

## Besvarelse hjemmeeksamen FYS2160 H06

### Oppgave 1

a)  $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP = bVdT - kVdP .$

b)  $\frac{dV}{V} = b dT - k dP , \quad V = V_0 e^{b(T-T_0)} e^{-k(P-P_0)}$

c)  $V = V_0 [1 + b(T - T_0) - k(P - P_0)] .$

Volumet er bestemt av den termiske utvidelseskoeffisienten  $\beta$  og den isoterme kompressibiliteten  $\kappa$  etter en kjent formel. Merker oss også at resultatet under c) bare er riktig for små volumforandringer.

d) Konstant volum:  $V=V_0: \quad b(T - T_0) = k(P - P_0) ,$

$$\Delta P = P - P_0 = \frac{b}{k}(T - T_0) = 680 \text{ atm} . (!)$$

e) Ser bort fra volumforandring, dvs.  $V=V_0:$

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - bV_0 dP ,$$

$$\Delta S = C_p \ln \frac{T}{T_0} - bV_0(P - P_0) = C_p \ln \frac{T}{T_0} - V_0 \frac{b^2}{k}(T - T_0) ,$$

når også resultatet fra d) benyttes (konstant volum).

f) En kilo kobber:  $V_0=1.02 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 .$   
 $\Delta S=12.4 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1} .$

g)  $\ln \frac{\Omega_f}{\Omega_i} = \frac{\Delta S}{k} = 8.98 \text{ g} 10^{23} .$

h) Antall atomer i 1kg kobber er  $N=9.52 \cdot 10^{24} .$

$$\ln \frac{\Omega_f}{\Omega_i} = 3N \ln \frac{q_f}{q_i} , \quad \frac{q_f}{q_i} = 1.032 .$$

Ekvipartisjonssteoret gir  $\frac{q_f e}{q_i e} = \frac{q_f}{q_i} = \frac{3NkT_f}{3NkT_i} = \frac{T_f}{T_i} = 1.033 .$

### Oppgave 2

a) 1. hovedsetning:  $dU=dQ+dW$ ,  $dQ=TdS$ ,  $dW=Kdx$ , og  $dU=TdS+Kdx$ .

b)  $F = U - TS$ ,  $dF = dU - TdS - SdT = Kdx - SdT$ , (benytter resultatet fra a)).

Følger av dette at  $K = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_T$ ,  $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_x$ ,

og videre: 
$$\frac{\partial}{\partial T} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_T \right]_x = \left( \frac{\partial K}{\partial T} \right)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_x \right]_T = - \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_T .$$

c) Fra b):

$$K = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_T = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_T - T \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_T .$$

Det første av de to siste leddene i uttrykket for K skyldes at den indre energien varierer med x for konstant T, og det andre at entropien varierer med x. For en stiv strikk vil U variere raskt med x, mens entropien ikke forandres mye, dvs. strikkens indre struktur forventes å forandres lite. Omvendt for en bløt strikk (se oppg. 3.34).

d) Fra b): 
$$\left( \frac{\partial K}{\partial T} \right)_x = - \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_T = 2bx , \text{ og } \frac{dK}{dT} = 2bx ,$$

som integrert gir:

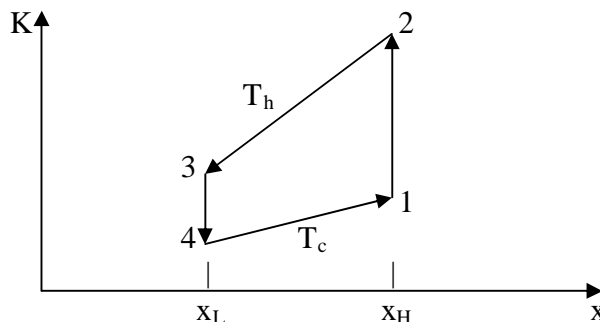
$$K = 2bxT .$$

Videre finner vi:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_T = K + T \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)_T = 2bxT - 2bxT = 0 ,$$

dvs. kraften skyldes utelukkende entropiforandringen.

e) Carnot-prosessen består av to isotermer og to adiabater. For adiabatene (reversible) er entropien konstant, og det vil i dette tilfelle si at også x er konstant. Ved hjelp av uttrykket for K fra d) får vi følgende K-x diagram:



Tilført arbeid er fra a) gitt ved  $dW=Kdx$ , og utført arbeid  $-Kdx$ . Totalt utført arbeid finnes da av

$$W = W_{23} + W_{41} = -2bT_h \int_{x_H}^{x_L} x dx - 2bT_c \int_{x_L}^{x_H} x dx = b(T_h - T_c)(x_H^2 - x_L^2) .$$

Tilført varme ved isoterme 2→3:

$$Q_h = \int_2^3 dQ = \int_2^3 T dS = -2bT_h \int_{x_H}^{x_L} x dx = bT_h(x_H^2 - x_L^2) .$$

Effektiviteten er da gitt ved:

$$e = \frac{W}{Q_h} = \frac{T_h - T_c}{T_h} = 1 - \frac{T_c}{T_h} ,$$

dvs. den kjente effektiviteten, som er uavhengig av mediet. Vi merker oss også fra d) at den indre energien ikke avhenger av  $x$  for isothermene, slik at f.eks.  $W_{23}=Q_h$ .

### Oppgave 3 (5.23 i læreboka)

a) 
$$d\Phi = -PdV - SdT - Ndm .$$

Av denne relasjonen følger:

$$P = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial V}\right)_{T,m} , \quad S = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)_{V,m} , \quad N = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial m}\right)_{V,T} .$$

b) Vi benytter den termodynamiske relasjonen for reservoaret:

$$T_R dS_R = dU_R + P_R dV_R - m_R dN_R .$$

Videre benytter vi at  $dU_R = -dU$  (for systemet), og tilsvarende  $dN_R = -dN$ .

Systemet og reservoaret har samme temperatur  $T_R = T$ , og samme kjemiske potensial  $\mu_R = \mu$ . Antar også at reservoaret har konstant volum ( $dV_R = 0$ ). Vi får da:

$$dS_R = -\frac{1}{T} dU + \frac{1}{T} m dN .$$

Totalt, dvs. for reservoar og system har vi da:

$$dS_{tot} = dS + dS_R = dS - \frac{1}{T} dU + \frac{1}{T} m dN = -\frac{1}{T} d\Phi ,$$

når vi antar  $dT = d\mu = 0$  (termisk og diffusjonslikevekt). Dvs. økning av  $S_{tot}$  krever senkning av  $\Phi$  for systemet, og den totale entropien kan som kjent ikke avta. Dette gjelder altså for termisk og diffusjonslikevekt, dvs. for konstant  $T$  og  $\mu$  (felles for systemet og reservoaret).

c) Legger vi til og trekker fra  $PV$  og benytter at  $G = \mu N$  får vi:

$$\begin{aligned} \Phi &= U - TS - mN = U - TS + PV - PV - mN \\ &= G - PV - mN = mN - PV - mN = -PV . \end{aligned}$$