Et lite notat ang. Bose-Einstein kondensasjon

Vi starter med Bose-Einsten fordelingen (lign. 7.28)):

$$\overline{n}_{BE}(e) = \frac{1}{e^{(e-m)/kT} - 1} \quad . \qquad (1)$$

Her må vi huske på at utledningen av denne fordelingen forutsetter at ε>μ (følger også av at vi må ha $\overline{n}_{BE}(e) > 0$). Hvis har et system med en serie diskrete energinivåer ε_j, j=0,1,2,,, ($\varepsilon_j < \varepsilon_{j+1}$), er totalt antall partikler N i systemet gitt ved

$$N = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{n}_{BE}(e_j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{e^{(e_j-m)/kT} - 1} \quad . \qquad (2)$$

Vi merker oss at vi da også må ha $\mu < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots$.. Hva skjer nå hvis vi har et konstant partikkeltall N og senker temperaturen ned mot null? Da innser vi at antall partkler i laveste nivå N_0 må gå mot N, slik at alle høyre nivåer blir tomme. N_0 er gitt ved

$$N_0 = \frac{1}{e^{(e_0-m)/kT} - 1} \quad , \qquad (3)$$

Men for at N_0 skal gå mot N (dvs. bli svært stor), må vi ha $e^{(e_0-m)/kT} \approx 1$, eller $m \approx e_0$ for lave temperaturer.

Hvor stor er så ε_0 i et typisk system av en Bose-gass? Vi bruker "partikkel i boks" som modell, og energiene er da

$$e_n = \frac{h^2}{8mL^2}(n_x{}^2 + n_y{}^2 + n_z{}^2) = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 \quad . \qquad (4)$$

Laveste energi finnes for $n_x = n_y = n_z = 1$. Hvis vi nå ser på en gass av ^{4}He (bosoner), så har vi $m = 6.64 \cdot 10^{-27}\,kg$, og hvis vi antar at størrelsen på boksen er L=1cm, finner vi $e_0 = 1.5 \cdot 10^{-18}\,eV$, dvs. lik null for alle "rimelige" formål, og av $\mu \approx \varepsilon_0$ følger da også at vi kan anta μ=0 for lave temperaturer.

Vi går nå tilbake til uttrykket (2) for N ovenfor som vi skriver

$$N = N_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{e^{(e_j-m)/kT} - 1} \quad , \qquad (5)$$

for å unngå singulariteten for det laveste energinivået. Vi antar (vet) nå videre at energinivåene ligger svært tett, slik at summen i uttrykket (5) ovenfor kan gjøres om til et integral. Da behøver vi tettheten av nivåer g(ε) som er funnet før (ligning (7.51) og (7.123)):

$$g(e) = \frac{2}{\sqrt{p}} \left(\frac{2pm}{h^2}\right)^{3/2} V \sqrt{e} \quad . \qquad (6)$$

Uttrykket for N blir da

$$N = N_0 + \int_{e_1}^{\infty} \frac{g(e)}{e^{(e-m)/kT} - 1} de \quad . \qquad (7)$$

Siden også $e_1 \approx 0$ og g(0)=0 kan vi erstatte ε_1 som nedre grense på integralet med 0.

Antar vi nå μ=0 som diskutert ovenfor, kan integralet regnes ut. Vi setter da x=ε/kT , og benytter at (se læreboka B.36 , n=1/2)

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx = \Gamma(3/2) z\,(3/2) = \frac{\sqrt{p}}{2} \cdot 2.612 = 2.315 \ . \quad (8)$$

Vi får da til slutt (istedenfor den feilaktige ligning (7.125) i læreboka)

$$N = N_0 + 2.612 \left(\frac{2p\, mkT}{h^2} \right)^{3/2} V \ . \qquad (9)$$

Nå må vi igjen huske på at dette resultatet bare er gyldig for lave temperaturer. Vi ser at det siste leddet i ligningen ovenfor øker raskt med temperaturen, og siden partikkeltallet N er fast må det da helt klart finnes en øvre grense T_C for gyldigheten av dette resultatet, og denne grensen har vi når N_0=0 og siste leddet i ligningen (9) blir lik N. Dermed finner vi grensetemperaturen T_C (kondensasjonstemperaturen) av

$$2.612 \left(\frac{2p\, mkT_C}{h^2} \right)^{3/2} V = N \ , \ \text{eller} \quad kT_C = \frac{1}{p\,(2.612)^{2/3}} \frac{h^2}{2m} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} \ . \quad (10)$$

Vi ser altså at T_C avhenger av massen m av partiklene, og spesielt av tettheten N/V. Konstantene som inngår i uttrykket ovenfor (inklusive massen m) kan vi uttrykke ved kT_C og N/V. Setter vi dette inn i ligningen (9) for N og løser den med hensyn på N_0 finner vi til slutt det viktige (og berømte) resultatet

$$N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^{3/2} \right] . \qquad (11)$$

Figur 7.32 i læreboka viser hvordan N_0 varierer med T. Den såkalte Bose-Einstein kondensasjonen inntrer for T<T_C, og er komplett ved T=0. Da er N_0=N, og alle partiklene er i laveste energinivå.
Hva skjer for T>T_C? Da er vår utregning ikke lenger holdbar. Det viktige er at vi har antatt μ=0, som bare er ok ved lave temperaturer. For høyere temperaturer (T>T_C) må vi ta i betraktning at μ vil avhenge av temperaturen (se Fig. 7.33 i læreboka).

De første vellykkede eksperimentene som viste Bose-Einstein kondensasjon for gasser ble utført for ^{87}Rb-atomer i 1995 (Nobelpris i 2001). Tettheten man oppnådde var $N/V \approx 10^{19} m^{-3}$, som med massen $m = 1.44 \cdot 10^{-25} kg$ gir en kondensasjonstemperatur $T_C \approx 10^{-7} K$.
Den totale energien U i gassen kan for lave temperaturer T<T_C (μ=0) beregnes av

$$U = N_0 e_0 + \int_0^\infty \frac{e\, g(e)}{e^{e/kT} - 1} de \ . \qquad (12)$$

Vi finner da U som funksjon av V og T, og kan bestemme varmekapasiteten C_V (se oppgave 7.70 i læreboka).
Som kjent er fotoner bosoner. Kan vi observere Bose-Einstein kondensasjon for fotoner? Svaret er nok nei. Siden μ=0 for fotoner er det ikke mulig å beholde et konstant antall fotoner i gassen når temperaturen senkes.