FYS2160. FØRSTE OBLIGATORISKE INNLEVERING H05

Oppgave 1
For en ideell gass er den indre energien gitt ved

$$U = \frac{1}{2} fNkT \quad ,$$

der f angir antall frihetsgrader.

a) Vi lar en ideell gass ekspandere fritt fra en tilstand med trykk P_0 og volum V_0 , til en tilstand med volum $3V_0$. Hva blir trykket i gassen etter ekspansjonen?
b) Gassen blir så langsomt adiabatisk komprimert til sitt opprinnelige volum V_0 . Trykket etter kompresjonen er $3^{\frac{1}{3}} P_0$. Bestem om gassen er enatomig, toatomig, eventuelt fleratomig.
c) Bestem forholdet mellom gjennomsnittlig kinetisk energi pr. partikkel (molekyl) i sluttilstanden i b) og i den opprinnelige tilstanden (P_0,V_0).

Oppgave 2
Når vi skal studere hvordan molekylene i en gass blandes med molekylene i en annen (diffusjon), kan vi bruke en teknikk som er kjent som ”random walk”, eller ”virre-vandring” på norsk. Vi skal begrense oss til et en-dimensjonalt problem. Metoden går ut på at vi antar at vi tar N skritt langs en rett linje (x-aksen), hvert skritt har en konstant lengde ΔL, og for hvert skritt er det like stor sannsynlighet for å gå forover som bakover. Hvis vi starter i x=0, er vi da etter N_+ skritt forover og N_- skritt bakover ($N=N_++N_-$) kommet til posisjonen

$$x = \Delta L(N_+ - N_-) \quad .$$

a) Bestem sannsynligheten $P_N(N_+)$ for at vi etter N skritt har tatt N_+ skritt forover.
b) Bruk Stirlings approksimasjon
$$N! \approx \sqrt{2p\, N}\, N^N e^{-N}$$
til å vise at vi for $N_+=N_-=½N$ har
$$P_N(N_+) = \sqrt{\frac{2}{p\, N}} \quad .$$

Vi setter så

$$N_+ = \frac{1}{2}N + n \ , \qquad N_- = \frac{1}{2}N - n \ , \qquad |n| << N$$

og kan vise at (skal ikke vises)

$$P_N(N_+) = \sqrt{\frac{2}{p\, N}}\, e^{-\frac{2n^2}{N}} \quad .$$

c) Vis at sannsynligheten for å være kommet til en posisjon x etter N skritt er gitt ved

$$P_N(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi N}} e^{-\frac{x^2}{2(\Delta L)^2 N}} \quad .$$

Dette er en Gaussfordeling omkring x=0. Beregn halvverdibredden x_b (1/e av maks. verdien). Anta $N=10^4$, og bestem x_b. Kommenter resultatet.

Anta at hvert skritt tar en konstant tid Δt. Den totale tiden som er brukt på N skritt er gitt ved t=NΔt. Sannsynligheten for å være i posisjon x ved tiden t er da

$$P(x,t) = \sqrt{\frac{2\Delta t}{\pi t}} e^{-\frac{x^2 \Delta t}{2(\Delta L)^2 t}} = \frac{a}{\sqrt{t}} e^{-\frac{bx^2}{t}} \quad .$$

Videre kan vi anta at tettheten (antall partikler pr. lengdeenhet) ρ(x,t) er proporsjonal med P(x,t), dvs.

$$\rho(x,t) = KP(x,t) \ , \quad K = \text{konstant}$$

d) Vis at ρ(x,t) er løsning av differensialligningen

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(x,t)}{\partial x^2} \quad .$$

Denne ligningen er kjent som Ficks 2. lov, og beskriver generelt diffusjonsprosessen. Bestem diffusjonskoeffisienten D uttrykt ved ΔL og Δt, og kommenter resultatet (høy verdi for D betyr effektiv diffusjon). Uttrykk også D ved ΔL og hastigheten v=ΔL/Δt.

Oppgave 3

Oppgave 3.25 (a)-(e) i læreboka.

Som svar på (c) oppgis varmekapasiteten

$$C = \frac{N\varepsilon^2}{kT^2} \frac{e^{\varepsilon/kT}}{(e^{\varepsilon/kT} - 1)^2} \quad .$$

Hint ang. (e): Av diagrammet ditt vil du finne C≅0.5Nk for kT/ε≅1/3. Bruk dette til å bestemme ε fra Fig. 1.14 i læreboka.

Innleveringsfrist: **Mandag 3. oktober kl. 10.00.**

Besvarelsen levers på ekspedisjonskontoret, Fysisk institutt, rom 144 (egen skuff for FYS2160). Rettede besvarelser legges også ut her.

Det gis ikke karakter på obligene, men en poengsum, for eksempel 60/80. For å få godkjent en oblig må minst ca. 70% av oppgavene være riktig besvart. Alle obligene må være bestått før avsluttende eksamen.

Dere må gjerne samarbeide om obligene, men det må leveres inn individuelle besvarelser. **Like (felles) besvarelser blir ikke godtatt!**