = \int_{\tau} \nabla p d\tau.$$

Derved kan Newtons lov skrives

$$\int_{\tau} [\rho \mathbf{a} + \nabla p - \rho \mathbf{g}] d\tau = 0.$$

Siden integralet må være oppfylt for alle vilkårlige valgte fluidmengder i feltet må integranden være null i alle punkter i feltet og vi har

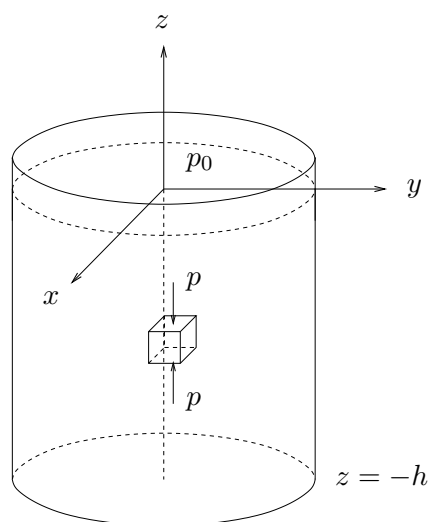
$$\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}.$$

Innsatt uttrykket for akselerasjon fra likning 10.4 får vi bevegelseslikningen for en friksjonsfri strøm av fluider i tyngdefeltet

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}. \quad (10.7)$$

Dette er en vektorlikning med tre komponenter og hver av komponentlikningene er partielle differensiallikninger. Likning 10.7 er kjent som *Euler-likningen* for fluider.

10.5.1 Eksempel: Trykkfordeling i en væskebeholder



Figur 10.5: Trykkfordelinger i en væske i ro.

En enkel løsning av likning (10.7) er trykkfordelingen i en væskeholder når væsken er i ro ($\mathbf{v} = 0$) og tettheten er konstant. Vi legger et kartesisk aksekors med xy -aksene i overflaten og z -aksen vertikalt slik som i figur 10.5. Vektoren for tyngdeakselerasjon er da

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$$

og fra bevegelseslikningen (10.7) får vi følgende tre komponentlikninger

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \end{aligned}$$

Av de to første likningene får vi at trykket er uavhengig av x og y og av den tredje likningen

$$p = -\rho g z + C$$

hvor C er en integrasjonskonstant. Integrasjonskonstanten bestemmes ved betingelsen om at trykket ved overflaten er lik lufttrykket p_0 . Derved får vi at trykket i væsken er gitt ved

$$p = p_0 - \rho g z.$$

Ved bunnen av tanken er trykket $p = p_0 + \rho g h$ som tilsvarer lufttrykket pluss vekten av væsken. Dette er den hydrostatiske trykkformelen som vi stiftet bekjentskap til i kapittel 6.

10.6 Bernoullis likning

Vi skal her utlede en viktig likning som ofte kommer til anvendelse ved beregninger av trykk og strømhastigheter i fluider. La oss for enkelhets skyld begrense oss til en væske hvor tettheten er konstant. Vi vet da at strømfeltet må være divergensfritt. I tillegg skal vi forutsette at strømfeltet er stasjonært slik at $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$. Bevegelseslikningen (10.7) kan da skrives

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \frac{p}{\rho} - g \mathbf{k}$$

hvor vi har lagt z -aksen i vertikal retning. Derved kan vi skrive

$$g \mathbf{k} = \nabla(gz).$$

Det kan også vises at

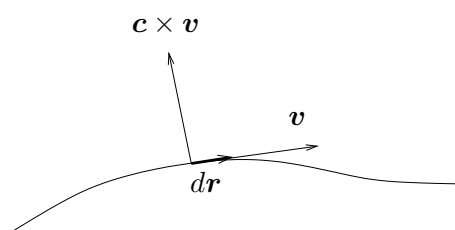
$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) + \mathbf{c} \times \mathbf{v}$$

hvor $\mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{v}$ er virvlingen til strømfeltet. Bruker vi de siste to relasjonene kan bevegelseslikningen omformes til

$$\nabla \left[\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + gz \right] + \mathbf{c} \times \mathbf{v} = 0.$$

Vi innfører en skalar $\mathcal{H} = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + gz$ og får

$$\nabla \mathcal{H} + \mathbf{c} \times \mathbf{v} = 0.$$



Figur 10.6: Et bueelement $d\mathbf{r}$ langs en strømlinje og retningen av vektorene \mathbf{v} og $\mathbf{c} \times \mathbf{v}$.

La oss nå multiplisere denne likningen med et bueelement $d\mathbf{r}$ langs en strømlinje. Dette gir

$$\nabla\mathcal{H} \cdot d\mathbf{r} + (\mathbf{c} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

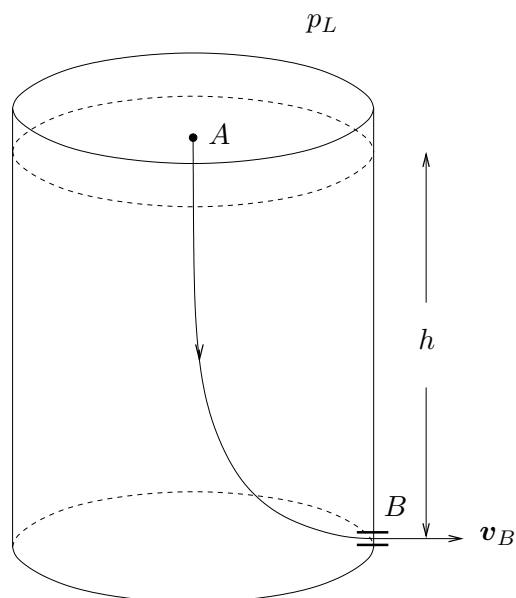
Siden $\mathbf{c} \times \mathbf{v}$ står normalt på \mathbf{v} og derved også på $d\mathbf{r}$ (se figur 10.6) blir siste leddet null. Videre vet vi at $\nabla\mathcal{H} \cdot d\mathbf{r}$ er tilveksten i skalaren \mathcal{H} når vi går i retning langs strømlinjen. Vi får altså at

$$d\mathcal{H} = 0$$

langs strømlinjen som betyr at

$$\mathcal{H} = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz = \mathcal{H}_0$$

er konstant langs en strømlinje. Dette er *Bernoullis likning* for en inkompressibel væske. Konstanten \mathcal{H}_0 kalles *Bernoullikonstanten*.



Figur 10.7: Væskestrøm ut gjennom en liten åpning (B) i en stor tank.

Daniel Bernoulli (1700-1782), ble født i Groningen, studerte i Basel og var i flere år professor i matematikk i St. Petersburg. Skrev mellom andre vitenskapelige arbeider om havstrømmer, tidevann og beregning av planetbaner. Konstruerte også en klepsydra (vannklokke) for måling av tidsforskjeller tilsjøs. Mest kjent for sine grunnleggende arbeider innen hydrostatikk og hydrodynamikk. Var den første som anvendte betegnelsen hydrodynamikk og brukte ordet som tittel på sitt hovedarbeide. I denne boken bruker han prinsippet som senere ble formulert i likningen som bærer hans navn.

10.6.1 Eksempel: Utstrømningshastighet fra tank

Vi skal ved et eksempel vise hvordan Bernoullis likning kan brukes til å beregne utstrømningshastigheten av en væske gjennom en liten åpning i en stor tank. La oss følge væsken langs en strømlinje fra overflaten (A) til utløpet (B). Siden \mathcal{H} er konstant langs strømlinjen må

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gh = \frac{p_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2. \quad (10.8)$$

Nå er trykket ved A lik lufttrykket over væsken $p_A = p_L$. I strålen ved B er trykket tilnærmet lik lufttrykket $p_B \cong p_L$. Strømhastigheten ved A må være mye mindre enn hastigheten i utløpsstrålen ($v_A \ll v_B$) når utløpsåpningen er liten. Derved kan leddet med v_A^2 sløyfes i forhold til v_B^2 og vi får fra likning 10.8

$$gh = \frac{1}{2}v_B^2$$

slik at

$$v_B = \sqrt{2gh}.$$

Dette er kjent som Toricellis lov¹ for utstrømningshastigheten fra en væskebeholder. Farten i utløpet tilsvarer farten av en kule med masse m som blir sluppet fra en høyde h med null hastighet. Tapet i potensiell energi mgh må da være lik tilveksten i kinetisk energi. Altså

$$\frac{m}{2}v^2 = mgh.$$

Det gir $v = \sqrt{2gh}$.

10.7 Varmetransport

Temperatur (T) er et mål for molekylenes bevegelsesenergi og måles i den absolutte temperaturskalaen Kelvin (K). Varmeinnholdet (termisk energi) per volumenhet av et stoff er gitt ved

$$\rho c T$$

hvor c er den *spesifikke varmekapasiteten* for stoffet og ρ er tettheten. Enheten for c i SI-enheter er Joule/kgK slik at varmeinnholdet får enheten Joule/m³. Betegnelsen spesifikk varmekapasitet betyr definisjonsmessig varmeenergi per masseenhet og grader.

¹Evangalista Toricelli (1608-1647) var assistent og medarbeider til Galileo Galilei i mange år.

Det kan skape forvirring at den kortere betegnelsen varmekapasitet også er i bruk om samme størrelse.

Egentlig avhenger c av trykk og tetthet, men vi skal her regne den som en konstant. Det er oppfylt med god tilnærming for luft og vann under vanlige betingelser når variasjonene i trykk og temperatur ikke er for store.

Varmen kan transporteres med strømmen i fluider og *varmestrømmen*, eller *varme-fluksen* per tidsenhet og flateenhet, kan uttrykkes ved vektoren

$$\mathbf{H}_s = \rho c T \mathbf{v}.$$

Enheten for varmestrøm per flateenhet blir altså Joule/m²s. \mathbf{H}_s kalles ofte for den *konvektive varmetransport* fordi varmen transporteres med strømmen.

I tillegg kan varme overføres ved ledning. Det skjer ved at molekylene utveksler bevegelsesenergi ved støtprosesser slik at termisk energi fra områder med hurtige molekylbevegelser (varme områder) overføres til områder hvor molekylbevegelsen er langsommere (kalde områder). Varmetransporten per flateenhet ved ledning kan beskrives ved *Fouriers lov*

$$\mathbf{H}_l = -k \nabla T \tag{10.9}$$

hvor k er *varmeledningstallet*. Enheten for k er Joule/msK eller Watt/mK. Loven sier at varmestransporten er rettet langs temperaturgradienten og går fra varme områder til kaldere områder. Større temperaturforskjeller gir større varmestransport. Fouriers lov er en empirisk lov først formulert av Joseph Fourier ² på grunnlag av omfattende eksperimenter.

Varmetransporten per flateenhet på grunn av strømmen i fluidet og varmeledning blir

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_l.$$

Vanligvis er den konvektive varmestransporten mye større enn transporten ved ledning $|\mathbf{H}_s| \gg |\mathbf{H}_l|$, men i områder hvor strømhastigheten er liten, som for eksempel nær en vegg, vil varmeledningen dominere.

Den samlede *varme-fluksen* ut gjennom en lukket flate σ som begrenser et volum τ i fluidet er gitt ved integralet

$$\int_{\sigma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

hvor \mathbf{n} er flatenormalen til flateelementet $d\sigma$. Nå kan det være varmekilder innenfor volumet for eksempel som følge av faseovergang (smelting, frysing) eller radioaktive prosesser i stoffet. Dersom varmeproduksjonen per volumenhet og tidsenhet betegnes q , vil den totale varmeproduksjonen innenfor volumet τ per tidsenhet kunne skrives

$$\int_{\tau} q d\tau.$$

Endringen i varmeinnhold innenfor volumet per tidsenhet skyldes det som transporteres gjennom volumets begrensingsflate σ pluss den varmen som produseres eller absorberes ved faseoverganger innenfor volumet. Dette kan uttrykkes ved likningen

$$\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) d\tau + \int_{\sigma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\tau} q d\tau$$

²Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), fransk vitenskapsmann og administrator.

Stoff	ρ (kg/m ³)	c (J/kgK)	k (J/msK)	κ (m ² /s)
vann	999,1	$4,19 \cdot 10^3$	0,590	$1,40 \cdot 10^{-7}$
luft	1,225	$1,01 \cdot 10^3$	0,025	$2,02 \cdot 10^{-5}$
glass	2600	$0,67 \cdot 10^3$	0,837	$4,81 \cdot 10^{-7}$
kopper	8960	$0,39 \cdot 10^1$	2,260	$6,55 \cdot 10^{-6}$

Tabell 10.1: Tetthet og termiske konstanter for vann og luft ved 15°C og konstant lufttrykk (1013 hektopascal) og for glass og kopper ved 18°C.

hvor q er varmeproduksjonen per volumenhet og tidsenhet på grunn av varmekilder innenfor volumet. Flateintegralet i denne likningen kan omformes til et volumintegral ved hjelp av Gauss' sats og vi får

$$\int_{\tau} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) + \nabla \cdot \mathbf{H} - q \right] d\tau = 0.$$

Setter vi inn for \mathbf{H} fra uttrykket ovenfor kan dette omformes videre til

$$\int_{\tau} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) + \nabla \cdot (\rho c T \mathbf{v}) - \nabla \cdot (k \nabla T) - q \right] d\tau = 0. \quad (10.10)$$

Vi skal for enkelthets skyld begrense oss til et fluid hvor tetthet og varmekapasitet er konstante. Da har vi at

$$\nabla \cdot (\rho c T \mathbf{v}) = \rho c [\nabla T \cdot \mathbf{v} + T \nabla \cdot \mathbf{v}] = \rho c \mathbf{v} \cdot \nabla T.$$

Antar vi også at varmeledningstallet er konstant, kan vi skrive

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = k \nabla^2 T.$$

Derved kan likning 10.10 omformes til

$$\int_{\tau} \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T - \kappa \nabla^2 T - \frac{q}{\rho c} \right] d\tau = 0 \quad (10.11)$$

etter at vi har dividert med faktoren ρc . Konstanten

$$\kappa = \frac{k}{\rho c}$$

kalles *varmediffusivitet* og har enhet m²/s. Skal likning 10.11 være oppfylt i ethvert punkt i mediet må integranden være null overalt slik at

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + \frac{q}{\rho c}.$$

Dette er *varmetransportlikningen* for et fluid hvor tettheten og de termiske egenskapene er konstante. Venstre side i likningen er den partikkelderiverte av temperaturen slik at

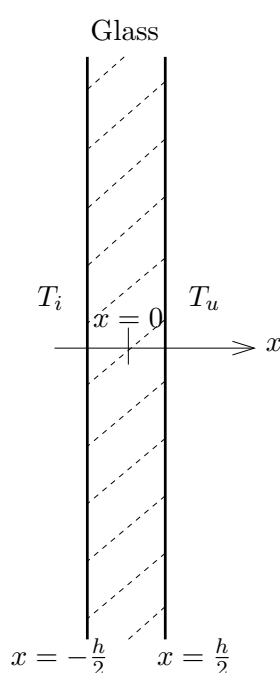
$$\frac{DT}{dt} = \kappa \nabla^2 T + \frac{q}{\rho c}. \quad (10.12)$$

Temperaturen for en fluidpartikkel endrer seg i dette tilfellet altså bare som følge av varmeledning og varmekilder. Dersom det er ingen strøm i mediet ($\mathbf{v} = 0$) og ingen varmekilder forenkler likningen seg til

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad (10.13)$$

som er kjent som *varmeledningslikningen*. Den gjelder også for varmeledning i et fast stoff.

10.7.1 Eksempel: Beregning av varmestrøm gjennom vindusglass



Figur 10.8: Varmestrøm gjennom et enkeltglass.

La oss først se på en enkel vindusrute av glass med tykkelse h . Temperaturen på innsiden av glasset er T_i og på utsiden T_u . Vi forutsetter at disse temperaturene holder seg konstante og at det derfor er stasjonær (tidsuavhengig) temperaturforhold i glasset. Vi antar også at bortsett fra nær sidekantene av ruta vil temperaturen i glasset bare avhenge av x -koordinaten slik at $T = T(x)$. Fra likning 10.13 får vi

$$0 = \kappa \frac{d^2 T}{dx^2}$$

eller

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0.$$

Integrerer vi to ganger får vi

$$T = Ax + B$$

hvor A og B er integrasjonskonstanter. Disse konstantene må bestemmes slik at

$$T(x = -\frac{h}{2}) = T_i \quad \text{og} \quad T(x = \frac{h}{2}) = T_u.$$

Dette gir

$$T_i = -A\frac{h}{2} + B$$

$$T_u = A\frac{h}{2} + B.$$

Derav

$$B = \frac{T_i + T_u}{2}, \quad A = -\frac{T_i - T_u}{h}.$$

Temperaturen i glasset varierer altså lineært fra innetemperaturen T_i til utetemperaturen T_u . Altså temperaturen i glasset er

$$T(x) = -\frac{T_i - T_u}{h}x + \frac{T_i + T_u}{2}$$

Vi kan nå bruke Fouriers lov (10.9) til å beregne varmestrømmen gjennom glasset

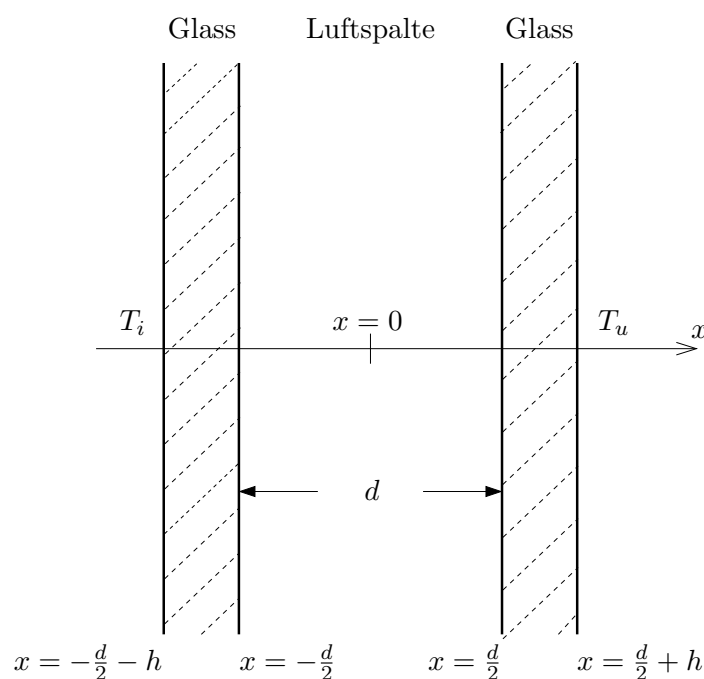
$$H_{enk} = H_l = -k_G \frac{dT}{dx} = k_G \frac{T_i - T_u}{h} \quad (10.14)$$

hvor k_G er varmeledningstallet for glass. Setter vi $T_i = 293K$ (20°C), $T_u = 273K$ (0°C), $h = 2.5$ mm og bruker verdien for k_G gitt i tabell 10.1 får vi

$$H_{enk} = 0.837 \cdot \frac{20}{2.5 \cdot 10^{-3}} \frac{J}{sm^2} = 6.7 \frac{kW}{m^2}.$$

Dette er en stor varmestrøm som vil gi store fyringsutgifter. I virkeligheten vil det på grunn av strømninger i lufta utvikle seg et grensesjikt i lufta både på innsiden og utsiden av glasset. Temperaturen avtar raskt i dette sjiktet fra innetemperaturen inn mot innsiden av glasset og øker hurtig i sjiktet på utsiden fra utetemperaturen inn mot glasset. Temperaturdifferansen over glasset vil derfor bli vesentlig mindre, men for å bestemme dette må vi beregne forholdene i grensesjiktet. Det vil kreve at en bestemmer luftstrømmen i grensesjiktet, en vanskelig oppgave.

Nå brukes isolerglass i de fleste vindusruter og det kan være interessant å se hvordan det reduserer varmestrømmen gjennom vinduet. Geometrien i et isolerglass er skissert på figuren. Mellom to glassplater, hver med tykkelse h , er det en luftspalte (gass) med tykkelse d . Vi forutsetter som før stasjonære forhold med innetemperatur T_i og utetemperatur T_u og dessuten at det er ingen strøm i luftlaget mellom glassene ($\mathbf{v} = 0$). Vi kan derfor, som i tilfellet med enkeltglass, bruke ligning (10.13) til å finne temperaturen i glasslagene og det luftfylte rommet mellom dem. Det blir stykkevis lineære temperaturprofiler som lappes sammen slik at temperaturen blir kontinuerlig. Beregningene blir litt omstendelige, men innebærer ingen prinsipielle vanskeligheter. Til slutt kan vi



Figur 10.9: Varmestrøm gjennom isolerglass.

igjen bruke Fouriers lov til å bestemme varmemstrømmen gjennom isolerglasset. Vi får som resultat

$$H_{iso} = \frac{H_{enk}}{2} \frac{1}{1 + \frac{k_G d}{k_L 2h}}.$$

H_{enk} er varmemstrømmen i enkeltglasset bestemt ved formel (10.14) og k_L er varmeledningstallet for luft (gass). Bruker vi verdier fra tabellen for k_G og k_L og setter gasslagets tykkelse til $d = 0.01$ m og $h = 2.5 \cdot 10^{-3}$ m får vi at faktoren

$$\frac{1}{1 + \frac{k_G d}{k_L 2h}} \cong 0.015$$

Det betyr at varmemstrømmen gjennom isolerglasset reduseres til

$$H_{iso} = \frac{6.7}{2} \cdot 0.015 \frac{kW}{m^2} = 50 \frac{W}{m^2}.$$

Det er en dramatisk reduksjon og viser tydelig hvorfor isolerglass har vunnet innpass.

10.8 Oppgaver

1. Gitt et to-dimensjonalt strømfelt (rotasjonsfelt)

$$\mathbf{v} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}.$$

- a) Finn akselerasjonen i feltet.
- b) Finn trykkgradienten og bestem trykket når trykket er den eneste kraften som virker. Trykket i origo settes lik p_0 .

2. Prisen i kroner per kilo for et parti norsk oppdrettslaks som kjøres med trailer fra Norge til kontinentet kan beregnes etter følgende formel

$$P = 40 + 5 \cdot 10^{-2}x - 10t$$

hvor x er avstanden i kilometer sørover fra Trondheim og t er tiden i døgn. Traileren holder i gjennomsnitt en fart $v = 600\text{km}$ per døgn. Bruk teorien for partikkelderivasjon og

- Bestem endringen per tidsenhet i verdien av laksen.
- Hvor mye av prisendringen per tidsenhet skyldes alder og hvor mye skyldes forskjell i markedspris?
- Hvor stor må gjennomsnittshastigheten til traileren minst være for at verdien av laksen ikke skal avta?

3. I oppgave 7 i kapittel 9 viste vi at i kartesiske koordinater kan hastighetskomponentene i punktvirvelfeltet skrives

$$v_x = -\frac{Ay}{r^2}, \quad v_y = \frac{Ax}{r^2}$$

hvor $r^2 = x^2 + y^2$.

- Vis at den konvektive akselerasjonen for en fluidpartikkel i feltet er

$$\mathbf{a} = -\frac{A^2}{r^3} \mathbf{r}$$

hvor $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

- Vis at dette er uttrykket for sentripetalakselerasjonen.
- Finn trykkgradienten i feltet og bestem trykket. Vi forutsetter at trykket er den eneste kraften som virker og at trykket uendelig langt fra origo er p_0 .

4. Finn den lokale og den konvektive akselerasjonen for hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = \frac{x}{1+t}\mathbf{i} + \frac{2y}{1+t}\mathbf{j} - \frac{3z}{1+t}\mathbf{k}.$$

5. Gitt hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = ax\mathbf{i} + 2ay\mathbf{j} - 3az\mathbf{k}$$

hvor a er en positiv konstant.

- Vis at feltet representerer en mulig strøm for en inkompressibel væske.
- Bestem akselerasjonen for en partikkel som følger strømmen.
- Finn trykkgradientens størrelse og retning når vi forutsetter at trykkraften er den eneste kraften som virker i feltet.

6. Gitt det to-dimensjonale hastighetsfeltet

$$\mathbf{v} = \frac{Q}{r^2}(xi + yj)$$

hvor $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ og Q er en konstant.

- Vis at feltet representerer en mulig strøm for en inkompressibel væske og finn strømlinjene.
- Finn massestrømmen gjennom en sylinderflate med sentrum i origo og akse rettet normalt xy -planet.
- Finn akselerasjonen for en væskepartikkel i feltet.

7. En homogen inkompressible væske strømmer friksjonsfritt og stasjonært gjennom et rett rør hvor tverrsnittsarealet snevres inn fra A til a . Strømhastigheten og trykket i den vide delen av røret er henholdsvis U og p_0 . Finn strømhastigheten og trykket i den smale delen av røret.

8. En homogen inkompressibel væske strømmer friksjonsfritt og stasjonært gjennom et rør med tverrsnitt a . Strømhastigheten er U . Røret grener seg i to jevntykke rør med tverrsnitt b .

- Finn hastigheten i rørgrenene.
- Bestem trykket i rørgrenene når trykket i hovedrøret er p_0 .

9. For å skaffe vann er det lagt ut et plastrør fra et vann hvor vannspeilet ligger h meter over stedet (P) hvor det tappes fra røret. Plastrøret er lagt over et lite høydedrag og det har vært nødvendig å pumpe vann gjennom røret for å få det til å renne som i en hevert. Høyeste punkt på røret (A) ligger H meter over tappelstedet (P).

- Bestem strømhastigheten når vi forutsetter stasjonær friksjonsfri strøm.
- Finn trykket i slangen i punktet (A).
- Dersom trykket i (A) blir lavere enn vannets damptrykk vil gassbobler utvikle seg og eventuelt stanser vannstrømmen. Hvilke restriksjoner må det settes på H dersom temperaturen er 20°C og det tilsvarende vanddamptrykket er $2.335 \cdot 10^3 \text{Pa}$ og lufttrykket er $1.01325 \cdot 10^5 \text{Pa}$?

10. I oppgave 8, kapittel 9, bestemte vi strømfeltet omkring en sylinder i en uniform strøm. Finn trykket langs sylinderflaten når trykket er p_0 langt oppstrøms fra sylindren.

11. Varmestrømmen \mathbf{H} per tidsenhet og flateenhet ved ledning er gitt ved Fouriers lov

$$\mathbf{H} = -k \nabla T$$

hvor T er temperaturen. Loven uttrykker at varmemestrømmen er proporsjonal med temperaturgradienten og rettet i retning med største temperaturfall fra varme områder til kaldere (derfor minus!). Proporsjonalitetsfaktoren k er varmeledningstallet (termisk konduktivitet) og har enhet Joule/(meter Kelvin sekund). Varmeledningstallet har forskjellig verdi avhengig av stoffets ledningsevne og kan finnes ved eksperimenter.

Utenfor en kule med radius R som holder konstant temperatur T_0 er temperaturfeltet

$$T = T_s + (T_0 - T_s) \frac{R}{r}$$

hvor r er avstanden fra kulas sentrum og T_s er temperaturen langt borte fra kula.

- a) Sett opp et integraluttrykk for varmemestrømmen per tidsenhet gjennom en lukket flate σ i feltet.
- b) Beregn varmemestrømmen per tidsenhet gjennom overflaten av kula.

12. Et rektangulært rom med sidekanter a, b, c er fylt med luft med varmeledningstall k . Temperaturfeltet i luften er:

$$T = T_0 + \Delta T \frac{xy}{ab} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{z}{c}\right)$$

hvor T_0 og ΔT er konstanter og $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$.

- a) Velg hensiktsmessig skalering og skriv uttrykket på dimensjonløs form. Bruk dette uttrykket videre i oppgaven med $b = 2a$ og $c = \frac{a}{2}$.
- b) I hvilken retning må en mygg som svever i midten av rommet fly for raskest mulig komme til kjøligere temperatur?
- c) Beregn varmemestrømmen gjennom veggen $x = a$.
- d) Beregn varmemestrømmen gjennom taket og gulvet.

Tillegg A

Orienteringsstoff

A.1 Innledning

Avslutningsvis i dette kurset skal vi se hvordan de grunnleggende lovene for strømming i fluider (væsker og gasser) og for elektromagnetiske felter kan uttrykkes som vektorlikninger når vi bruker de matematiske størrelsene gradient, divergens og virvling. Meningen er ikke på det nåværende trinn å gi en dypere forståelse av innholdet i disse feltlikningene, det får vente til etterfølgende kurser i fluidmekanikk og elektromagnetisme. Likningene er tatt med for å vise at den matematiske beskrivelsen som har vært tema i dette kurset har en sentral plass i naturvitenskapelig teori og for å gi en aning om den slagkraft som denne matematikken har i en rekke anvendelser. Dette kapitlet er bare til orientering og stoffet her er ikke eksamenspensum.

A.2 Navier-Stokes likning

De tre viktigste parametrene som skal til for å beskrive strømningsfelt i fluider er:

- p Trykket. Skalarfunksjon av romkoordinatene x, y, z og tiden t .
- \mathbf{v} Strømhastigheten. Vektorfunksjon av x, y, z og t .
- ρ Massetettheten. Skalarfunksjon av x, y, z og t .

Navier-Stokes likningen er en feltlikning som uttrykker at kreftene som virker på fluidet i ethvert sted i feltet gir fluidet en akselerasjon i henhold til Newtons 2. lov ($F = ma$). Dette kan skrives:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \kappa \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}_v.$$

Venstresiden i denne likningen er akselerasjonsledd og høyresiden er krefter (per masse-enhet). Likningen er en vektorlikning som kan skrives ut som tre komponentlikninger. Siden likningen inneholder rom og tidsderivate av de ukjente parametrene p , \mathbf{v} og ρ kaller vi dette en differensiallikning. De enkelte leddene i disse likningene har følgende betydning:

Ledd	Betydning
$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$	Akselerasjon fordi feltet er tidsavhengig
$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$	Akselerasjon fordi feltet varierer i rommet
$-\frac{1}{\rho} \nabla p$	Trykkraft per masseenhet
$\nu \nabla^2 \mathbf{v}$	Friksjonskrefter (viskositet) på grunn av strømskjær
$\kappa \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})$	Friksjonskrefter på grunn av ekspansjon i feltet
\mathbf{f}_v	Andre krefter som virker f.eks. tyngdekraft

Koeffisientene κ og ν karakteriserer friksjon eller viskositetsegenskapene ved væsken eller gassen.

I tillegg har vi loven om massebevarelse som kan uttrykkes ved kontinuitetslikningen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}).$$

Denne likningen sier at massestrømmen $\rho \mathbf{v}$ gjennom en lukket flate fører til en tilsvarende endring av tettheten innenfor volumet som flaten begrenser. Dersom tettheten er konstant (inkompressibel væske eller gass) følger det fra kontinuitetslikningen at strømfeltet er divergensfritt

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

I dette tilfellet forenkles også Navier-Stokes likning seg ved at leddet med κ som koeffisient faller ut. Dersom i tillegg virkningen fra friksjonen er liten vil strømfelter som i utgangspunktet er virvelfri holde seg virvelfri i den etterfølgende bevegelsen slik at:

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0.$$

I dette tilfellet kommer potensialteorien som vi behandlet i kapittel 9 til anvendelse.

Navier-Stokes likning danner grunnlaget for alle beregninger av strømninger i gasser og væsker og anvendelsene spenner over et vidt spekter fra beregninger av værssystemer, bølger og strøm i havet og teknologiske anvendelser som beregninger av transport av olje og gass i rørledninger, motstandskrefter på marine konstruksjoner og løftekraft på flyvinger.

A.3 Maxwells likninger

De fire viktigste parametrene som skal til for å beskrive et elektromagnetisk felt er:

- \mathbf{E} Elektrisk feltstyrke. Vektorfunksjon av romkoordinatene x, y, z og tiden t .
- \mathbf{B} Magnetisk feltstyrke. Vektorfunksjon av x, y, z og t .
- q Elektrisk ladningstetthet. Skalarfunksjon av x, y, z og t .
- \mathbf{j} Elektrisk strøm. Vektorfunksjon av x, y, z og t .

Den skotske fysikeren James Clerk Maxwell (1831-1879) formulerte sammenhengen mellom disse størrelsen i et sett av likninger som danner grunnlaget for all klassisk elektromagnetisk teori. Disse likningene, kalt Maxwells likninger, kan skrives:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{q}{\epsilon_0}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}$$

Her er c lyshastigheten i vakuum og ϵ_0 (epsilon null) er en konstant. For et tidsuavhengig elektrisk felt (konstant i tiden) utenfor området hvor det er elektriske ladninger $q = 0$ følger det fra de to første likningene at vektoren for den elektriske feltstyrken er divergensfri og virvelfri:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Det betyr at i dette tilfellet kan teorien for potensialfelter (kapittel 9) anvendes også i elektromagnetisme.

A.4 Kombinasjon av Navier-Stokes og Maxwells likninger

Dersom fluidet består av elektrisk ladede partikler så vil de enkelte delene av fluidet i tillegg til trykk og friksjonskrefter påvirkes av elektromagnetiske krefter som vi kan uttrykke ved leddet \mathbf{f}_v på høyre side av Navier-Stokes likning. En partikkel med elektrisk ladning q vil, når den beveger seg med en hastighet \mathbf{v} , bli påvirket av en kraft som er summen av kreftene fra den elektriske feltstyrken og det magnetiske feltet. Dette kalles *Lorentz-kraften* og uttrykket for den kan skrives:

$$\mathbf{f}_v = q (\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})).$$

Med dette har vi en kobling mellom Navier-Stokes likning og Maxwells likninger som kan brukes til å beregne strømming i gasser og væsker som har elektrisk ladning og er under påvirkning av elektromagnetiske felter. Denne type likninger kommer til anvendelse f.eks. når man skal beregne strømminger i solatmosfæren og høyt oppe i jordatmosfæren hvor lufta inneholder elektrisk ladede partikler (ioniserte gasser).

Tillegg B

Ekstraoppgaver

1. Gitt en skalarfunksjonen $\psi(x, y) = xy^2 - x^2y$.
 - a) Vis at $\psi(x, y)$ kan brukes som strømfunksjon for et vektorfelt.
 - b) Skisser strømlinjene.
 - c) Eksisterer det et hastighetspotensial for dette feltet?
 - d) Hvilken betingelse må $\psi(x, y)$ oppfylle for at vi skal ha et Laplaceisk felt?

2. Potensialfunksjonen for et dipolfelt er gitt i kartesiske koordinater ved:

$$\phi = \frac{Bx}{x^2 + y^2}$$

- a) Innfør polarkoordinater (r, θ) , bestem uttrykket for ϕ i polarkoordinater og finn strømkomponentene v_r og v_θ .
 - b) Beregn fluksen og sirkulasjonen av strømvektoren $\mathbf{v} = \{v_r, v_\theta\}$ gjennom en sirkelflate med sentrum i origo og radius a .
 - c) Hva blir fluks og sirkulasjon av strømvektoren \mathbf{v} gjennom en lukket flate av vilkårlig form som ikke inneholder origo?
3. En to-dimensjonal vektor i xy -planet er gitt ved $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla\psi$ hvor $\psi = \psi(x, y)$ er en skalarfunksjon (strømfunksjon) og \mathbf{k} er en enhetsvektor normalt xy -planet. Vis at $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ og at $\nabla \times \mathbf{v} = \nabla^2\psi\mathbf{k}$.
 4. Gitt et tre-dimensjonalt vektorfelt $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ i kartesiske koordinater xyz .
 - a) Bruk Gauss' sats til å finne formelen for volumet V av en kule med radius r .
 - b) Sett opp uttrykket for et flatelement σ på kuleflaten i kulekoordinater og beregn overflaten O av kuleflaten.

5. Trykkfeltet for en plan lydbølge i xy -planet er gitt ved:

$$p(x, y, t) = p_0 + \Delta p \sin \psi$$

hvor p_0 er atmosfæretrykket og Δp er trykkperturbasjonen i lydbølgen. Argumentet (fasefunksjonen) for sinusfunksjonen er

$$\psi(x, y, t) = lx + my - \omega t$$

hvor l , m og ω er konstanter og t er tiden.

- Hvilke enheter (dimensjon) har konstantene l , m og ω når ψ måles i radianer?
- Skisser konturlinjene for ψ og p for $t = 0$. Finn avstanden mellom to nabo-bølgetopper.
- Skisser konturlinjene for ψ og p for $t = \frac{\pi}{2\omega}$. Forklar at bølgemønstret beveger seg i retning av gradientvektoren $\nabla\psi$. Finn farten som bølgetoppene beveger seg med.

Tillegg C

Noen viktige formler

Formel	Navn/beskrivelse
$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$	Posisjonsvektor i kartesiske koordinater $\{x, y, z\}$
$\mathbf{r} = r\mathbf{i}_r$	Posisjonsvektor i polarkoordinater $\{r, \theta\}$
$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$	Vektor med komponenter $\{A_x, A_y, A_z\}$ i kartesiske koordinater
$\mathbf{A} = A_r\mathbf{i}_r + A_\theta\mathbf{i}_\theta$	Vektor med komponenter $\{A_r, A_\theta\}$ i plane polarkoordinater
$\beta(x, y, z) = \beta_0$	Ekviskalarflater (linjer) for skalarfeltet β i kartesiske koordinater
$\beta(r, \theta) = \beta_0$	Ekviskalarlinjer for skalarfeltet β i plane polarkoordinater
$d\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x} dx + \frac{\partial\beta}{\partial y} dy + \frac{\partial\beta}{\partial z} dz$	Totalt differensial. Tilveksten til skalarfunksjonen β .

$d\beta = \nabla\beta \cdot d\mathbf{r}$	Totalt differensial på vektorform. Definisjonslikning for gradientvektoren.
$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\mathbf{k}$	Gradientvektoren til skalarfeltet β i kartesiske koordinater
$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\beta}{\partial\theta}\mathbf{i}_\theta$	Gradientvektoren til skalarfeltet β i plane polar-koordinater
$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	Divergensen til vektoren \mathbf{A} i kartesiske koordinater
$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$ $\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} +$ $\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} +$ $\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$	Virvlingen til vektoren \mathbf{A} i kartesiske koordinater
$Q = \int_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$	Vektorfluks/Volumstrøm gjennom en flate σ
$C = \oint_{\lambda} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$	Sirkulasjon omkring en lukket kurve λ
$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} \, d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma$	Gauss' sats (divergensteoremet)

$\int_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \oint_{\lambda} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$	Stokes' sats (Greens sats)
$\mathbf{v} = v_x(x, y)\mathbf{i} + v_y(x, y)\mathbf{j}$	To-dimensjonal strømvektor i kartesiske koordinater
$v_x \, dy = v_y \, dx$	Likningen for strømlinje (feltlinje)
$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$	Strømfunksjon $\psi = \psi(x, y)$ bare når $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
$\psi(x, y) = \psi_0$	Likningen for strømlinje
$\mathbf{v} = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j}$ $\mathbf{v} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}$	Potensialfunksjonen ϕ (hastighetspotensialet) bare når $\nabla \times \mathbf{v} = 0$. Gjelder også i 3-D.
$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$	Relasjonene mellom hastighetspotensial og strømfunksjon (Cauchy-Riemanns relasjoner)
$\phi = v_x x + v_y y$ $\psi = -v_x y + v_y x$	Hastighetspotensial og strømfunksjon for rettlinjett (uniform) strøm. Komponentene v_x og v_y er konstante.
$\phi = A \ln r$ $\psi = -A \theta$	Kilde/sluk med sentrum i origo
$\phi = A \theta$ $\psi = A \ln r$	Punktvirvel med sentrum i origo

$\phi = \frac{Ax}{x^2 + y^2}$ $\psi = \frac{Ay}{x^2 + y^2}$	Dipol med akse langs x -aksen og sentrum på y -aksen
$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$	Laplace-operatoren $\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi)$
$\frac{D}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$	Operator for partikkelderivasjon
$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$	Partikkelakselerasjon = lokal akselerasjon + konvektiv akselerasjon
$M = \int_{\sigma} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$	Massestrøm per tidsenhet gjennom en flate σ
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$	Massebevarelse/Kontinuitetslikningen
$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}$	Euler-likningen (bevegelseslikningen for en friksjonsfri strøm)
$\mathcal{H} = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + gz = \mathcal{H}_0$	Bernoullis likning
$\mathbf{H} = \rho c \mathbf{v} T - k \nabla T$	Varmestrømsvektor
$\int_{\sigma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} d\sigma$	Varmefluksen gjennom en flate σ

Tillegg D

Eksamensoppgaver

D.1 Prøveeksamen

Oppgave 1.

Gitt skalarfunksjonen $\beta = x^2 + 4y^2$ av de kartesiske koordinatene x, y .

- Finne gradientvektoren $\nabla\beta$, divergensen til gradientvektoren $\nabla \cdot (\nabla\beta)$ og virvlingen til gradientvektoren $\nabla \times (\nabla\beta)$.
- Finne vektoren $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla\beta$ hvor \mathbf{k} er enhetsvektoren normalt xy -planet. Hvilken retning har vektoren \mathbf{v} i forhold til $\nabla\beta$? Beregn virvlingen til vektoren \mathbf{v} .
- Skisser ekviskalarlinjer for $\beta = 1, 2, 3$ og angi retningen for vektorene $\nabla\beta$ og \mathbf{v} på det samme plottet.

Oppgave 2.

Et strømfelt i xy -planet kan uttrykkes $\mathbf{v} = u(x, y)\mathbf{i} + v(x, y)\mathbf{j}$ hvor vektorkomponentene $\{u, v\}$ er funksjoner av de kartesiske koordinatene x, y og \mathbf{i}, \mathbf{j} er enhetsvektorer rettet henholdsvis langs x og y -aksen.

- Hva er betingelsene for at det skal eksistere et potensiale ϕ og en strømfunksjon (feltfunksjon) ψ for vektorfeltet \mathbf{v} ?
- Avgjør om det eksisterer et hastighetspotensiale og/eller strømfunksjon for de to strømfeltene

1) $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

2) $\mathbf{v} = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$

og bestem funksjonene ϕ og ψ i tilfelle de eksisterer.

- Skisser vektorfeltet 1).
- Vis at ekviskalarlinjer for ϕ og ψ står vinkelrett på hverandre (danner ortogonale sett av linjer).

Oppgave 3.

Gitt et 3-dimensjonalt vektorfelt \mathbf{A} i kartesiske koordinater x, y, z :

$$\mathbf{A} = (x - y)\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - \frac{1}{2}z^2\mathbf{k}$$

hvor $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ er enhetsvektorer rettet henholdsvis langs de tre akseretningene.

- Skriv opp de generelle formelene for Gauss' sats (divergensteoremet) og Stokes' sats og definer de forskjellige størrelsene som inngår i formelene (bevis for formelene kreves ikke).
- Finn vektorfluksen av vektoren \mathbf{A} gjennom en lukket og sammenhengende flate σ av vilkårlig form. Volumet som flaten omslutter er τ .
- Finn sirkulasjonen av vektoren \mathbf{A} omkring en sirkelkurve i xy -planet med radius a .

Oppgave 4.

Vi skal se på to strømfelter fra potensialteorien som henholdsvis er gitt med følgende uttrykk for strømfunksjonen i kartesiske koordinater (x, y)

$$\begin{aligned}\psi_1 &= Uy \\ \psi_2 &= \frac{Ay}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

hvor U og A er konstanter.

- Gi navnene på disse to feltene og forklar kort hva de representerer.
- Forklar hvorfor funksjonen $\psi = \psi_1 + \psi_2$ også oppfyller betingelsene for å være strømfunksjon i potensialstrøm.
- Innfør plane polarkoordinater r, θ hvor θ er vinkelen med x -aksen og r er avstand fra origo. Finn uttrykket for ψ i polarkoordinater.
- Finn komponentene av strømvektoren i polarkoordinater $\mathbf{v} = \{v_r, v_\theta\}$ når du får oppgitt at $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla\psi$ hvor \mathbf{k} er enhetsvektoren normalt xy -planet.
- Skisser strømlinjene.

D.2 Eksamen 2002

Oppgave 1.

I en terrengmodell er høyden h over et referansenivå gitt ved høydeformelen

$$h(x, y) = h_0 + \Delta h \frac{x}{a} \frac{y}{b}$$

hvor h_0 og Δh er konstanter gitt i enheter meter og x, y er avstander i kilometer langs akseretningene x, y i horisontalplanet og a, b er konstanter med enhet kilometer.

- a) Vis at ved passende skalering og valg av konstantene h_0 og Δh så kan høydeformelen bringes over på dimensjonsløs form

$$\beta(x, y) = 1 + xy$$

hvor x, y nå betegner dimensjonsløse koordinater og β er en dimensjonsløs skalarfunksjon av x og y .

- b) Tegn ekviskalarlinjene $\beta = 0, \pm 1, \pm 2, 3$. Beskriv kort hvordan terrengformen er.
- c) Finn gradientvektoren $\nabla\beta$. Hva uttrykker gradientvektoren i dette tilfellet? Tegn inn gradientvektoren i punktene $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ og $(-1,-1)$ på plottet i b).
- d) Vis at gradientvektoren $\nabla\beta$ står normalt på ekviskalarlinjene for β .

Oppgave 2.

To plane strømfelt er gitt henholdsvis ved strømvektorene

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{1}{2}y^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} \end{aligned}$$

hvor x, y er kartesiske koordinater og \mathbf{i}, \mathbf{j} er enhetsvektorer henholdsvis langs x - og y -aksen.

- a) Finn divergens og virvling til vektorfeltene.
- b) Avgjør om det eksisterer et hastighetspotensiale ϕ og en strømfunksjon ψ for de to feltene. Bestem funksjonene $\phi(x, y)$ og $\psi(x, y)$ når disse eksisterer.
- c) Skisser vektorfeltet \mathbf{v}_1 ved å plote strømvektorene på koordinataksene og strømlinjer.
- d) Vis hvordan en kan finne strømlinjer i det tilfellet ovenfor hvor strømfunksjonen ikke eksisterer.

Oppgave 3.

Gitt en 3-dimensjonalt vektorfelt \mathbf{A} i kartesiske koordinater x, y, z

$$\mathbf{A} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$$

hvor $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ er enhetsvektorene rettet henholdsvis langs de tre akseretningene.

- a) Skriv opp formelen for Stokes' sats og definer de forskjellige størrelser som inngår i formelen. Bevis for formelen kreves ikke.
- b) Beregn sirkulasjonen av vektoren \mathbf{A} omkring en lukket sirkelkurve med sentrum i origo og radius a når
 - i) sirkelen ligger i xy -planet.
 - ii) sirkelen ligger i xz -planet.

Oppgave 4.

I to-dimensjonal plan bevegelse kan strømvektoren uttrykkes i polarkoordinater r, θ ved

$$\mathbf{v} = v_r(r, \theta)\mathbf{i}_r + v_\theta(r, \theta)\mathbf{i}_\theta$$

hvor v_r og v_θ er strømkomponentene henholdsvis i radiell- og aksialretning. \mathbf{i}_r og \mathbf{i}_θ er enhetsvektorene i de tilsvarende retningene. Divergensen til strømvektoren i polarkoordinater er:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}$$

- a) Vis at for divergensfri strøm så kan det innføres en strømfunksjon $\psi = \psi(r, \theta)$ slik at

$$v_r = -\frac{\partial \psi}{r \partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Vi skal nå se på to strømfelt fra potensialteorien som henholdsvis er gitt ved følgende uttrykk for strømfunksjon

$$\psi_1 = A\theta$$

$$\psi_2 = B \ln r$$

hvor A og B er positive konstanter.

- b) Finn strømkomponentene v_r og v_θ for de to feltene. Skisser strømlinjer og angi strømretning. Hva kalles disse feltene?
- c) Forklar hvorfor funksjonen $\psi_3 = \psi_1 + \psi_2$ også oppfyller betingelsen for å være strømfunksjon i potensialstrøm.

-
- d) Finn likningen for strømlinjene for feltet med strømfunksjon ψ_3 . Sett $A = B = 1$ og skisser strømlinjene.
- e) Beregn volumstrømmen (strømfluksen) per tidsenhet i feltet med strømfunksjon ψ_3 gjennom en sirkelflate med radius $r = a$.

D.3 Eksamen 2003

Oppgave 1.

Gitt en skalarfunksjon $\beta = A \ln(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ av de kartesiske koordinatene x, y og hvor A er en positiv konstant.

- Finne likningen for ekviskalarlinjene og skisser ekviskalarlinjene for $\beta = \frac{1}{2}, 1, 2$ når konstanten $A = 2$.
- Finne gradientvektoren $\nabla\beta$ i kartesiske koordinater.
- Innfør plane polarkoordinater r, θ og finn uttrykket for gradientvektoren $\nabla\beta$ i dette koordinatsystemet.
- Finne komponentene for vektoren $\mathbf{v} = -\nabla \times \beta \mathbf{k}$ når $\beta = \beta(x, y)$ er en vilkårlig skalarfunksjon av x og y og \mathbf{k} er enhetsvektoren normalt xy -planet. Vis at \mathbf{v} står normalt på gradientvektoren $\nabla\beta$. Finn divergensen til vektoren \mathbf{v} .

Oppgave 2.

To plane strømfelt er gitt henholdsvis ved strømvektorene

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= x\mathbf{i} - y\mathbf{j} \\ \mathbf{v}_2 &= xy\mathbf{i} + \frac{1}{2}x^2\mathbf{j} \end{aligned}$$

hvor x, y er kartesiske koordinater og \mathbf{i}, \mathbf{j} er enhetsvektorer henholdsvis langs x - og y -aksen.

- Finne divergens og virvling til vektorfeltene.
- Avgjør om det eksisterer et hastighetspotensiale ϕ og en strømfunksjon ψ for de to feltene. Bestem funksjonene $\phi(x, y)$ og $\psi(x, y)$ når disse eksisterer.
- Skisser vektorfeltet \mathbf{v}_1 ved å plote strømvektorene på koordinataksene og strømlinjer.
- Vis hvordan en kan finne strømlinjer i det tilfellet ovenfor hvor strømfunksjonen ikke eksisterer.

Oppgave 3.

Vi skal regne med et tre-dimensjonalt vektorfelt \mathbf{A} .

- Skriv opp den generelle formelen for Gauss' sats (divergensteoremet) og definer alle størrelsene som inngår i formelen. Bevis for formelen kreves ikke.

I sfæriske polarkoordinater (kulekoordinater) har vektoren $\mathbf{A} = A_r \mathbf{i}_r$ bare en radiell vektorkomponent $A_r = A_r(r)$ som er en funksjon av avstanden r fra origo i koordinat-systemet. Enhetsvektoren i radiell retning er \mathbf{i}_r . Du får oppgitt at $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r)$.

- b) Sett $A_r = \frac{1}{3}Cr$ hvor C er en konstant. Beregn vektorfluksen av \mathbf{A} gjennom en kuleflate med radius $r = a$ og sentrum i origo på to måter: 1) Ved å bruke Gauss' sats. 2) Ved å regne ut integralet for vektorfluksen direkte. Vis at 1) og 2) gir samme svar.
- c) Sett så $A_r = \frac{C}{r^2}$. Beregn vektorfluksen av \mathbf{A} gjennom samme kuleflate som i b) på de samme to måtene 1) og 2). Hvorfor gir 1) og 2) forskjellig svar i dette tilfellet?

Oppgave 4.

Vi skal se på to plane (to-dimensjonale) potensialfelt og bruke kartesiske koordinater x, y og polarkoordinater r, θ til å beskrive feltene. Strømfunksjonen (feltfunksjonen) for de to feltene er gitt henholdsvis ved

$$\psi_1 = Uy$$

$$\psi_2 = -aU\theta$$

hvor U og a er positive konstanter.

- a) Hvilke egenskaper har potensialfelter
- b) Skisser strømlinjene (feltlinjene) for de to feltene ψ_1 og ψ_2 . Hva kalles feltene?
- c) Forklar hvorfor summen av feltene også er et potensialfelt med strømfunksjon (feltfunksjon) $\psi = \psi_1 + \psi_2$.
- d) Finn likningen for strømlinjene (feltlinjene) for feltet ψ . Vis at strømlinjen $\psi = 0$ er gitt ved $\theta = 0$ og $\frac{r}{a} = \frac{\theta}{\sin \theta}$. Finn noen punkter på strømlinjene og skisser strømlinjene for feltet.
- e) Finn strømhastigheten i punktet med koordinater $\frac{r}{a} = 1, \theta = 0$.
(Hint: $v_r = -\frac{\partial \psi}{r \partial \theta}$, $v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$.)

D.4 Eksamen V2004

Oppgave 1.

I plane polarkoordinater (r, θ) er et vektorfelt gitt ved:

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{i}_r + v_\theta \mathbf{i}_\theta$$

hvor \mathbf{i}_r og \mathbf{i}_θ er enhetsvektorene og komponentene v_r og v_θ er funksjoner av r og θ . Feltet er divergensfritt og virvelfritt.

- Begrunn hvorfor det eksisterer en potensialfunksjon (hastighetspotensiale) ϕ for feltet og vis at v_r og v_θ kan bestemmes fra ϕ .
- Vis at det eksisterer en feltfunksjon (strømfunksjon) ψ slik at $v_r = -\frac{\partial \psi}{r \partial \theta}$ og $v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$.
- Vis at ekviskalarlinjene for ϕ og ψ står normalt på hverandre.

Formler:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}.$$

Oppgave 2.

Vi skal se på to strømfelter fra potensialteorien (potensialstrøm) som henholdsvis er gitt følgende uttrykk for strømfunksjonen (feltfunksjonen) i kartesiske koordinater (x, y) .

$$\psi_1 = Uy$$

$$\psi_2 = aU \ln \left[(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right]$$

hvor U og a er konstanter.

- Gi navnene på disse to feltene, skisser strømlinjene og forklar kort hva de representerer.
- Forklar hvorfor funksjonen $\psi = \psi_1 + \psi_2$ også oppfylder betingelsene for å være strømfunksjon i potensialstrøm.
- Innfør plane polarkoordinater (r, θ) hvor θ er vinkelen med x -aksen og r er avstand fra origo. Finn uttrykket for ψ i polarkoordinater og bestem komponentene av strømvektoren i polarkoordinater $\mathbf{v} = \{v_r, v_\theta\}$. Beregn sirkulasjonen av vektoren \mathbf{v} langs en sirkel med radius $r = a$ og sentrum i origo.

Oppgave 3.

Du får oppgitt følgende formel for Bernoullis likning (bevis kreves ikke):

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + gz = \mathcal{H}_0.$$

- a) Definer alle størrelser som inngår i likningen og angi under hvilke betingelser likningen gjelder.

I et rett horisontalt og sirkulært rør er det en innsnevring. Radius i den tykkeste rørdelen er R og i den smaleste r . I røret er det en stasjonær (tidsuavhengig) strøm av en inkompressibel (usammentrykkbar) væske. Strømhastigheten antas å være konstant over rørtverrsnittet og rettet i rørets akseretning (x -aksen). Ved tverrsnittet A (der røret er tykkest), vinkelrett på røraksen er strømhastigheten u_A og trykket p_A .

- b) Beregn volumstrømmen (strømfluksen) per tidsenhet gjennom tverrsnittsflaten ved A .
- c) Finn strømhastigheten ved tverrsnittet B (der røret er smalest).
- d) Finn trykket i væsken ved tverrsnittet B .

D.5 Eksamen H2004

Oppgave 1.

I plane kartesiske koordinater (x, y) er et vektorfelt gitt ved:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$$

hvor \mathbf{i} og \mathbf{j} er enhetsvektorene og komponentene v_x og v_y er funksjoner av x og y . Feltet er divergensfritt og virvelfritt.

- Vis at det eksisterer en potensialfunksjon (hastighetspotensiale) ϕ for feltet og vis at v_x og v_y kan bestemmes fra ϕ .
- Vis at det eksisterer en feltfunksjon (strømfunksjon) ψ .
- Vis at ekviskalarlinjene for ϕ og ψ står normalt på hverandre.

Oppgave 2.

Vi skal se på to strømfelter fra potensialteorien (potensialstrøm) som er gitt ved følgende uttrykk for strømfunksjonen (feltfunksjonen) i kartesiske koordinater (x, y) :

$$\begin{aligned}\psi_1 &= Uy \\ \psi_2 &= -\frac{Uay}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

hvor U og a er konstanter.

- Gi navnene på disse to feltene, skisser strømlinjene og forklar kort hva de representerer.
- Forklar hvorfor funksjonen $\psi = \psi_1 + \psi_2$ også oppfyller betingelsene for å være strømfunksjon i potensialstrøm.
- Skisser strømlinjen $\psi = 0$.
- Innfør polarkoordinater (r, θ) og bestem komponentene av strømvektoren i polarkoordinater $\mathbf{v} = \{v_r, v_\theta\}$ for feltet ψ .

Formler: $v_r = -\frac{\partial\psi}{r\partial\theta}$, $v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r}$.

Oppgave 3.

Den totale varmestrømmen (varmefluksen) per flateenhet og tidsenhet kan skrives

$$\mathbf{H} = \rho c T \mathbf{v} - k \nabla T.$$

- Definer alle størrelsene som inngår med enheter og forklar hva de to leddene står for.

- b) Sett opp integralet for den totale varmestrømmen gjennom en flate σ .
- c) Vi bruker et kartesisk koordinatsystem (x, y, z) . Temperaturfeltet er $T = T_0(1 - \beta z)$ og strømvektoren er $\mathbf{v} = \alpha z \mathbf{i}$ hvor T_0 , β og α er konstanter. Parametrene ρ , c og k er også konstanter. Beregn varmestrømmen gjennom en rektangulær flate i xy -planet med sidekanter a og b .

Tillegg E

Matlab-kode

E.1 Fjelltoppen Berenberg (overflate, konturer)

Figur 1.7, side 19 (og figur 3.1, side 51).

```
%-----  
% Overflate- og konturlinjeplott av fjelltoppen Berenberg  
%-----  
  
h0 = 2277;           % Høyden av toppen av fjellet (m)  
R = 4;             % Mål for radius av fjellet (km)  
  
[x,y] = meshgrid(-10:.5:10); % Grid for x- og y-verdiene (km)  
h = h0./(1+(x.^2+y.^2)./(R.^2)); % Beregn høyden h (m)  
  
figure(1)           % Lag en ny figur  
surf(x,y,h,'FaceColor',[.36, .67, .93]) % Plott overflaten (blå farge)  
axis square        % Sett aksestørrelsene like  
  
[x,y] = meshgrid(-10:.1:10); % Definer et finere grid for konturlinjene  
h = h0./(1+(x.^2+y.^2)./(R.^2)); % Beregn høyden med det nye gridet  
  
figure(2)           % Lag en ny figur  
[C,hh] = contour(x,y,h,'b'); % Plott konturlinjene (blå farge)  
axis square        % Sett aksestørrelsene like  
  
clabel(C, 'manual') % Plasser konturlinjene manuelt
```

E.2 Lufttrykket i tilknytning til et stormsenter

Figur 1.8, side 20 (og figur 3.2, side 53).

```
%-----  
% Konturlinjeplott av lufttrykket i tilknytning til et stormsenter  
%-----  
  
p0 = 1000;          % Lufttrykket langt fra sentrum (hPa)  
dp = 40;           % Trykkfallet inn mot sentrum (hPa)  
R = 50;            % Et mål for utstrekningen av
```

```

                                % lavtrykket (km)

[x,y] = meshgrid(-150:1:150);    % Grid for x- og y-verdiene (km)
p = p0 - dp./(1+(x.^2+y.^2)./R.^2); % Beregn lufttrykket p (hPa)

[C,h] = contour(x,y,p,'b');     % Plott konturlinjene (blå farge)
clabel(C)                       % Plasser trykkverdiene (isobarene)

axis square                     % Sett aksestørrelsene like

```

E.3 Isobarflater

Figur 1.9, side 21.

```

%-----
% Isobarflater for lufttrykket i tilknytning til et stormseneter
%-----

p0 = 1000;                       % Lufttrykket langt fra sentrum (hPa)
dp = 40;                         % Trykkfallet inn mot sentrum (hPa)
R = 50;                          % Et mål for utstrekningen av lavtrykket (km)
H = 5000;                       % Skalahøyden (m)

[x,y] = meshgrid(-175:8:175); % Grid for x- og y-verdiene (km)

% Bruk p_i = 500 hPa
% -----

z0 = H.*log(p0./500);            % Beregn z0
z = H.*log(1-(dp./p0)./(1+(x.^2+y.^2)./R.^2))+z0; % Beregn høyden z (m)

figure(1)                       % Lag en ny figur
surf(x,y,z,'FaceColor',[.36, .67, .93]) % Plott overflaten (blå farge)
axis square                     % Sett aksestørrelsene like

% Bruk p_i = 850 hPa
% -----

z0 = H.*log(p0./850);            % Beregn z0
z = H.*log(1-(dp./p0)./(1+(x.^2+y.^2)./R.^2))+z0; % Beregn høyden z (m)

figure(2)                       % Lag en ny figur
surf(x,y,z,'FaceColor',[.36, .67, .93]) % Plott overflaten (grå farge)
axis square                     % Sett aksestørrelsene like

```

E.4 Fjelltoppen Berenberg (konturer, gradientvektor)

Figur 2.4, side 34 (og figur 3.3, side 56).

```

%-----
% Konturlinje- og gradientvektorplott av fjelltoppen Berenberg
%-----

```



```

h0 = 2277; % Høyden av toppen av fjellet (m)
R = 4; % Mål for radius av fjellet (km)

[x,y] = meshgrid(-10:.1:10); % Grid for x- og y-verdiene (km)
h = h0./(1+(x.^2+y.^2)./(R.^2)); % Beregn høyden h (m)
contour(x,y,h,'b') % Plott konturlinjene (blå farge)

hold on % Behold konturlinjene og akse-egenskapene

[x,y] = meshgrid(-10:2:10); % Definer et grovere grid til vektorfeltet
h = h0./(1+(x.^2+y.^2)./(R.^2)); % Beregn høyden med det nye gridet

[dbx,dby] = gradient(h); % Beregn gradientvektoren (dh/dx, dh/dy)
quiver(x,y,dbx,dby,.75, 'r') % Plott vektorfeltet (rød farge) og skalèr
% vektorlengden med en faktor 0.75

hold off % Trenger ikke flere plott i denne figuren
axis square % Sett aksestørrelsene like

```

E.5 Uniformt felt

Figur 9.2, side 128.

```

%-----
% Uniformt felt: strømlinjer og konturlinjer for potensialet
%-----

u0 = 1; v0 = 1; % To konstanter

[x,y] = meshgrid(-5:.02:5); % Grid for x- og y-verdiene
phi = u0.*x + v0.*y; % Hastighetspotensialet
psi = -u0.*y + v0.*x; % Strømfunksjonen

hold on
lines = [-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3]; % Hvilke strømlinjer som skal plottes
[C1,h1] = contour(x,y,psi,lines, 'k-'); % Plott strømlinjene
%[C2,h2] = contour(x,y,phi,lines, 'k--'); % Plott konturlinjene for potensialet

axis([-5,5,-5,5]) % Definer min/maks for x- og y-aksen
axis square % Sett aksestørrelsene like

x = [0 .5 1 1.5 2 2.5 3]; % Definer noen punkter
y = [3 2.5 2 1.5 1 .5 0];
quiver(x, y, ones(7,1), ones(7,1), 'k') % Plott vektorer i punktene

clabel(C1,h1,'manual') % Plasser strømlinjene manuelt

hold off

```

E.6 Stagnasjonsfelt

Figur 9.3, side 129.

```

%-----
% Stagnasjonsfelt: strømmlinjer og konturlinjer for potensialet
%-----

A = 1;                                % En konstant

[x,y] = meshgrid(-3:.01:3);           % Grid for x- og y-verdiene
phi = .5*A.*(x.^2 - y.^2);           % Hastighetspotensialet
psi = -A.*x.*y;                       % Strømfunksjonen

lines = [-1,-.5, -.25, 0, .25, .5,1]; % Hvilke strømmlinjer som skal plottes
[C1,h1] = contour(x,y,psi,lines, 'k-'); % Plott strømmlinjene
clabel(C1,h1,'manual')                % Plasser verdiene manuelt
hold on                                % Behold strømmlinjene i figuren

[C2,h2] = contour(x,y,phi,lines, 'k--'); % Plott konturlinjene for potensialet
%clabel(C2,h2,'manual')                % Plasser verdiene manuelt

axis([-3,3,-3,3])                     % Definer min/maks for x- og y-aksen
axis square                            % Sett aksestørrelsene like
hold off

```

E.7 Kilde og sluk

Figur 9.5, side 131.

```

%-----
% Kilde og sluk: strømmlinjer og konturlinjer for potensialet
%-----

A = 1;                                % En konstant

warning off                             % Hindrer Matlab i å skrive ut
                                        % varsler som f.eks. Log of zero

[x,y] = meshgrid(-6:.05:6);           % Grid for x- og y-verdiene
phi = A.*log(sqrt(x.^2 + y.^2));      % Hastighetspotensialet: phi = A*ln(r)
psi = -A.*atan(y./x);                 % Strømfunksjonen: psi = -A*theta

lines = [-1.2, -.8, -.4, 0, .4, .8, 1.2]; % Hvilke strømmlinjer som skal plottes
[C1,h1] = contour(x,y,psi,lines, 'k-'); % Plott strømmlinjene
clabel(C1,h1, 'manual')                % Plasser verdiene manuelt

hold on                                % Behold strømmlinjene i figuren

lines = [-1.5, -1, -.5, 0, .5, 1, 1.5]; % Andre konturlinjer for potensialet
[C2,h2] = contour(x,y,phi,lines, 'k--'); % Plott konturlinjene for potensialet
%clabel(C2,h2, 'manual')                % Plasser verdiene manuelt

axis([-6,6,-6,6])                     % Definer min/maks for x- og y-aksen
axis square                            % Sett aksestørrelsene like
hold off
warning on

```

E.8 Punktvirvel

Figur 9.6, side 131.

```

%-----
% Punktvirvel: strømlinjer og konturlinjer for potensialet
%-----

A = 1;                                % En konstant

warning off                            % Hindrer Matlab i å skrive ut
                                        % varsler som f.eks. Log of zero

[x,y] = meshgrid(-6:.05:6);           % Grid for x- og y-verdiene
phi = A.*atan(y./x);                  % Hastighetspotensialet: phi = A*theta
psi = A.*log(sqrt(x.^2 + y.^2));      % Strømfunksjonen: psi = A*ln(r)

lines = [-.5, 0, .5, 1, 1.5];        % Hvilke strømlinjer som skal plottes
[C1,h1] = contour(x,y,psi,lines, 'k-'); % Plott strømlinjene
clabel(C1,h1, 'manual')              % Plasser verdiene manuelt

hold on                                % Behold strømlinjene i figuren

lines = [-1, -.5, 0, .5, 1];         % Andre konturlinjer for potensialet
[C2,h2] = contour(x,y,phi,lines, 'k--'); % Plott konturlinjene for potensialet
%clabel(C2,h2, 'manual')             % Plasser verdiene manuelt

axis([-6,6,-6,6])                    % Definer min/maks for x- og y-aksen
axis square                          % Sett aksestørrelsene like
hold off
warning on

```

E.9 Dipolfelt

Figur 9.11, side 136.

```

%-----
% Dipolfelt: strømlinjer og konturlinjer for potensialet
%-----

A = 1;                                % En konstant

[x,y] = meshgrid(-6.5:.05:6.5);      % Grid for x- og y-verdiene
phi = A.*x./(x.^2 + y.^2);           % Hastighetspotensialet
psi = A.*y./(x.^2 + y.^2);           % Strømfunksjonen

lines = [-.7,-.35,-.2, 0, .2,.35,.7]; % Hvilke strømlinjer som skal plottes
[C1,h1] = contour(x,y,psi,lines, 'k-'); % Plott strømlinjene
clabel(C1,h1, 'manual')              % Plasser verdiene manuelt

hold on                                % Behold strømlinjene i figuren

[C2,h2] = contour(x,y,phi,lines, 'k--'); % Plott konturlinjene for potensialet
%clabel(C2,h2, 'manual')             % Plasser verdiene manuelt

```

```
axis([-6.5,6.5,-6.5,6.5])      % Definer min/maks for x- og y-aksen
axis square                  % Sett aksestørrelsene like
hold off
```

Tillegg F

Fasit og hint til noen av oppgavene

F.1 Kapittel 1

1. Hint: prøv om det er mulig å skrive $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$, $c \in \mathbf{R}$.

3.

a) $\mathbf{r}(t) = (a + v_x t)\mathbf{i} + (b + v_y t)\mathbf{j} + (c + v_z t)\mathbf{k}$

b) $\mathbf{r}(t) = \mathbf{j} + tv_z \mathbf{k}$

c) $-7\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$

d) Banene skjærer hverandre ikke

e) $(3 - 7t)\mathbf{i} + (-1 + 4t)\mathbf{j} + (5 - 5t)\mathbf{k}$

4.

a) $\mathbf{n} = \frac{3}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{j} - \frac{4}{\sqrt{29}}\mathbf{k}$

b) f.eks. $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i}$

5. $\approx 147.53^\circ$

6. $-\frac{1}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$

7.

\times	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
\mathbf{i}	0	\mathbf{k}	$-\mathbf{j}$
\mathbf{j}	$-\mathbf{k}$	0	\mathbf{i}
\mathbf{k}	\mathbf{j}	$-\mathbf{i}$	0

9. $11\sqrt{3}$

10. $\frac{9}{2}$

11.

a) $(4\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$

b) $(0, 3)$

12.

a) $h_m = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g}, \quad t_m = \frac{v_0}{g}$

b) $h^* = 2t^* - t^{*2}$

F.2 Kapittel 2

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 2z$

2.

a) $T_1(x) = x$

b) $T_1(x) = 1$

c) $T_1(x) = 1$ og $T_1(x) = e(2x - 1)$

d) $T_1(x) = -\frac{1}{2\pi}(x - \pi^2)$

e) $T_1(x, y) = x$

f) $T_1(x, y) = -3y - 3$

g) $T_1(x, y) = \frac{4x + y - 4}{18}$

3.

a) $T_2(x) = x$

b) $T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$

c) $T_2(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{8}(x - 2)^2$

d) $T_2(x) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e(x + 1) + \frac{1}{4}e(x + 1)^2$

4. $T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$

5.

a) $\nabla\beta = (2x + y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$

b) $\nabla\beta = -e^{-(xy+z)}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k})$

c) $\nabla\beta = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$

d) $\nabla\beta = -\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$

e) $\nabla\beta = \frac{d\beta}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}$

6.

a) $\beta = xyz + C$

b) $\beta = x \cos(yz) + C$

c) $\beta = e^{-x} + e^{-y} + e^{-z} + C$

8.

a) Størrelse: $\frac{T_0}{R}$, retning: $-\mathbf{r}$

b) $T^* = \frac{1}{r^*}$

9.

a) Hint: likningen for konturene: $y = \frac{(h_1 - h_0)R^2}{a} \frac{1}{x}$ for en gitt verdi $h = h_1$

b) Hint: se på størrelsen til gradientvektoren

c) $h^* = 1 + a^*x^*y^*$

10.

a) $y = \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$

b) $y = \pm \sqrt{\frac{b}{a}x^2 + \frac{2c}{a}}$

c) $y = \frac{b}{2a}x^2 + \frac{c}{a}$

11. $x^2 + y^2 = \text{konstant}$

13.

a) $z = \frac{C}{x^2}$

b) Hint: se på strømstyrken i xy -planet

F.3 Kapittel 3

1.

a) $\text{sum}(\text{diag}(A + B + C))$

b) $\text{sum}(\text{sum}(A(1:2,:),'))$

c) $v = -4*\text{pi}:\text{pi}/2:4*\text{pi}$

d) $D = 3*\text{eye}(8) + \text{diag}(2*\text{ones}(7,1),-1) + \text{diag}(2*\text{ones}(7,1),1) + \text{diag}(\text{ones}(6,1),-2) + \text{diag}(\text{ones}(6,1),2)$

F.4 Kapittel 4

1.

a) $\bullet \nabla \cdot \mathbf{v} = y^2 z^3 + 2xyz^3 + 3xy^2 z^2$
 $\bullet \nabla \times \mathbf{v} = (2xyz^3 - 3xy^2 z^2)\mathbf{i} + (3xy^2 z^2 - y^2 z^3)\mathbf{j} + (y^2 z^3 - 2xyz^3)\mathbf{k}$

b) $\bullet \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
 $\bullet \nabla \times \mathbf{v} = (xe^{xy} - xe^{xz})\mathbf{i} + (ye^{yz} - ye^{xy})\mathbf{j} + (ze^{xz} - ze^{yz})\mathbf{k}$

c) $\bullet \nabla \cdot \mathbf{v} = 2xe^{x^2} + x \cos(xy) + 2z \sin(z^2)$
 $\bullet \nabla \times \mathbf{v} = y \cos(xy)\mathbf{k}$

d) $\bullet \nabla \cdot \mathbf{v} = 2(x + y + z) - \frac{xy}{z^2}$
 $\bullet \nabla \times \mathbf{v} = \frac{x}{z}\mathbf{i} + \left(2(x + y + z) - \frac{y}{z}\right)\mathbf{j} - 2(x + y + z)\mathbf{k}$

2.

a) $\bullet \nabla \times \mathbf{v} = \frac{2U_0 z}{h^2}\mathbf{j}$
 $\bullet \psi(z) = -\frac{1}{3} \frac{U_0}{h^2} z^3 + C_1$
 $\bullet \text{Strikmlinjene: } z = C$
 $\bullet Q = \frac{1}{3} U_0 h$

b) $\bullet \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

- $\nabla \times \mathbf{v} = \frac{U_0}{z+h} \mathbf{j}$
- $\psi(z) = -U_0(z+h) \left(\ln \left(\frac{z+h}{h} \right) - 1 \right) + C_1$
- Strømlinjene: $z = C$
- $Q = U_0 h (2 \ln 2 - 1)$

3.

- $v(x, y) = -2axy + f(x)$ for alle valg av $f(x)$
- Hint: Bruk $f(x) = 0$ videre i oppgaven
- $\psi(x, y) = -ax^2y + C_1$
- Strømlinjene: $y = \frac{C}{x^2}$ og $x = 0$

4.

- $Q = 4\Delta x \Delta y$
- Strømlinjene: $y = Cx^{1/3}$

5.

- a) $\nabla \cdot \mathbf{v} = a$
- c) $\frac{\Delta Q}{\Delta x \Delta y} = \nabla \cdot \mathbf{v}$

6.

- a) $\nabla \times \mathbf{v} = 2a\mathbf{k}$
- c) $\frac{\Delta C}{\Delta x \Delta y} = |\nabla \times \mathbf{v}|$

7.

- a) $v_y(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C$, hvor C er en vilkårlig konstant.
- b) $\psi(x, y) = -\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}x^3 + Cx + D$, hvor C og D er vilkårlige konstanter.

F.5 Kapittel 6

1. $\frac{132}{5}$

2.

- $W = -2$
- $V(x, y) = -xy^2 - 5x + 8y + C$

4.

- a) $\mathbf{F} = -Mg\mathbf{k}$, $M = \rho l \pi a^2$
- b) $\mathbf{F} = -\frac{4}{3}\rho g \pi a^3 \mathbf{k}$

5.

- a) $\frac{3}{4}(e - 1)$

6. $\frac{17}{60}$

7.

- a)
 - $-1 \leq x \leq 1$
 - $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$
 - $-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$
- b) Hint: $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} + C$

F.6 Kapittel 7.

1.

- a)
 - $|\mathbf{v}| = \omega r$
 - $C = 2\pi\omega r^2$
- b) $2\pi\omega r^2$
- c) $C = 2\omega\Delta x\Delta y$. Hint: bruk symmetri for å korte ned på utregningen.

3.

- a) $Q = 4\alpha\pi r^3$
- b) $Q = 3\alpha\tau$ (Hint: bruk Gauss' sats)

4. Hint: bruk Gauss' sats

5. Hint: bruk Gauss' sats

6.

b) Hint: bruk Gauss' sats for gradientvektoren

7.

a) $V(x, y) = -xy^2 - 5x + 8y$

b) $W = -2$

c) $W = -2$

d) $Q = 1$

e) $C = 0$

F.7 Kapitel 8

1.

a) $\beta = r^2 \cos \theta \sin \theta$

b)

- $\nabla\beta = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
- $\nabla\beta = 2r \cos \theta \sin \theta \mathbf{i}_r + r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\mathbf{i}_\theta$

c) $\nabla \cdot \nabla\beta = 0$

d) $\nabla \times \nabla\beta = 0$

2.

a)

- $\nabla\beta = -A(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$
- $\nabla\beta = -\frac{A}{r^2}\mathbf{i}_r$

b) $\nabla \cdot \nabla\beta = 0$

3.

a) $\mathbf{v} = \omega r \mathbf{i}_\theta$

b) $C = \omega \Delta r \Delta \theta (2r + \Delta r)$

c) $\nabla \times \mathbf{v} = 2\omega \mathbf{k}$

4.

a) $\mathbf{v} = \frac{C}{2\pi r} \mathbf{i}_\theta$

b) 0

c) $\nabla \times \mathbf{v} = 0$

d) C

5.

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \bullet \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = Cr \left[\frac{df}{d\theta} \sin \theta - f \cos \theta \right] \Delta\theta \Delta\varphi \\ & \bullet \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_r = \frac{C}{r} \left[3 \cos 3\theta + \sin 3\theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right] \end{aligned}$$

6.

$$\text{a)} \text{ Hint: } \nabla \times (\alpha \mathbf{r}) = \alpha \nabla \times \mathbf{r} + \nabla \alpha \times \mathbf{r}$$

b) Hint: bruk kulekoordinater

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & \bullet V_0 = \frac{GmM}{R} \\ & \bullet W = -\frac{mgRh}{R+h} \end{aligned}$$

F.8 Kapittel 9

1.

$$\text{a)} \quad \phi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$$

$$\text{b)} \quad \psi(x, y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 + C$$

$$\text{c)} \quad \phi(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + C$$

2.

$$\text{a)} \quad \psi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + C$$

$$\text{c)} \quad \psi(x, y) = -2xy + C$$

4.

$$\bullet \psi(r, \theta) = Ur \sin \theta - A\theta$$

$$\bullet \text{ Strømlinjene: } r = \frac{\psi_0}{U \sin \theta} + \frac{A\theta}{U \sin \theta}$$

$$\mathbf{5.} \quad v_x = \frac{Ax}{r^2}, \quad v_y = \frac{Ay}{r^2}$$

6.

$$\bullet \phi(x, y) = A \ln (x^2 + (y \mp a)^2)^{1/2}$$

$$\bullet \psi(x, y) = -A \arctan \left(\frac{y \mp a}{x} \right)$$

7.

- $\phi(x, y) = A \arctan(y/x)$
- $\psi(x, y) = A \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
- $v_x = -\frac{Ay}{r^2}$
- $v_y = \frac{Ax}{r^2}$

8.

- b)
- $v_r = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta$
 - $v_\theta = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta$
 - $v_r(r = a) = 0$
 - $v_\theta(r = a) = -2U \sin \theta$

9. $\mathbf{E} = -\nabla V, V = \frac{Q}{r} + C$, hvor C er en vilkårlig konstant.

F.9 Kapitel 10

1.

- a) $-\omega^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$
- b)
- $\nabla p = \rho\omega^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$
 - $p(x, y) = \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2 + y^2) + p_0$

2.

- a) $\frac{DP}{dt} = 20$ (kroner per døgn per kg)
- c) 200 km per døgn

3.

- c)
- $\nabla p = \rho \frac{A^2}{r^3} \mathbf{i}_r$
 - $p(r) = p_0 - \frac{\rho A^2}{2r^2}$

4.

- Den lokale akselerasjonen: $-\frac{1}{(1+t)^2} [xi + 2yj - 3zk]$
- Den konvektive akselerasjonen: $\frac{1}{(1+t)^2} [xi + 4yj + 9zk]$

5.

- b) $a^2 [xi + 4yj + 9zk]$
- c) Størrelsen: $\rho a^2 \sqrt{x^2 + 16y^2 + 81z^2}$, retning: $-(xi + 4yj + 9zk)$

6.

- a) Strømlinjene: $y = Cx$
- b) $M = 2\pi\rho Qh$
- c) $\mathbf{a} = -\frac{Q^2}{r^4} (xi + yj)$

7.

- Strømhastigheten: $\frac{UA}{a}$
- Trykket: $p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1 - \frac{A^2}{a^2}\right]$

8.

- a) $\frac{Ua}{2b}$
- b) $p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1 - \frac{a^2}{4b^2}\right]$

9.

- a) $\sqrt{2gh}$
- b) $p_0 - \rho gH$
- c) $H < 9.899 \cdot 10^4 \text{Pa} \frac{1}{\rho g}$

10. $p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1 - 4\sin^2 \theta\right]$

11.

a) $Q = - \int_{\sigma} k \nabla T \cdot \mathbf{n} d\sigma$

b) $Q = 4\pi k(T_0 - T_s)R$

12.

a) $T^* = 1 + px^*y^*(1 - x^*)(1 - qy^*)z^*$, $p = \frac{\Delta T a^2}{T_0 b c}$, $q = \frac{a}{b}$
med skalering $T^* = \frac{T}{T_0}$, $x^* = \frac{x}{a}$, $y^* = \frac{y}{a}$, $z^* = \frac{z}{a}$

b) $-\mathbf{k}$

c) $Q = \frac{\Delta T k b c}{12a}$

d)

- $Q_T = -\frac{\Delta T k a b}{36c}$
- $Q_G = \frac{\Delta T k a b}{36c}$

F.10 Ekstraoppgaver

2.

a)

- $\phi(r, \theta) = \frac{B \cos \theta}{r}$
- $v_r = -\frac{B \cos \theta}{r^2}$
- $v_{\theta} = -\frac{B \sin \theta}{r^2}$

b)

- $Q = 0$
- $C = 0$

c)

- $Q = 0$
- $C = 0$

4.

a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

b) $O = 4\pi r^2$

5.

a) • $[l] = [m] = \frac{\text{rad}}{m}$

• $[\omega] = \frac{\text{rad}}{s}$

b) $\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 + l^2}}$

c) $c = \frac{\lambda}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$

Bibliografi

- [1] Marsden and Tromba. *Vector Calculus* (fifth edition). Freeman, 2003.
- [2] Matthews, Paul C., *Vector Calculus* Springer, 1998.
- [3] Lindstrøm, Tom og Klara Hveberg. *Flervariabel analyse med lineær algebra*. Prentice Hall, 2011
- [4] Rottman, Karl. *Matematisk formelsamling*. Bracan, 1995.
- [5] Varberg, Purcell, and Rigdon. *Calculus*. Prentice Hall, 2000.
- [6] Robert A. Adams. *Calculus (fifth edition)*. Addison Wesley, 2002.

Register

- ∇ -operatoren, 77, 87, 103, 118, 119, 125
 - i polarkoordinater, 118
 - i sfæriske polarkoordinater, 118–119
 - i sylindriske polarkoordinater, 118regneregler, 72–73
- uttrykt som en vektor, 73
- ∇^2 -operatoren, *Se Laplace-operatoren*
- akselerasjon
 - konvektiv, 145
 - i Navier-Stokes likning, 162
 - oppgaver, 157, 158
 - lokal, 145
 - i Navier-Stokes likning, 162
 - oppgaver, 158
 - symbol og enhet, 13
- arbeid, 92, 93
 - oppgaver, 100, 111, 122
- Arkimedes; oppdriftskraften, 98
- begrensningsflate, 107, 108, 147, 148
 - figur, 95
- begrensningskurve, 103–105, 121
- begrensningslinje, *Se begrensningskurve*
- Berenberg, 19, 51
- Bernoulli, Daniel, 151
- Bernoullikonstanten, 151
- Bernoullis likning, 150–152
- bevegelsesenergi, 153
- bevegelseslikningen, 148–150
- breddegrad, 117, 121
- bølgefelt, 11
- Cauchy, Baron Augustin Louis, 126
- Cauchy-Riemann relasjonene, 125–127
- curl, 73
- damptrykk, 159
- derivasjonssymboler, 28, 142
- determinant, 17, 69
- differensiallikning, 147, 149, 161
- differensialoperator, 142
- dimensjonsløse tall, 21–22
- dipolakse, 135
- dipolfelt, 134–136
 - figur, 136
 - oppgaver, 75, 137, 138, 165
- divergens, 72, 73, 113, 118, 125, 161
 - definisjon 2-D, 66
 - definisjon 3-D, 66
 - figur, 85
 - fysikalsk tolkning, 67
 - hvordan plotte med Matlab, 84
 - i Gauss' sats, 108
 - i meteorologi, 77
 - i polarkoordinater, 118
 - oppgaver, 120
 - i sfæriske polarkoordinater, 118
 - oppgaver, 120
 - i sylindriske polarkoordinater, 118
 - oppgaver, 74, 171, 173, 176
 - tolkning i meteorologi, 87
 - utledning, 64–67
 - varsler været, 87
- divergensfrie felt, 69–70, 124, 125, 133, 148, 150
 - 2-D strømfelt, 70
 - 2-D vektorfelt, 71
- inkompressibel væske/gass, 162
- introduksjon, 123
- kilde og sluk, 130
- Maxwells likninger, 163
- oppgaver, 75, 121, 136, 174
- punktvirvel, 132
- rettlinjet strøm, 127
- stagnasjonsstrøm, 128

- divergensintegral, 108
divergensteoremet, *Se Gauss' sats*
dobbeltintegral, 95–96, 104
- ekspansjon, 67
figur, 67, 87
i vindfelt, 87
- ekviskalarflater, 18, 31–33
ekviskalarlinjer, 126, 127, 136
oppgaver, 171, 173, 176, 180
- elektrisk felt, 123, 163
symbol og enhet, 13
- elektrisk feltstyrke, 123, 139, 162, 163
elektrisk ladning, 38, 100, 123, 163
elektrisk ladningstetthet, 162
elektrisk potensial
symbol og enhet, 13
- elektrisk strøm, 162
- elektromagnetisk felt, 11, 123, 135, 161, 163
Maxwells likninger, 162–163
- elektromagnetiske krefter, 163
- energi
bevegelsesenergi, 153
symbol og enhet, 13
termisk, 152, 153
- enhetsnormal, 32, 118
oppgaver, 100
- enhetsvektor, 33, 110, 121, 139, 165
hvordan lage en, 17
i kartesiske koordinater, 14
i plane polarkoordinater, 14
i polarkoordinater, 114
figur, 115
i sfæriske polarkoordinater, 116
i sylindriske polarkoordinater, 116
lengden av, 14
oppgaver, 24
transformasjon mellom kartesiske og polarkoordinater, 114
transformasjon mellom kartesiske og sfæriske polarkoordinater, 117
- Euler-likningen, 149
- felt
bølgefelt, 11
- dipolfelt, 134–136
figur, 136
oppgaver, 137, 138, 165
- elektrisk, 123, 163
symbol og enhet, 13
- elektromagnetisk, 11, 123, 135, 161, 163
Maxwells likninger, 162–163
- gravitasjonsfelt, 11, 121
- hastighetsfelt, 69, 92, 125, 141, 147
oppgaver, 158, 159
- introduksjon og eksempler, 11
- kilde, 130
figur, 131
i dipolfelt, 135, 136
oppgaver, 137, 138
- kraftfelt, 38, 92
konservativt, 92–94
oppgaver, 110
potensialfunksjonen, 94
- Laplaceisk
definisjon, 125
introduksjon, 125
- magnetfelt, 10, 11, 38, 163
dipolstruktur, 137
oppgaver, 100
symbol og enhet, 13
- potensialfelt, 133, 163
introduksjon 2-D, 125–127
oppgaver, 177
- punktvirvel, 130–133
figur, 131
i spiralvirvel, 134
oppgaver, 138, 158
- radioaktiv stråling, 11
- rettlinjet strøm, 127
figur, 128
oppgaver, 138, 159
- sluk, 130
figur, 131
i dipolfelt, 135, 136
i spiralvirvel, 134
oppgaver, 137
- solvindfelt, 10
- spiralfelt, 133–134
figur, 134
- stagnasjonsfelt, *Se stagnasjonsstrøm*

- stasjonært, 18, 35, 123, 150
 - eksempel, 38
 - oppgaver, 159
- strømfelt, 11, 67, 141, 146, 148, 150
 - divergensfritt, 70
 - eksempel, 37–38
 - i Gauss' sats, 108
 - i Navier-Stokes likning, 161, 162
 - oppgaver, 172
 - oppgaver, 74, 75, 100, 109, 110, 121, 136, 157, 159, 171, 173, 174, 176
 - som potensialfelt, 125
 - volumfluksen til et, 61
- temperaturfelt, 11, 141, 142
 - i meteorologi, 77
 - oppgaver, 160, 180
- tetthetsfelt, 141, 147
- trykkfelt, 11, 56, 80, 141
 - figur, 81
 - i meteorologi, 77
 - oppgaver, 166
- tyngdefelt, 93, 149
- vindfelt, 11, 80
 - en fil med data, 79
 - figur, 83
 - figur av divergens, 85
 - figur av virvling, 86
 - hvordan plote med Matlab, 82
 - i meteorologi, 77
 - og divergens, 84
 - og virvling, 84–87
 - oppgaver, 74
 - tolkning av divergens, 87
 - tolkning av virvling, 87
- feltfunksjon, 71, 125, 171, 177
 - oppgaver, 180
- feltlinjer, 37, 38, 71, 100, 128, 129, 131, 136, 177
 - dipolfelt, 135
 - visualisering, 38
- flateintegral, 103, 109, 147, 148, 154
 - beregning av trykkraft, 96–98
 - beregning av volumstrøm, 64
 - i Gauss' sats, 107–108
 - i Greens sats, 104–105
 - innledning, 89
 - introduksjon og definisjon, 94–96
 - oppgaver, 110
 - volumfluksen til et vektorfelt, 61
- flatelikningen, 95
- flatenormal, 33–34, 64, 94, 96, 98, 148, 153
- fluider, 161, 163
 - innledning, 141
- fluidpartikkel, 141
- fluks, 61, 66, 98, 108, 111
 - oppgaver, 160, 165, 172, 175
- Fourier, Joseph, 153
- Fouriers lov, 153
 - oppgaver, 160
- friksjonskrefter, 162, 163
- Gauss' sats, 103, 109, 147, 148, 154
 - definisjon, 108
 - oppgaver, 110, 111, 165, 172, 176, 177
 - to alternative varianter, 108
 - utledning, 107–108
- Gauss, Karl Friedrich, 103
- gradient, 72, 113, 115, 118, 125, 161
 - hvordan finne flatenormalen, 33–34
 - høydegradient, 33
 - oppgaver, 41
 - temperaturgradient, 153, 160
 - til hastighetspotensialet, 123
 - trykkgradient, 157, 158
 - vindgradienter, 82, 87
- gradientvektor, 73, 115, 116, 119, 123, 166
 - definisjon og egenskaper, 30–33
 - egenskaper, 41
 - en fysisk anvendelse, 33
 - figur med konturlinjer, 34, 56
 - Gauss' sats for, 108
 - hvordan beregne med Matlab, 55–56
 - hvordan finne den tilhørende skalarfunksjonen, 34–35
 - i Cauchy-Riemann relasjonene, 126
 - i polarkoordinater, 118
 - oppgaver, 120
 - i sfæriske polarkoordinater, 118
 - oppgaver, 120
 - i sylindriske polarkoordinater, 118
 - oppgaver, 75, 171, 173, 176

- til å vise regneregler for ∇ -operatoren, 72
- utledet med ∇ -operatoren som en vektor, 73
- gradientvektorfelt, 69
- gravitasjonsfelt, 11, 121
- gravitasjonslov, *Se Newtons gravitasjonslov*
- Green, George, 103
- Greens sats, 103, 105, 109
- definisjon, 104
- oppgaver, 109, 111
- på komponentform, 104
- utledning, 103–105
- grensesjikt, 123, 128
- hastighetsfelt, 69, 92, 125, 141, 147
- oppgaver, 158, 159
- hastighetsgradienter, 127
- hastighetspotensialet, 125, 126, *Se også potensialet*
- dipolfelt, 134, 136
- figur, 136
- introduksjon, 123–124
- kilde og sluk, 130
- figur, 131
- oppgaver, 136–139, 165, 171, 173, 176, 180
- punktvirvel, 130
- figur, 131
- rettlinjet strøm, 127
- figur, 128
- stagnasjonsstrøm, 127
- figur, 129
- til et superponert felt, 133
- hektopascal
- trykkenhet, 13
- hydrodynamikk, 123, 135
- hydrostatisk trykkformel, 97, 100, 150
- oppgaver, 110
- høydegradient, 33
- høydekvoter, 19, 33, 54, 58
- inkompressibel væske, 151, 158, 159, 162
- integralsatser, *Se Greens, Stokes' og Gauss' sats*
- ioniserte gasser, 163
- irrotasjonale felt, 70
- isobarer, 13, 19, 53, 56
- figur, 81
- hvordan plotte med Matlab, 80
- isobarflater, 20–21, 77
- figur, 21
- Joule, 13
- kartesiske koordinater, *Se koordinatsystem, kartesiske koordinater*
- Kelvin, 13, 152
- kilde, 130
- figur, 131
- i dipolfelt, 134–136
- oppgaver, 137, 138
- konservativt kraftfelt, 92–94
- kontinuitetslikningen, 147–148, 162
- kontraksjon, 67
- figur, 67, 87
- i vindfelt, 87
- konturlinjer, 33, 56
- figur, 12, 20, 53, 85, 86
- figur med gradientvektor, 34, 56
- for konstant trykk, 19
- for lufttrykk over Nordatlanteren, 12
- hvordan plotte med Matlab, 53–54, 80
- oppgaver, 41, 58, 166
- konvektiv akselerasjon, 145
- i Navier-Stokes likning, 162
- oppgaver, 157, 158
- konvektiv varmetransport, 153
- konvergens, *Se kontraksjon*
- koordinatsystem
- bytte av system
- eksempler, 119–120
- oppgaver, 25, 120, 121
- figur
- kartesiske koordinater, 14
- plane polarkoordinater, 15, 115
- sfæriske polarkoordinater, 117
- sylindriske polarkoordinater, 116
- introduksjon, 13–15
- kartesiske koordinater, 13, 66, 73, 110, 113, 118, 125, 138

- enhetsvektorer, 14
- posisjonsvektor, 14
- kulekoordinater, 15, 101, 113
 - oppgaver, 122, 165
- plane polarkoordinater, 14, 126
 - enhetsvektor, 14
 - oppgaver, 172, 176
- polarkoordinater, 66, 94, 100, 113, 118, 125, 134, 138
 - kilde og sluk, 130
 - oppgaver, 165
 - transformasjon, 114–116
- sfæriske polarkoordinater, 113, 118
 - oppgaver, 177
 - transformasjon, 116–118
- sylindriske polarkoordinater, 15, 113, 118
 - transformasjon, 116
- transformasjon mellom kartesiske og polare koordinater, 114–118
- kraft
 - elektromagnetisk, 163
 - symbol og enhet, 13
 - trykkraft, 148
 - beregning av, 96–98
 - i Navier-Stokes likning, 162
 - oppgaver, 100, 110, 158
 - vs trykk, 97
 - tyngdekraft, 93, 121, 122, 148
 - i Navier-Stokes likning, 162
- kraftfelt, 38, 92
 - konservativt, 92–94
 - oppgaver, 110
 - potensialfunksjonen, 94
- kraftlinjer, 38
- kraftpotensialet, 93, *Se også potensialet*
 - oppgaver, 110, 111
- kryssprodukt, *Se vektorprodukt*
- kulekoordinater, *Se koordinatsystem, kulekoordinater*
- kurveintegral, *Se også linjeintegral*
 - av en skalar
 - definisjon, 90
 - av en vektor
 - definisjon, 90
 - av gradientvektoren, 92–94
 - eksempel, 91
 - fysisk tolkning, 92
 - innledning, 89
 - introduksjon og definisjon, 89–91
 - om en lukket kurve, 91
 - omløpsretning, 91
 - oppgaver, 100
- kvotelinjer, 19
- Laplace, Pierre Simon, 125
- Laplace-likningen, 125
- Laplace-operatoren
 - definisjon 2-D, 125
 - definisjon 3-D, 125
 - definisjon i polarkoordinater, 125
 - introduksjon, 125
- Laplaceiske felt
 - definisjon, 125
 - introduksjon, 125
 - oppgaver, 165
- lavtrykk
 - figur, 81
 - i en lufttrykksmodell, 19, 53
 - og divergens, 85
 - og vindgradienter, 82
 - og virvling, 86, 87
 - over Nordatlanteren, 12
- lengdegrad, 117
- lineær transformasjon, 21
- linjeintegral, 103, *Se også kurveintegral*
 - beregning av sirkulasjon, 68
 - i Greens sats, 104–105
 - i Stokes' sats, 105
 - introduksjon og definisjon, 89–91
 - oppgaver, 100, 111
 - sirkulasjonen til et vektorfelt, 63
- lokalakselerasjon, 145
 - i Navier-Stokes likning, 162
 - oppgaver, 158
- Lorentz-kraften, 163
- lufttrykk, 150, 152
 - en fil med data, 79
 - en modell, 19
 - en modell som skal plottes, 53
 - figur, 20
 - i den hydrostatiske trykkformelen, 97

- i meteorologi, 77
- oppgaver, 110
- over Nordatlanteren, 12
- magnetfelt, 10, 11, 38, 163
 - dipolstruktur, 137
 - oppgaver, 100
 - symbol og enhet, 13
- magnetisk feltstyrke, 162
- malstrømgalakseen, 135
- massebevarelse, 146–148, 162
- massestrøm, 146, 162
 - oppgaver, 159
- massetetthet, 146
 - i Navier-Stokes likning, 161
 - symbol og enhet, 13
- Matlab
 - % (prosentegn), 43
 - ' (apostrof), 44
 - , (komma), 44
 - . (punktum), 49–50
 - : (kolon-operatoren), 46–47
 - ; (semikolon), 44, 51
 - [] (klammeparenteser), 44
 - axis, 52, 80, 82, 84
 - axis equal, 49, 52
 - axis square, 52
 - beregning av gradientvektor, 55–56
 - beregning av skalarfelt, 51–53
 - cd, 47
 - clabel, 54, 80, 84
 - colorbar, 52, 54
 - colormap, 54
 - contour, 54, 56, 80, 84
 - curl, 84
 - diag, 45–46, 57
 - dir, 47
 - divergence, 84
 - eye, 46, 57
 - FaceColor, 52–53
 - functions, 47
 - generering og manipulering av matriser, 44–46
 - gradient, 55–56
 - grensesnitt, 43
 - grid, 51–52
 - help, 46, 48
 - hold on/off, 55
 - hvordan invertere en matrise, 44–45
 - hvordan lese data fra fil, 79–80
 - hvordan transponere en matrise, 44
 - innledning, 43
 - inv, 44–45
 - kolon-operatoren (:), 46–47
 - kommandovindu, 43, 46, 47
 - kommentarer, 43
 - konstanter/variable, 51, 53–54
 - lang, 48
 - length, 46
 - load, 79–80
 - m-filer, 47–49, 51, 52, 54
 - max, 82
 - mesh, 52–53
 - meshgrid, 51–52, 54, 56
 - ones, 46, 57
 - oppgaver
 - enkle matriseoperasjoner, 56–57
 - m-filer, 57
 - plotting av flater, 57, 58
 - plotting av konturlinjer, 58
 - plotting av kurver, 57
 - plotting av strømmlinjer, 75, 138
 - plotting av vektorfelt, 57, 58
 - utregning av gradientvektor, 58
 - oppstart, 43
 - på Windows-maskiner, 44
 - plot, 49
 - plotting av flater, 51–53
 - plotting av konturlinjer, 53–54
 - plotting av strømmlinjer, 56
 - plotting av vektorfelt, 55–56
 - punktum foran en operasjon, 49–50, 82
 - pwd, 47
 - quiver, 55–56, 82
 - rand, 46
 - scripts, 47
 - size, 46, 80
 - sqrt, 82
 - sum, 45
 - surf, 52–53
 - what, 47

- xlabel, ylabel, zlabel, 52
 - zeros, 46
- Maxwell, James Clerk, 163
- Maxwells likninger, 162–163
 - kombinert med Navier-Stokes likning, 163
- Meteorologisk institutt, 77
 - hjemmesider, 79
 - vindstyrketabell, 82
- nabla-operatoren, *Se ∇ -operatoren*
- NASA
 - Earth Observatory, 4
 - Hubble Space Telescope, 135
 - Solar Physics Group, 10
- Navier-Stokes likning, 161–162
 - kombinert med Maxwells likninger, 163
- Newton
 - kraftenhet, 13
- Newtons 2.lov, 148, 149, 161
- Newtons gravitasjonslov, 121
- norm
 - hvordan normalisere en vektor, 17
 - oppgaver, 24
 - vektornorm, 14, 16
- normalvektor, 98, 105, 110, 146
 - i definisjonen av volumfluks, 63
 - i flateintegraler, 94–98
 - i Gauss' sats, 107
 - i Greens sats, 103
 - i Stokes' sats, 105
- omløpsretning
 - for et kurveintegral, 91
 - i Greens sats, 104, 105
- oppdriftskraften, 98, 110
- ortogonal projeksjon, 24
- parameterfremstilling, 89–90
- partiell derivasjon, 31
 - definisjon og eksempel, 27–28
 - definisjonsskisse, 27
 - derivasjonsrekkefølgen, 28
 - hvordan beregne med Matlab, 55
 - i polarkoordinater, 115
 - i rekkeutvikling, 30
 - i sfæriske polarkoordinater, 117
 - oppgaver, 40
- partikkelderivasjon, 141–142, 148, 154
 - definisjon, 142
 - oppgaver, 158
- Pascal, 13
- passatfeltet, 121
- polarkoordinater, *Se koordinatsystem, polarkoordinater*
- polavstand, 117, 121
- posisjonsvektor, 141
 - i kartesiske koordinater, 14
 - i parameterfremstilling, 89
 - i plane polarkoordinater, 14
- potensialet, 93, 123, *Se også kraftpotensialet og hastighetspotensialet*
 - gravitasjonspotensialet, 122
 - oppgaver, 100
- potensialfelt, 75, 133, 163
 - introduksjon 2-D, 125–127
 - oppgaver, 177
- potensialfunksjon, 94, 92 – –94
 - oppgaver, 136, 165, 180
- potensialfunksjonen, 123
- potensialstrøm, 125, 133, 174
 - oppgaver, 172, 180
- potensiell energi, 93, 94
- punktvirvel, 130–133
 - figur, 131
 - i spiralvirvel, 134
 - oppgaver, 138, 158
- punktvirvelfelt
 - oppgaver, 75
- Pythagoras, 82
- radioaktiv stråling, 11
- rekkeutvikling, *Se Taylorutvikling*
- retningsderivert, 33, 141
- rettlinjet strøm, 127
 - figur, 128
 - oppgaver, 138, 159
- Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 126
- rot, 73
- Rottmann's formelsamling, 73, 119
- sfæriske polarkoordinater, *Se koordinatsystem, sfæriske polarkoordinater*

- SI-enheter, 20, 146, 152
 SI-systemet, 11, 146
 singulært punkt, 130, 132
 sirkulasjon, 61, 69, 89, 92
 beregning av virvling, 68
 definisjon, 63
 i Greens sats, 103, 104
 i Stokes' sats, 105
 oppgaver, 75, 109, 111, 121, 165, 172, 174
 til en punktvirvel, 132
 virvelfri, 132
 skalahøyden, 20, 21
 skalarfelt, 18, 56
 eksempel, 18–20
 gradientvektoren til et, 30–33, 92, 93
 hvordan beregne med Matlab, 51–53
 introduksjon, 11–13
 skalarfunksjon, 35, 73
 skalarpotensial, 70
 skalarprodukt, 33, 73
 definisjon, 15
 egenskaper, 23
 i Gauss' sats, 108
 på komponentform, 16
 skalering, 20–22
 av divergens, 84
 av virvling, 87
 oppgaver, 25, 41, 160, 173
 sluk, 130
 figur, 131
 i dipolfelt, 134–136
 i spiralvirvel, 134
 oppgaver, 137
 soldifikasjon, 110
 solenoidfelt, 70
 solvindfelt, 10
 spiralvirvel, 133–134
 figur, 134
 galaksen M51, 135
 stagnasjonsfelt, *Se stagnasjonsstrøm*
 oppgaver, 75
 stagnasjonspunkt, 128
 stagnasjonsstrøm, 127–128
 figur, 129
 stasjonært felt, 18, 35, 123, 150
 eksempel, 38
 oppgaver, 159
 Stevin, Simon, 110
 Stokes' sats, 103, 109
 definisjon, 105
 oppgaver, 109, 111, 121, 172, 174
 utledning, 105
 Stokes, George Gabriel, 103
 strømfelt, 11, 67, 141, 146, 148, 150
 divergensfritt, 70
 eksempel, 37–38
 i Gauss' sats, 108
 i Navier-Stokes likning, 161, 162
 oppgaver, 74, 75, 100, 109, 110, 121, 136, 157, 159, 171–174, 176
 som potensialfelt, 125
 volumfluksen til et, 61
 strømfluks, *Se fluks*
 strømfunksjon, 56, 126
 definisjon, 70–71
 dipolfelt, 135
 hvordan finne, 71–72
 kilde og sluk, 130
 konstant langs en strømlinje, 71
 og potensialfelt, 125
 oppgaver, 74, 75, 100, 136–138, 165, 171–177, 180
 punktvirvel, 130
 rettlinjet strøm, 127
 spiralvirvel, 134
 stagnasjonsstrøm, 127
 til å beregne volumstrøm, 98–99
 til et superponert felt, 133
 strømhastighet
 oppgaver, 100
 symbol og enhet, 13
 strømlinjer, 151–152
 definisjon, 35–37
 dipolfelt, 135
 figur, 136
 eksempel på beregning av, 37–38
 figur, 37, 39
 hvordan finne når strømfunksjonen er gitt, 72
 hvordan plotte med Matlab, 56
 hvordan tegne opp, 71

- i forbindelse med strømfunksjonen, 71
- kilde og sluk
- figur, 131
- oppgaver, 42, 74, 75, 136–138, 159, 165, 172–174, 176, 177, 180
- punktvirvel, 132
- figur, 131
- rettlinjet strøm
- figur, 128
- som begrensingslinjer, 98–99
- spiralvirvel, 134
- stagnasjonsstrøm, 128
- figur, 129
- viktig relasjon, 37
- styrken til en punktvirvel, 132–133
- styrken til kilde/sluk, 130, 136, 137
- superposisjon
- introduksjon, 133
 - oppgaver, 138
- syklon, 11
- Floyd, 35–36
 - Isak, 4
 - punktvirvelfelt, 132
- syklindriske polarkoordinater, *Se koordinat-system, sylindriske polarkoordinater*
- Taylorutvikling, 31, 67, 136, 142, 144
- approksimasjon av et vektorfelt, 64, 68
 - definisjon, 29–30
 - definisjonsskisse, 29
 - oppgaver, 40, 58–59, 138
- temperatur, 152
- symbol og enhet, 13
- temperaturfelt, 11, 141, 142
- i meteorologi, 77
 - oppgaver, 160, 180
- temperaturgradient, 153, 160
- termisk energi, 152, 153
- termisk konduktivitet, 160
- Tesla
- magnetstyrkeenhet, 13
- tetthetsfelt, 141, 147
- translasjonsfelt, *Se rettlinjet strøm*
- trippelintegral, 99
- oppgaver, 101
- trykk
- damptrykk, 159
 - den hydrostatiske trykkformelen, 97, 100
 - oppgaver, 110
 - hvordan plote isobarer med Matlab, 80
 - i Navier-Stokes likning, 161
 - integrasjon og løftekraft, 89
 - lavtrykk
 - figur, 81
 - i en lufttrykksmodell, 19, 53
 - og divergens, 85
 - og vindgradienter, 82
 - og virvling, 86, 87
 - over Nordatlanteren, 12
- lufttrykk, 150, 152
- en fil med data, 79
 - en modell, 19
 - en modell som skal plottes, 53
 - figur, 20
 - i den hydrostatiske trykkformelen, 97
 - i meteorologi, 77
 - oppgaver, 110
 - over Nordatlanteren, 12
- oppgaver, 159
- symbol og enhet, 13
- vs. trykkraft, 97
- trykkfelt, 11, 56, 80, 141
- figur, 81
 - i meteorologi, 77
 - oppgaver, 166
- trykkgradient, 157, 158
- trykkraft, 148
- beregning av, 96–98
 - i Navier-Stokes likning, 162
 - oppgaver, 100, 110, 158
 - vs. trykk, 97
- tyngdefelt, 93, 149
- tyngdekraft, 93, 121, 122, 148
- i Navier-Stokes likning, 162
- tyngdepotensialet, 93
- uniformt felt, *Se rettlinjet strøm*
- varmediffusivitet, 154

- varmefluks, *Se varmestrøm*
varmeinnhold, 152
varmekapasitet, 152, 154
varmekilder, 155
varmeledning, 153, 155
varmeledningsslikningen, 155
varmeledningstallet, 153, 160
varmeproduksjon, 154
varmestrøm, 153
 oppgaver, 160, 180
varmetransport, 152–157
 konvektiv, 153
varmetransportlikningen, 154
vektoralgebra, 15–17
vektorfelt
 definisjon, 35–37
 divergensen til et, 64–67
 divergensfrie, 69–70
 eksempel med virvling, 69
 feltlinjer til et, 71
 hvordan plotte med Matlab, 55–56
 i Gauss' sats, 107
 introduksjon, 11–13
 oppgave: finn divergens og virvling, 74
 sirkulasjonen til et, 63
 som potensialfelt, 125
 virvelfrie, 69–70
 virvlingen til et, 68–69
 volumfluksen til et, 61
vektorfluks, 67
 definisjon, 61
 i Gauss' sats, 108
 oppgaver, 111, 177
vektorlikning, 104
vektornorm, 14, 16
vektornotasjon, 14
vektoroperator, 73
vektorpotensial, 70
vektorprodukt, 36, 73
 definisjon, 16
 egenskaper, 24
 faktorenes orden, 17
 lengden, 16
 oppgaver, 24
 vist geometrisk, 17
vestenvindfeltet, 121
vindfelt, 11, 80
 en fil med data, 79
 figur, 83
 figur av divergens, 85
 figur av virvling, 86
 hvordan plotte med Matlab, 82
 i meteorologi, 77
 og divergens, 84
 og virvling, 84–87
 oppgaver, 74
 tolkning av divergens, 87
 tolkning av virvling, 87
vindgradienter, 82, 87
vinkelhastighet, 69
virvelfri sirkulasjon, 132
virvelfrie felt, 69–70, 123, 124, 133
 introduksjon, 123
 kilde og sluk, 130
 Maxwells likninger, 163
 oppgaver, 75, 121
 potensialfunksjonen, 94–124
 punktvirvel, 132
 rettlinjet strøm, 127
 små friksjonsvirkninger, 162
 stagnasjonsstrøm, 128
virvling, 72, 73, 92, 113, 118, 123, 150, 161
 definisjon 2-D, 69
 definisjon 3-D, 69
 figur, 70, 86
 fysikalsk tolkning, 69
 hvordan plotte med Matlab, 84–87
 i Greens sats, 104
 i meteorologi, 77
 i polarkoordinater, 118
 oppgaver, 120
 i sfæriske polarkoordinater, 119
 i Stokes' sats, 105
 i sylindriske polarkoordinater, 119
 oppgaver, 74, 75, 109, 121, 171, 173, 176
 tolkning i meteorologi, 87
 utledning, 68–69
 varsler været, 87
virvlingsvektor
 Gauss' sats for, 108
 i Greens sats, 103

- oppgaver, 109
- viskositet, 162
- volt
 - spenningsenhet, 13
- volumfluks, 89
 - definisjon, 61
- volumintegral, 103, 109, 147, 148, 154
 - i Gauss' sats, 107
 - innledning, 89
 - introduksjon og definisjon, 99–100
 - oppgaver, 101
- volumstrøm, 67, 89
 - beregning av divergens, 64–66
 - definisjon, 61
 - figur, 65
 - hvordan bruke strømfunksjonen til å
 - regne ut, 98–99
 - i Gauss' sats, 108
 - kilde og sluk, 130
 - oppgaver, 74, 110, 175