

# Universitetet i Oslo

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

**Eksamen i:** FYS2160 – Termodynamikk og statistisk fysikk

Dato: Tirsdag 9. desember 2003

Tid for eksamen: 0900 - 1200

Oppgavesettet: 3 sider

Tillatte hjelpemidler: Elektronisk kalkulator, godkjent for videregående skole  
To A4-ark med egne notater (kan beskrives på begge sider)

Rottmann: Matematisk formelsamling

Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene

### Oppgave 1

Systemet vårt er  $N$  atomer som er bundet i et krystallgitter. Vi antar at atomene vibrerer uavhengig av hverandre om likevektsposisjoner i krystallen, og at hvert atom har en vibrasjonsenergi gitt ved

$$E_n = nE, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Videre kan hvert atom være i en av to interne tilstander med energier henholdsvis  $\epsilon_1=0$  og  $\epsilon_2=\epsilon$  ( $\epsilon>0$ ). Systemet er i likevekt med et reservoar med temperatur  $T$ .

- a) Vis at partisjonsfunksjonen for ett atom er gitt ved

$$Z_1 = Z_{\text{vib}} \cdot Z_{\text{int}} = \frac{1 + e^{-\frac{\epsilon}{kT}}}{1 - e^{-\frac{E}{kT}}}$$

Hva blir partisjonsfunksjonen for hele systemet av  $N$  atomer?

Vi skal i resten av oppgaven anta at  $\epsilon \ll E$ , og at temperaturen er så lav at vibrasjonsbevegelsen er "frosset ut", dvs.  $Z_{\text{vib}}=1$ .

- b) Finn et uttrykk for antall atomer  $N_1$  som har energi  $\epsilon_1=0$ , og antallet  $N_2$  som har energi  $\epsilon_2=\epsilon$ . Test resultatet ditt for grensen  $T=0$ .
- c) Vis at midlere energi pr. partikkel er gitt ved

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{1 + e^{\frac{\epsilon}{kT}}}$$



Hvordan vil du angi systemets indre energi  $U$  ?

- d) Bestem systemets varmekapasitet  $C_V$ , og vis at grenseverdien for lave temperaturer ( $\epsilon/kT \gg 1$ ) er gitt ved

$$C_V = Nk \left( \frac{\epsilon}{kT} \right)^2 e^{-\frac{\epsilon}{kT}}$$

Kommenter også grenseverdien for  $C_V$  for  $T=0$ .

- e) Gjør rede for at Helmholtz fri energi for systemet er gitt ved

$$F = -NkT \ln Z_1$$

Bestem systemets entropi  $S$  (anta fortsatt  $Z_{\text{vib}}=1$ ). Undersøk grenseverdien for  $S$  når  $T \rightarrow 0$ . Vi lar også  $T \rightarrow \infty$ . Hva blir grensen for  $S$  da? Kommenter!

## Oppgave 2

Vi skal i denne oppgaven se på en gass som inneholder  $N$  partikler (molekyler). For gassen gjelder følgende såkalte TdS-ligning (skal ikke bevises):

$$TdS = C_V dT + T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV, \quad (1)$$

der  $C_V$  er varmekapasiteten ved konstant volum. Ligningen ovenfor gjelder generelt, også for gasser som ikke er ideelle. Varmekapasiteten ved konstant trykk er definert ved

$C_P = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_P$ . I denne oppgaven betraktes  $C_V$  og  $C_P$  som konstante størrelser.

- a) Vis at for en ideell gass gjelder

$$C_P - C_V = Nk$$

- b) Gjør rede for at for en reversibel adiabatisk prosess gjelder  $dS=0$ . Bruk TdS-ligningen (1) ovenfor til å utlede adiabatligningen for en ideell gass:

$$TV^{\gamma-1} = \text{konstant}, \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

- c) For en Van der Waal-gass gjelder tilstandsligningen

$$\left( P + \frac{aN^2}{V^2} \right) (V - Nb) = NkT$$

Gi en kort kommentar til konstantene  $a$  og  $b$ . Bruk igjen TdS-ligningen (1) til å finne en adiabatligning for Van der Waal-gassen (bruk  $T$  og  $V$  som variable). Kontroller resultatet for  $a=b=0$ .

- d) Finn ut fra TdS-ligningen (1) et uttrykk for den indre energien  $U$  for en Van der Waal-gass. Bruk  $T$  og  $V$  som variable (og en additiv konstant). Kommenter avhengigheten av  $V$ . Kontroller også dette resultatet for  $a=b=0$ .

### Oppgave 3

Vi har en gass bestående av  $N$  bosoner ( $N \gg 1$ ) med temperatur  $T$  og kjemisk potensial  $\mu$ .

- a) Skriv ned uttrykket for Bose-Einstein fordelingen  $\bar{n}_{BE}$ . Lag en enkel skisse som viser  $\bar{n}_{BE}$  som funksjon av energien  $\epsilon$ . Hva er betingelsen for at denne Bose-gassen skal oppføre seg som en klassisk gass?
- b) Vi antar at bosonene kan være i et sett av energinivåer som betegnes  $\epsilon_j$ ,  $j=1,2,3,\dots$ . Skriv ned en relasjon som i prinsippet kan brukes til å bestemme det kjemiske potensialet  $\mu$ . Ved en tilstrekkelig lav temperatur kan vi anta at alle bosonene er i det laveste nivået  $\epsilon_1$ . Vis ut fra dette at vi har

$$\mu = \epsilon_1 - \frac{kT}{N}$$

for lave temperaturer.

- c) Ved en bestemt temperatur  $T_g$  observerer vi at det er dobbelt så mange bosoner i laveste nivå  $\epsilon_1$  som i neste nivå  $\epsilon_2$ . Beregn  $\mu$  ved temperaturen  $T_g$ , uttrykt ved  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  og  $T_g$ . Diskuter svaret.



# Universitetet i Oslo

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS2160 – Termodynamikk og statistisk fysikk  
Dato: 15. desember 2004  
Tid for eksamen: 9.00-12.00  
Oppgavesettet: 3 sider  
Tillatte hjelpemidler: Elektronisk kalkulator, godkjent for videregående skole  
To A4-ark med egne notater (kan beskrives på begge sider)  
Rottmann: Matematisk formelsamling  
Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene

## Oppgave 1

- a) Gjør rede for at en reversibel adiabatisk prosess er isentropisk, dvs. entropien er konstant. Multiplisiteten for en monoatomisk ideell gass er gitt ved uttrykket

$$\Omega = f(N) V^N U^{3N/2} .$$

Gjør rede for at entropien for gassen kan skrives som

$$S = k \ln(K V^N T^{3N/2}) ,$$

der K er konstant for en gass med konstant antall atomer.  
Vis adiabatligningen

$$V T^{3/2} = \text{konstant} .$$

- b) Helmholtz fri energi er generelt gitt ved  $F=U-TS$ . Vis de generelle relasjonene

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \quad \text{og} \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

for et system med konstant partikkeltall. Vis videre at vi har

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V .$$

- c) Benytt resultatet fra a) til å bestemme  $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$  for en monoatomisk ideell gass.

Finn et uttrykk for trykket i gassen.

- d) En monoatomisk ideell gass gjennomgår en vilkårlig prosess fra en start-tilstand med volum  $V_i$  og temperatur  $T_i$ , til en slutt-tilstand med volum  $V_f$  og temperatur  $T_f$ . Vis at følgende relasjon gjelder:

$$V_f T_f^{3/2} = V_i T_i^{3/2} e^{\Delta S / Nk} ,$$

der  $\Delta S$  er entropiforandringen under prosessen.

## Oppgave 2

Energitettheten (energi pr. volum) for en fotongass er etter Stefan-Boltzmanns lov gitt ved

$$\frac{U}{V} = \frac{\pi^2}{15^3 c^3} (kT)^4 = a(kT)^4 , \quad a = \frac{h}{2\pi} .$$

- a) Gjør rede for at vi for en fotongass har relasjonen (hint: termodynamiske identitet)

$$dS = \frac{dU}{T} \quad \text{ved konstant volum.}$$

Bruk denne relasjonen til å vise at entropien for fotongassen er gitt ved

$$S = \frac{4}{3} aVk(kT)^3 , \quad \text{når vi antar } S = 0 \text{ for } T = 0.$$

- b) Beregn Helmholtz fri energi  $F=U-TS$  for fotongassen. Vis at trykket i gassen er gitt ved

$$P = \frac{1}{3} a(kT)^4 .$$

- c) Vi lar fotongassen gjennomgå en reversibel isoterm ekspansjon fra volumet  $V_1$  til volumet  $V_2$  ved temperaturen  $T_h$ . Bestem varmemengden  $\Delta Q_h$  som da må tilføres.

## Oppgave 3

Et system av  $N$  fermioner har temperaturen  $T$  og kjemisk potensial  $\mu$ .

- a) Fermi-Dirac fordelingen er gitt ved

$$\bar{n}_{FD}(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1} .$$

Tegn et diagram som viser denne fordelingen for to ulike temperaturer  $T_1$  og  $T_2$ , der  $T_1 < T_2$ . Hva menes med en degenerert fermi-gass?



- b) Vi antar at systemet har en tetthet av tilstander  $g(\epsilon)$  gitt ved (skal ikke vises)

$$g(\epsilon) = bV\sqrt{\epsilon},$$

der  $V$  er systemets volum, og  $b$  er en konstant. Forklar hva vi mener med fermienergien  $\epsilon_F$ , og bestem  $\epsilon_F$  uttrykt ved  $b$ ,  $V$  og  $N$ .

- c) Finn systemets totale energi  $U_0$  ved  $T=0$ , uttrykt ved  $N$  og  $\epsilon_F$ .

- d) For lave temperaturer ( $kT \ll \epsilon_F$ ) er den totale energien  $U$  gitt ved (skal ikke vises)

$$U = U_0 + \frac{\pi^2}{4} N \frac{(kT)^2}{\epsilon_F}.$$

Bestem systemets varmekapasitet  $C_V$ .

I et metall som kobber vil hvert atom bidra med ett fritt ledningselektron ( $\epsilon_F \approx 5\text{eV}$ ). Sammenlign  $C_V$  for  $N$  elektroner med varmekapasiteten som ekvipartisjonsteoremet gir for en "Einstein-solid" med  $N$  atomer.

- e) Finn entropien for systemet ved lave temperaturer ( $kT \ll \epsilon_F$ ).

## FYS2160 HJEMMEEKSAMEN HØSTEN 04

### Oppgave 1

En varmekraftmaskin opererer med en monoatomisk ideell gass ( $N$  atomer) som gjennomløper en reversibel syklisk prosess. Syklusen har fire deler:  $a \rightarrow b$  er en isobar ekspansjon,  $b \rightarrow c$  adiabatisk ekspansjon,  $c \rightarrow d$  isobar kompresjon,  $d \rightarrow a$  adiabatisk kompresjon.

- a) Tegn syklusen inn i et PV-diagram og et PS-diagram.  
b) Gassen har en Gibbs fri energi gitt ved (skal ikke vises)

$$G = -NkT \ln \left( \frac{aT^{5/2}}{P} \right),$$

der  $a$  er en konstant. Vis at entropien er gitt ved

$$S = Nk \ln \left( \frac{aT^{5/2} e^{5/2}}{P} \right).$$

- c) Systemet opererer mellom to konstante trykk  $P_1$  og  $P_2$  ( $P_1 < P_2$ ), og to konstante entropier  $S_1$  og  $S_2$  ( $S_1 < S_2$ ). Beregn tilført varme  $\Delta Q_{\text{inn}}$ , og avgitt varme  $\Delta Q_{\text{ut}}$ , begge uttrykt ved  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $S_1$ , og  $S_2$  (hint:  $dQ = TdS$ ).  
d) Bestem maskinens effektivitet. (Svaret avhenger bare av  $P_1$  og  $P_2$ ).

# Universitetet i Oslo

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

<b>Eksamen i:</b>	<b>FYS2160 – Termodynamikk og statistisk fysikk</b>
Dato:	5. desember 2005
Tid for eksamen:	14.30-17.30
Oppgavesettet:	3 sider
Tillatte hjelpemidler:	Elektronisk kalkulator, godkjent for videregående skole To A4-ark med egne notater (kan beskrives på begge sider) Rottmann: Matematisk formelsamling Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene

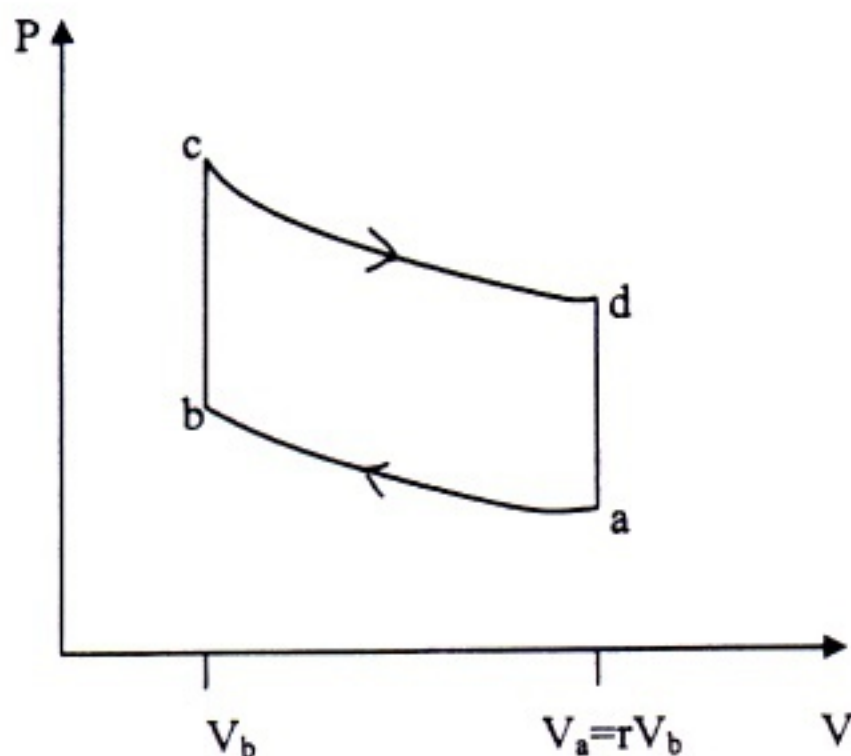
## Oppgave 1

Vi ser på en ideell gass med  $N$  partikler og indre energi  $U = \frac{1}{2} fNkT$ .

- a) Skriv ned 1. hovedsetning, og vis at vi for en adiabatisk prosess har

$$TV^{\gamma-1} = \text{konstant}, \text{ der } \gamma = \frac{f+2}{f} \text{ er adiabatkonstanten.}$$

Vi lar den ideelle gassen være arbeidssubstans for en syklisk varmekraftmaskin. Den sykliske prosessen som utnyttes i vår maskin er vist på figuren.  $a \rightarrow b$  er en adiabatisk prosess,  $b \rightarrow c$  er en isokor prosess (volum  $V_b$ ),  $c \rightarrow d$  er en adiabatisk prosess, og  $d \rightarrow a$  er en isokor prosess (volum  $V_a = rV_b$ ,  $r > 1$ ). Temperaturen i de fire tilstandene a-d er henholdsvis  $T_a$ ,  $T_b$ ,  $T_c$  og  $T_d$ . Alle prosessene er reversible.





- b) Gjør rede for at effektiviteten for en syklisk varmekraftmaskin generelt er gitt ved

$$e = 1 - \frac{Q_c}{Q_h},$$

der  $Q_c$  og  $Q_h$  henholdsvis betyr avgitt og mottatt varme. Bestem  $Q_c$  og  $Q_h$  uttrykt ved de oppgitte temperaturene.

- c) Vis at maskinens effektivitet er gitt ved

$$e = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}.$$

Anta  $r=10$ , og beregn effektiviteten for  $f=3$  og  $f=5$ . Kommenter resultatene.

## Oppgave 2

Et system har tre diskrete energinivåer uten degenerasjon, der energiene  $\varepsilon_j$  er gitt ved

$$\varepsilon_j = jmB, \quad j = -1, 0, 1.$$

$m$  og  $B$  er konstanter ( $mB > 0$ ), og vi antar at systemet har temperaturen  $T$ .

- a) Vis at systemets partisjonsfunksjon  $Z_1$  er gitt ved

$$Z_1 = 1 + 2 \cosh\left(\frac{mB}{kT}\right).$$

Bestem systemets midlere energi  $\bar{\varepsilon}$ .

- b) Vis at vi for systemets entropi har

$$S = k \ln Z_1 - \frac{1}{Z_1} \frac{2mB}{T} \sinh\left(\frac{mB}{kT}\right).$$

- c) Undersøk grensen for entropien for  $kT \gg mB$ , og kommenter resultatet.

Vi antar nå at vi har et stort system bestående av  $N$  identiske system av typen studert ovenfor, alle med temperaturen  $T$ . Det er ingen translasjonsbevegelser i systemet.

- d) Bestem partisjonsfunksjon  $Z$  for det store systemet. Finn videre det store systemets kjemiske potensial  $\mu$ .

(Vi husker:  $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ,  $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ).

## Oppgave 3

Et system med  $N$  bosoner har temperaturen  $T$  og kjemisk potensial  $\mu$ . Bose-Einstein fordelingen er gitt ved

$$\bar{n}_{BE}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1}.$$



- a) Forklar hva størrelsen  $\bar{n}_{BE}(\epsilon)$  betyr. Tegn et enkelt diagram som viser denne fordelingen for to ulike temperaturer  $T_1$  og  $T_2$  ( $T_1 < T_2$ ).
- b) Vi antar at energien ( $\epsilon$ ) kan anta diskrete verdier  $\epsilon_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , slik at  $\epsilon_j < \epsilon_{j+1}$ . Sett opp et uttrykk for det totale antall partikler  $N$  i systemet. Hvilken størrelse kan vi (i prinsippet) bestemme av dette uttrykket?
- c) Angi et uttrykk for antall partikler  $N_j$  i nivået  $\epsilon_j$ . Hva skjer med  $N_j$  når  $T \rightarrow 0$ ? Hva er grensen for det kjemiske potensialet når  $T \rightarrow 0$ ?
- d) Hva er betingelsen for at Bose-Einstein fordelingen skal gå over til en klassisk Boltzmann fordeling? Anta at vi har diskrete energier  $\epsilon_j$  også for den klassiske fordelingen. Vis at det kjemiske potensialet nå er

$$\mu = -kT \ln \frac{Z_1}{N},$$

der  $Z_1$  er partisjonsfunksjonen for en partikkel. Kommenter resultatet.

# Universitetet i Oslo

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

**Eksamen i:** FYS2160 – Termodynamikk og statistisk fysikk

Dato: 13. desember 2006

Tid for eksamen: 15.30-18.30.

Oppgavesettet: 3 sider

Tillatte hjelpemidler: Elektronisk kalkulator, godkjent for videregående skole  
To A4-ark med egne notater (kan beskrives på begge sider)  
Rottmann: Matematisk formelsamling  
Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene

### Oppgave 1

For et generelt termodynamisk system med et konstant antall partikler antar vi at entropien er gitt som en funksjon av  $U$  og  $V$ , dvs.  $S=S(U,V)$ .

- a) Utled den termodynamiske identiteten

$$dU = TdS - PdV .$$

Gjør rede for at det også følger at

$$T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P .$$

- b) Vis Maxwell-relasjonen (Hint: Benytt F)

$$\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V ,$$

og dermed også relasjonen

$$T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P .$$

- c) Anta at  $U$  bare er en funksjon av  $T$ , dvs.  $U=U(T)$ . Hva slags løsning gir relasjonen ovenfor nå for  $P$ ? Kommenter?
- d) Anta at vi har et system hvor  $U=g(T)V$ , og  $P=g(T)/3$ .  
Bruk relasjonen under b) til å finne et uttrykk for  $g(T)$ . Kjenner du et system som har disse egenskapene?

### Oppgave 2

Clausius-Clapeyrons ligning er som følger:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T\Delta V} .$$

- a) Forklar hva symbolene i denne ligningen betyr. Skisser sammenhørende verdier for  $P$  og  $T$  i et  $P$ - $T$  diagram. Hva menes med henholdsvis trippelpunktet og det kritiske punkt?



b) For et gitt materiale har Clausius-Clapeyron ligningen løsningene (skal ikke vises)

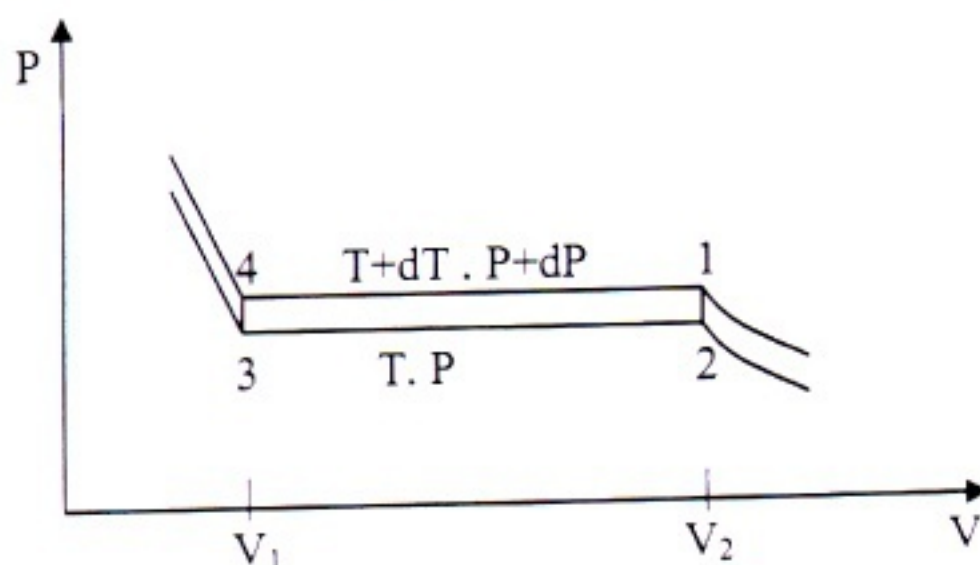
$$\ln \frac{P}{P_0} = 0.04 - \frac{6T_0}{T}, \quad \text{fast-damp,}$$

$$\ln \frac{P}{P_0} = 0.03 - \frac{4T_0}{T}, \quad \text{væske-damp,}$$

der  $P_0$  og  $T_0$  er konstanter. Finn temperaturen til trippelpunktet uttrykt ved  $T_0$ .

c) Finn fordampningsvarmen pr. mol. for systemet væske-damp. Du kan se bort fra volumet av væsken, og betrakte dampen som en ideell gass.

d) Figuren viser to nærliggende isotermer for et væske-damp system. Angi hvilken del av isotermene som angir væske-damp likevekten.



Syklusen angitt ved punktene 1-4 på figuren betegner en Carnot-prosess. Isotermene 1-4 og 2-3 har temperaturene  $T+dT$  og  $T$ , der  $dT$  er en liten størrelse. Vi antar videre at adiabatene 1-2 og 3-4 foregår ved de konstante volumene  $V_2$  og  $V_1$ .  $dP$  betegner en liten trykkforskjell. Gjør rede for at effektiviteten for Carnot-syklusen angitt på figuren til 1.orden i  $dT$  er

$$e = \frac{dT}{T}.$$

Bruk Carnot-syklusen til å bevise Clausius-Clapeyron ligningen for væske-damp systemet.

### Oppgave 3

a) Skriv ned uttrykket for Bose-Einstein fordelingen  $\bar{n}_{BE}$ . Gjør rede for at midlere energi for fotoner med frekvens  $f$  og temperatur  $T$  er gitt ved

$$\bar{\varepsilon}(f) = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}.$$

- b) Det kan vises at antall foton-tilstander med frekvenser i området  $f$  til  $f+df$  for en fotongass i et volum  $V$  ved temperaturen  $T$  er gitt ved

$$g(f)df = bVf^2 df ,$$

er  $b$  er en konstant.

Vis at energien for fotongassen er gitt ved

$$U = aVT^4 ,$$

der  $a$  er en konstant.

Det kan vises at partisjonsfunksjonen  $Z$  for en fotongass i et volum  $V$  ved temperaturen  $T$  er gitt ved

$$\ln Z = \frac{8\pi^5}{45} \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 V .$$

- c) Finn fotongassens energi  $U$ , og bestem konstanten  $a$  fra b).  
d) Bestem fotongassens entropi. Bruk resultatet til å angi en adiabat-ligning for fotongassen.  
e) Finn fotongassens trykk, og bestem Gibbs fri energi  $G$ . Kommenter resultatet.



# Universitetet i Oslo

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

<b>Eksamen i:</b>	<b>FYS2160 – Termodynamikk og statistisk fysikk</b>
Dato:	13. desember 2007
Tid for eksamen:	14.30 - 17.30
Oppgavesettet:	3 sider
Tillatte hjelpemidler:	Elektronisk kalkulator, godkjent for videregående skole
.	To A4-ark med egne notater (kan beskrives på begge sider)
.	Rottmann: Matematisk formelsamling
.	Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

### Oppgave 1:

En varmekraftmaskin opererer med en ideell gass med  $N$  molekyler, som gjennomløper en syklisk prosess under reversible forhold. Maskinen er i termisk kontakt med to reservoarer, et varmt reservoar med temperatur  $T_h$  og et kaldt reservoar med temperatur  $T_c$ . De to temperaturene  $T_h$  og  $T_c$  kan antas konstante.

Syklusen har fire deler: ( $a \rightarrow b$ ) **isoterm ekspansjon**, ( $b \rightarrow c$ ) **adiabatisk ekspansjon**, ( $c \rightarrow d$ ) **isoterm kompresjon** og ( $d \rightarrow a$ ) **adiabatisk kompresjon**.

- Skisser prosessen ( $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$ ) i et  $PV$ -diagram og i et  $TS$ -diagram. Spesifiser eventuelle størrelser som er konstante under en eller flere av delprosessene. Hva kalles denne syklusen?
- Gjør rede for at effektiviteten  $e$  for en syklisk varmekraftmaskin generelt er gitt ved:

$$e = 1 - \frac{Q_c}{Q_h}, \quad (1)$$

der  $Q_h$  og  $Q_c$  henholdsvis betyr mottatt og avgitt varme for maskinen. Bestem maskinens effektivitet uttrykt ved de oppgitte temperaturene  $T_h$  og  $T_c$ . (Hint: betrakt syklusens forløp i  $TS$ -diagrammet og bruk relasjonen  $Q = \int T(S)dS$ ).

- En ideell gass har indre energi  $U = \frac{f}{2}NkT$ . Skriv ned den termodynamiske identiteten for størrelsen  $U$ , og vis at vi for en adiabatisk prosess i en ideell gass med konstant partikkeltall  $N$  har ligningen:

$$TV^{\gamma-1} = \text{konstant}, \quad \text{der } \gamma = \frac{f+2}{f} \text{ er adiabatkonstanten.} \quad (2)$$

### Oppgave 2:

Vi har tre fordelingsfunksjoner for tre typer systemer der partiklene har forskjellige egenskaper:

$$\bar{n}_1(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu_1)/kT} + 1}; \quad \bar{n}_2(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu_2)/kT} - 1}; \quad \bar{n}_3(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu_3)/kT}}, \quad (3)$$

der  $T$  er temperaturen og  $\mu_i$  er de kjemiske potensialene.

Vi antar at hvert av systemene inneholder  $N$  partikler ( $N \gg 1$ ), og at partikkeltallet  $N$  er en bevart størrelse. Videre antas at partiklene i hvert system kan være i et sett av ikke-degenererte enpartikkeltilstander som betegnes  $\epsilon_j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Forklar kort hvilken størrelse de forskjellige fordelingene representerer, og hva slags systemer / partikkeltyper de er gyldige for. Lag en enkel skisse som viser  $\bar{n}_1$ ,  $\bar{n}_2$  og  $\bar{n}_3$  som funksjoner av energien  $\epsilon$ , ved endelig temperatur  $T > 0$ .
- Skriv ned en relasjon for system 1 som i prinsippet kan brukes til å bestemme det kjemiske potensialet  $\mu_1$ . Forklar uten regning hvor  $\mu_1$  vil ligge for dette systemet ved lav temperatur ( $T \rightarrow 0$ ).
- Skriv ned relasjonen for bestemmelse av det kjemiske potensialet  $\mu_2$  i system 2. Hva skjer med størrelsene  $\bar{n}_2(\epsilon_j)$  for tilfellene  $j = 0$  og  $j \geq 1$  når  $T \rightarrow 0$ ? Hvilken grenseverdi går  $\mu_2$  mot når  $T \rightarrow 0$ , og hva slags fenomen kan forekomme i denne typen systemer ved lave nok temperaturer?
- Skriv ned relasjonen for bestemmelse av det kjemiske potensialet  $\mu_3$  i system 3, og bruk denne til å vise at  $\mu_3$  ved vilkårlig temperatur kan uttrykkes:

$$\mu_3 = -kT \ln \frac{Z_1}{N}, \quad (4)$$

der  $Z_1$  er den kanoniske partisjonsfunksjonen for en partikkel. Under hvilke betingelser gir fordelingsfunksjonen  $\bar{n}_3$  en god approksimasjon til "virkelige" partiklers oppførsel (som er beskrevet ved  $\bar{n}_1$  og  $\bar{n}_2$ )?

### Oppgave 3:

Det kan vises at partisjonsfunksjonen  $Z$  for en fotongass i et volum  $V$  ved temperaturen  $T$  er gitt ved følgende ligning:

$$\ln Z = \frac{8\pi^5}{45} \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 V. \quad (5)$$

Videre kan vi få bruk for relasjonen mellom Helmholtz fri energi  $F$  og partisjonsfunksjonen  $Z$ , den termodynamiske identiteten for  $F$  og definisjonen av Gibbs fri energi  $G$ :

$$F = U - TS = -kT \ln Z; \quad dF = -SdT - PdV + \mu dN; \quad G = U - TS + PV = \mu N. \quad (6)$$

- Vis at fotongassens energi  $U$  er gitt ved:

$$U = \frac{8\pi^5}{15} \frac{(kT)^4}{(hc)^3} V. \quad (7)$$

- Vis at fotongassens entropi  $S$  er gitt ved:

$$S = \frac{32\pi^5}{45} \left( \frac{kT}{hc} \right)^3 kV. \quad (8)$$

Bruk resultatet til å angi en adiabatligning (sammenheng mellom  $T$  og  $V$ ) for gassen. Ifølge læreboka er den kosmiske bakgrunnsstrålingen (tilsvarende stråling fra et sort



legeme med  $T \approx 2.73$  K) en rest fra en tidligere epoke i universet, da temperaturen  $T_0$  var  $\sim 3 \cdot 10^3$  K og universets utstrekning  $L_0$  i hver av de romlige dimensjoner var  $\sim 10^{-3}$  av nåværende verdier  $L$ . Er disse tallene konsistente med adiabatisk ekspansjon av den termiske fotongassen i universet?

- c) Finn fotongassens trykk  $P$  (hint: bruk en partialderivert av  $F$ ) og vis at Gibbs fri energi  $G$  for gassen blir null. Hva sier resultatet for  $G$  om det kjemiske potensialet  $\mu$  i en fotongass? Hvilken egenskap ved fotontallet  $N$  er årsak til at  $\mu$  antar denne verdien (ved konstant  $T$  og  $V$ )?

**Det var alt. Lykke til!**

# Universitetet i Oslo

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

<b>Eksamen i:</b>	<b>FYS2160 – Termodynamikk og statistisk fysikk</b>
Dato:	11. desember 2008
Tid for eksamen:	14.30 - 17.30
Oppgavesettet:	3 sider
Tillatte hjelpemidler:	Elektronisk kalkulator, godkjent for videregående skole
.	To A4-ark med egne notater (kan beskrives på begge sider)
.	Rottmann: Matematisk formelsamling (alle utgivelsesår)
.	Øgrim og Lian / Angell og Lian: Fysiske størrelser og enheter
.	(alle utgivelsesår)

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

### Oppgave 1

En ideell toatomig gass har frihetsgrader knyttet til translasjon, rotasjon og vibrasjon. Total enpartikkelenergi for et molekyl kan uttrykkes:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}} + E_{\text{vib}} , \quad (1)$$

og partisjonsfunksjonen  $Z_1$  for et molekyl kan skrives:

$$Z_1 = Z_{\text{trans}} Z_{\text{rot}} Z_{\text{vib}} , \quad (2)$$

der  $Z_{\text{trans}}$  og  $Z_{\text{rot}}$  ved høy nok temperatur har formen:

$$Z_{\text{trans}} = \frac{V}{v_Q}; \quad v_Q = \left( \frac{h^2}{2\pi m kT} \right)^{3/2}; \quad Z_{\text{rot}} = \frac{kT}{\epsilon_{\text{rot}}} . \quad (3)$$

og  $\epsilon_{\text{rot}}$  er en konstant. Energinivåene for vibrasjon av et toatomig molekyl er gitt ved:

$$E_n = n\epsilon_{\text{vib}}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

der  $\epsilon_{\text{vib}}$  er en konstant ( $\epsilon_{\text{vib}} \gg \epsilon_{\text{rot}}$ ).

- a) Sett opp partisjonsfunksjonen  $Z_{\text{vib}}$ , og vis at denne ved en vilkårlig temperatur  $T$  er gitt ved:

$$Z_{\text{vib}} = \frac{1}{1 - e^{-\epsilon_{\text{vib}}/kT}} . \quad (5)$$

Finn et tilnærmet uttrykk for  $Z_{\text{vib}}$  når  $kT \gg \epsilon_{\text{vib}}$ .

Hint: For  $|x| < 1$  gjelder følgende:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} . \quad (6)$$

- b) Partisjonsfunksjonen  $Z_N$  for en gass av  $N$  identiske toatomige molekyler, kan ved høy temperatur ( $kT \gg \epsilon_{\text{vib}}$ ) skrives:

$$Z_N = \frac{1}{N!} Z_1^N = \frac{1}{N!} \left( \frac{V}{v_Q} \frac{kT}{\epsilon_{\text{rot}}} \frac{kT}{\epsilon_{\text{vib}}} \right)^N . \quad (7)$$

Bruk  $Z_N$  til å bestemme indre energi  $U$  for gassen. Kommenter resultatet i lys av ekvipartisjonsteoremet.



- c) Helmholtz' fri energi  $F$  for gassen kan uttrykkes ved hjelp av partisjonsfunksjonen  $Z_N$ :

$$F = -kT \ln Z_N . \quad (8)$$

Sett opp den termodynamiske identiteten for  $F$  (hint: husk at  $F = U - TS$ ) og uttrykk entropien  $S$  som en partialderivert av  $F$ . Vis deretter at entropien  $S$  i en toatomig gass med både rotasjon og vibrasjon, kan uttrykkes som en ekvivalent til Sackur-Tetrodeligningen (vi antar at  $kT \gg \epsilon_{\text{vib}}$ ):

$$S = Nk \left[ \ln \left( \frac{V}{N} \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3/2} \frac{(kT)^{7/2}}{\epsilon_{\text{rot}} \epsilon_{\text{vib}}} \right) + \frac{9}{2} \right] . \quad (9)$$

Bruk uttrykket for  $S$  til å finne en relasjon mellom  $T$  og  $V$  for en adiabatisk prosess.

En varmekraftmaskin opererer med en toatomig ideell gass med  $N$  atomer, som gjennomløper en syklisk prosess. Syklusen har 4 deler:  $1 \rightarrow 2$  er en **oppvarming ved konstant volum**  $V_1$ ,  $2 \rightarrow 3$  er en **adiabatisk ekspansjon** fra  $V_1$  til  $V_2$ ,  $3 \rightarrow 4$  er en **avkjøling ved konstant volum**  $V_2$ , og  $4 \rightarrow 1$  er en **adiabatisk kompresjon** fra volumet  $V_2$  til  $V_1$ . Alle delprosessene finner sted under kvasistatiske forhold. Gassen er varm nok til at både rotasjons- og vibrasjonsfrihetsgrader er aktivert ( $kT \gg \epsilon_{\text{vib}}$ ).

- d) Skisser prosessen i et  $PV$ -diagram. Forklar hvorfor maskinens effektivitet  $e$  kan uttrykkes:

$$e = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} , \quad (10)$$

der  $Q_h$  er tilført varme og  $Q_c$  er avgitt spillvarme. Bestem  $Q_h$  og  $Q_c$ , uttrykt ved temperatuene  $T_1, T_2, T_3$  og  $T_4$ .

- e) Uttrykk effektiviteten  $e$  ved volumene  $V_1$  og  $V_2$ .

## Oppgave 2

Vi har en kvantegass bestående av  $N$  bosoner i et volum  $V$ , ved lav temperatur  $T$ . Partikkeltallet  $N$  er en bevart størrelse.

- a) Fordelingsfunksjonen  $\bar{n}_{\text{BE}}(\epsilon)$  for bosoner er for en kvantetilstand med enpartikkelenergi  $\epsilon$  gitt ved:

$$\bar{n}_{\text{BE}}(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu_{\text{BE}})/kT} - 1} . \quad (11)$$

Skisser  $\bar{n}_{\text{BE}}(\epsilon)$  som funksjon av  $\epsilon$  ved lav endelig temperatur  $T$ . Beskriv kort hvordan partiklene vil fordele seg på enpartikkeltilstandene for  $T \rightarrow 0$ . Hva kalles dette fenomenet? Vis at det kjemiske potensialet  $\mu_{\text{BE}}$  for en bosongass for  $T \rightarrow 0$  tilnærmet kan uttrykkes ( $\epsilon_0$  er energien for den laveste enpartikkeltilstanden):

$$\mu_{\text{BE}} \approx \epsilon_0 - \frac{kT}{N} . \quad (12)$$

- b) Totalt antall bosoner,  $N$ , kan ved lav nok temperatur  $T$  og stort nok partikkeltall  $N$  og volum  $V$  uttrykkes:

$$N = N_0 + \int_0^\infty \frac{g_{\text{BE}}(\epsilon) d\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} = N_0 + 2\pi V \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} . \quad (13)$$

der nivåettheten  $g_{\text{BE}}(\epsilon)$ , antall enpartikkeltilstander pr. energienhet, er gitt ved:

$$g_{\text{BE}}(\epsilon) = 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \epsilon^{1/2} . \quad (14)$$

Hvilke tilnærmelser er brukt for det kjemiske potensialet  $\mu_{\text{BE}}$  og for grunntilstandsenergien  $\epsilon_0$ ? Forklar kort hvorfor uttrykket for  $N$  har denne formen, med et integral pluss et eget ledd  $N_0$ . Hvorfor blir dette uttrykket ugyldig ved en kritisk temperatur  $T_c$ ? Forklar kvalitativt temperaturutviklingen av  $\mu_{\text{BE}}$ , og lag en enkel skisse av det kjemiske potensialet som funksjon av  $T$ . Det kan være nyttig for den fysiske argumentasjonen å vite løsningen av integralet:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2} d\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} = 2.612 \frac{\sqrt{\pi}}{2} (kT)^{3/2} . \quad (15)$$

c) Vis at bosongassens indre energi  $U$  ved temperaturen  $T < T_c$  er gitt ved:

$$U = 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} = \frac{3}{2} V \left(\frac{2\pi m k T}{h^2}\right)^{3/2} \cdot kT \cdot 1.342 . \quad (16)$$

Du kan få bruk for integralet:

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^x - 1} = 1.342 \frac{3\sqrt{\pi}}{4} . \quad (17)$$

Kommenter kort den indre energiens avhengighet av variablene  $T$ ,  $V$  og  $N$ .

d) Varmekapasiteten ved konstant volum,  $C_V$ , er definert som:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N} . \quad (18)$$

Bestem  $C_V$  for bosongassen som funksjon av  $T$  (vi antar fortsatt at  $T < T_c$ ). Sett opp den termodynamiske identiteten for  $U$ , og uttrykk  $C_V$  som en partialderivert av entropien  $S$ . Bruk deretter resultatet for  $C_V$  til å bestemme  $S$ , og vis til slutt at Helmholtz' fri energi  $F$  er gitt ved:

$$F = -V \left(\frac{2\pi m k T}{h^2}\right)^{3/2} kT \cdot 1.342 . \quad (19)$$

e) Uttrykk kjemisk potensiale  $\mu$  og trykk  $P$  som partialderivate av Helmholtz' fri energi  $F$ . Bruk uttrykket for  $F$  til å beregne det kjemiske potensialet  $\mu_{\text{BE}}$  for bosongassen, og kommenter resultatet. Bestem trykket  $P$  for bosongassen, og kommenter kort avhengigheten av  $T, V$  og  $N$ .

**Det var alt. Lykke til!**

# University of Oslo

## Faculty of Mathematics and Natural Sciences

### Examination in: FYS2160 – Thermodynamics and statistical physics

Date: 10. December 2009

Time of examination: 14.30 - 17.30

The set of problems: 3 pages

Permitted aids: Electronic calculator, approved for high school

. Two A4-sheets of paper with your own notes (both sides can be used)

. Rottmann: Matematisk formelsamling (all editions)

. Øgrim og Lian / Angell og Lian: Fysiske størrelser og enheter  
(all editions)

. Harrap's de poche Dictionnaire Anglais-Francais, Francais-Anglais  
(all editions)

. Kunnskapsforlaget Aschehoug og Gyldendal, Fransk lommeordbok  
(all editions)

Please check that the set of problems is complete before you start solving them.

### Problem 1

- a) Write down a general expression for the canonical partition function  $Z_1$  for one particle having a set of accessible unique quantum states  $s$  with energies  $\epsilon(s)$ .

The permitted energy values for an ultrarelativistic particle (kinetic energy much larger than rest energy) in a 3-dimensional cubic box of volume  $V = L^3$ , can be expressed in terms of the quantum numbers  $n_x, n_y$  and  $n_z$ :

$$\epsilon = \frac{hc\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}{2L} \quad (1)$$

where  $n_x, n_y$  and  $n_z$  must be positive integers.

Throughout the problem we assume that the system is dilute enough for Boltzmann statistics to be applicable. Write down the corresponding canonical partition function  $Z_1$  for one particle.

- b) By approximating the expression found in a) for the one-particle partition function  $Z_1$  by a triple integral, it can be shown (derivation not a part of the present problem) that the partition function takes the form:

$$Z_1 = 8\pi V \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 \quad (2)$$

What is the condition for using the integral approximation? Write down the general canonical partition function  $Z_N$  for a system of  $N$  free, non-interacting, indistinguishable particles, and determine Helmholtz free energy  $F$  for this system (with  $N$  being a large number).



- c) Find an expression for the entropy  $S$  in terms of  $T, V$  and  $N$  (analogous to the Sackur-Tetrode equation for an ideal, non-relativistic monatomic gas). Also find expressions for the internal energy  $U$  and the pressure  $P$ , and finally show that  $P$  equals  $\frac{U}{3V}$ . (Note that the last equation is a general result for a gas of ultrarelativistic or massless particles.)

## Problem 2

The distribution function (average occupancy per one-particle quantum state) for a system of fermions can be written as:

$$\bar{n}_{\text{FD}}(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1} \quad (3)$$

where  $\epsilon$  is the energy of the one-particle state,  $\mu$  is the chemical potential and  $T$  the temperature. The density of states  $g(\epsilon)$  for non-interacting, non-relativistic fermions with mass  $m$  and eigenspin  $\frac{1}{2}$  in a volume  $V$  can be expressed:

$$g(\epsilon) = \frac{\pi}{2} V \left( \frac{8m}{h^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} \quad (4)$$

The total number  $N$  of fermions in the system (all one-particle states) is conserved.

- a) Sketch the distribution function  $\bar{n}_{\text{FD}}(\epsilon)$  for  $T = 0$  and for some finite  $T$ . Explain what is meant by the Fermi energy  $\epsilon_F$ . Write down an equation that in principle determines the chemical potential  $\mu$  for the Fermi gas for arbitrary  $T$ . Then show that the Fermi energy is given by the following expression:

$$\epsilon_F = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3} \quad (5)$$

- b) Write down a general expression for the internal energy  $U$  for the fermion system at arbitrary  $T$ , and determine  $U$  for the special case  $T = 0$ , expressed in terms of  $\epsilon_F$  and  $N$ . At finite temperature  $T$ , we have (derivation not a part of the problem):

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F + \frac{\pi^2}{4} N \frac{(kT)^2}{\epsilon_F} . \quad (6)$$

Find an expression for the heat capacity  $C_V$  as a function of  $T$ . Discuss your result for the limit  $T \rightarrow 0$ .

- c) Explain how the entropy  $S$  can be determined when  $C_V$  is known. Calculate the entropy  $S$  and show that Helmholtz free energy  $F$  can be expressed as:

$$F = \frac{3}{5} N \epsilon_F - \frac{\pi^2}{4} N \frac{(kT)^2}{\epsilon_F} \quad (7)$$

- d) Find an expression for the chemical potential  $\mu$  in terms of  $\epsilon_F$  and  $T$ . Check your result in the limit  $T = 0$ .

### Problem 3

We will here study blackbody radiation in a system containing a large, black planar surface with constant temperature  $T_h$  (can in this context be considered a reservoir). A thin black planar sheet is placed a small distance from this surface and parallel to it. We assume that the entire system is located in vacuum.

In this problem, you may need the expression for Stefan-Boltzmann's constant:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} \quad (8)$$

- a) Determine the temperature  $T_c$  of the sheet at equilibrium. Find the energy flux (energy emitted per area and time) out of the combined system.
- b) We study a similar system, with two thin black sheets placed close to the hot black surface of temperature  $T_h$ , all parallel. Determine the equilibrium temperatures  $T_c$  and  $T_m$  for the outermost and the middle sheet in terms of the reservoir temperature  $T_h$ . Also find the energy flux out of the combined system in this situation.
- c) For a photon gas in thermal equilibrium inside a black box at temperature  $T$ , the energy and entropy densities are, respectively :

$$\frac{U}{V} = \frac{8\pi^5 k^4 T^4}{15h^3 c^3} ; \quad \frac{S}{V} = \frac{32\pi^5 k^4 T^3}{45h^3 c^3} \quad (9)$$

Compare the values for  $\frac{U}{V}$  and  $\frac{S}{V}$ . Determine the entropy flux (entropy per area and time) out of the systems in a) and b), and compare to the corresponding energy flux. Comment on the result.

**That is all. Good luck!**

# University of Oslo

## Faculty of Mathematics and Natural Sciences

### Examination in: FYS2160 – Thermodynamics and statistical physics

Date: 13. December 2010

Time of examination: 14.30 - 18.30

The set of problems: 3 pages

Permitted aids: Electronic calculator, approved for high school

. Two A4 sheets of paper with your own notes (both sides can be used)

. Rottmann: Matematisk formelsamling (all editions)

. Øgrim og Lian / Angell og Lian: Fysiske størrelser og enheter

. (all editions)

Please check that the set of problems is complete before you start solving them.

#### Problem 1

We have a system of  $N$  fermions with eigenspin  $s = \frac{1}{2}$ . The permitted energies for one fermion are given as:

$$\epsilon = \epsilon_0(n_x + n_y) = \epsilon_0 n \quad (1)$$

where  $\epsilon_0$  is a constant, and  $n_x$  and  $n_y$  are both non-negative integers.

a) The Fermi-Dirac distribution is given as:

$$\bar{n}_{\text{FD}}(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1} \quad (2)$$

Sketch this distribution for a temperature  $T = 0$ , and for some finite (high)  $T$ . Explain what is meant by a degenerate Fermi gas.

b) Show that the number of one-particle states with energy lower than  $\epsilon = \epsilon_0 n$  is given by:

$$f(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{\epsilon_0^2} \quad (3)$$

when we assume  $n \gg 1$ . Then determine the density of states  $g(\epsilon)$ :

$$g(\epsilon) = \frac{df(\epsilon)}{d\epsilon} \quad (4)$$

c) Explain what is meant by the Fermi energy. Show that the Fermi energy  $\epsilon_F$  for this system is given as:

$$\epsilon_F = \epsilon_0 \sqrt{N}. \quad (5)$$

Also find the total energy  $U$  for the degenerate Fermi gas, in terms of  $N$  and  $\epsilon_F$ .



- d) We now assume that the Fermi gas is non-degenerate. Write down a general expression for the total number  $N$  of fermions in the system.

Explain qualitatively how the chemical potential  $\mu$  for the Fermi gas will evolve with rising temperature  $T$ , from  $T = 0$ . Find the temperature  $T$  where  $\mu = 0$ , expressed in terms of  $\epsilon_F$ .

**Hint:** You may need the integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12} \quad (6)$$

- e) Now determine the total energy  $U$  for the system at the temperature found in d), and compare with the result from c).

**Hint:** You may need the integral:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x + 1} = a \approx 1.80 \quad (7)$$

### Problem 2

We consider a heat engine operating cyclically between a hot reservoir of temperature  $T_h$ , and a cold reservoir at temperature  $T_c$ . The working substance is a monatomic ideal gas with  $N$  atoms. The cycle consists of four steps: *i*) an isochoric heating at constant volume  $V_1$ , *ii*) an isothermal expansion at  $T = T_h$ ; *iii*) an isochoric cooling at constant volume  $V_2$ ; and finally, *iv*) an isothermal compression at  $T = T_c$ . All processes take place at quasistatic conditions.

- a) Draw the cycle in a  $PV$  diagram. For each of the processes, calculate the work done on the motor and the heat entering the motor.
- b) Write down a general expression for the efficiency  $e$  of a heat engine, and explain the quantities involved. Show that the efficiency of an engine using the present cycle is given as:

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{1 - \frac{T_c}{T_h}} + \frac{3}{2 \ln(V_2/V_1)} \quad (8)$$

- c) We introduce an extra reservoir where the same amount of heat is dumped during the isochoric cooling process and reabsorbed during the isochoric heating process, in a perfectly reversible way. Find the efficiency of the engine in this case, and comment on the result. Discuss the conditions which realize this efficiency.

### Problem 3

We consider a solid where atoms can vibrate in three dimensions about their equilibrium positions in the crystal lattice. For each dimension, the vibrational energy levels have the energies  $E_{\text{vib}} = n\epsilon$  where  $n$  is a non-negative integer and  $\epsilon$  is a constant. Vibrations in different dimensions take place independently, but with the same  $\epsilon$ . We assume that  $kT \gg \epsilon$ . The electronic ground state for each atom in the crystal is located at an energy  $-E_b$ , where the binding energy  $E_b$  is positive. The solid can sublimate into a monatomic ideal gas, and is in equilibrium with its vapour phase at temperature  $T$ .

- a) Show that the partition function for the entire solid crystal consisting of  $N$  atoms can be written as:

$$Z_{N,s} = \left[ e^{\frac{E_b}{kT}} \left( \frac{kT}{\epsilon} \right)^3 \right]^N \quad (9)$$

The one-particle partition function for a gas atom with no internal degrees of freedom can be expressed as (derivation not a part of this problem):

$$Z_{1,g} = \frac{V}{v_Q}; \quad v_Q = \left( \frac{h^2}{2\pi m kT} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (10)$$

Write down the partition function  $Z_{N,g}$  for an amount of gas consisting of  $N$  indistinguishable atoms.

- b) Show that the chemical potential  $\mu$  for a system can be expressed as:

$$\mu = \left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} \quad (11)$$

Find the chemical potential  $\mu_s$  for the solid. For the gas, it can be shown (derivation not a part of this problem) that the chemical potential  $\mu_g$  is given as:

$$\mu_g = -kT \ln \left( \frac{V}{N v_Q} \right) \quad (12)$$

Write down the chemical equilibrium condition for the solid-gas system.

- c) Show that the vapour pressure  $P_g$  for the ideal gas at equilibrium is given as:

$$P_g = \left( \frac{\epsilon \sqrt{2\pi m}}{h} \right)^3 \frac{1}{\sqrt{kT}} e^{-\frac{E_b}{kT}} \quad (13)$$

- d) Explain how the result from c) can be utilized to find the latent heat  $L$  for this sublimation phase transition (detailed calculations not required).

**That is all. Good luck!**

# Universitetet i Oslo

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

### Eksamen i: FYS2160 – Termodynamikk og statistisk fysikk

Dato: 13. desember 2012

Tid for eksamen: 14.30 - 18.30

Oppgavesettet: 3 sider

Tillatte hjelpemidler: Elektronisk kalkulator, godkjent for videregående skole

. To A4-ark med egne notater (kan beskrives på begge sider)

. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle utgaver)

. Øgrim og Lian / Angell og Lian: Fysiske størrelser og enheter

. (alle utgaver)

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

### Oppgave 1:

Partisjonsfunksjonen for en ideell diatomig gass med  $N$  identiske molekyler er ved romtemperatur gitt som (trenger ikke vises):

$$Z_N = \frac{1}{N!} Z_1^N ; \quad Z_1 = Z_{\text{trans}} Z_{\text{rot}} Z_{\text{vib}} ; \quad (1)$$

$$Z_{\text{trans}} = \frac{V}{v_Q} = V \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} ; \quad Z_{\text{rot}} = \frac{kT}{2\epsilon_{\text{rot}}} ; \quad Z_{\text{vib}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\epsilon_{\text{vib}}}{kT}}} .$$

der  $v_Q = \left( \frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2}$  er kvantevolumet og  $\epsilon_{\text{rot}}$  og  $\epsilon_{\text{vib}}$  er konstanter. Ved romtemperatur gjelder at  $\epsilon_{\text{rot}} \ll kT \ll \epsilon_{\text{vib}}$ .

- a) Forklar at vi ved denne temperaturen kan neglisjere vibrasjonsfrihetsgradene. Bestem indre energi  $U$  for gassen, og kommenter resultatet i lys av ekvipartisjonsteoremet. Består molekylene i denne gassen av to like eller to ulike atomer?

En ideell diatomig gass med  $N$  atomer gjennomløper en syklisk prosess som består av følgende delprosesser: *i*) en isobar ekspansjon fra volum  $V_1$  til volum  $V_2 = xV_1$  der  $x > 1$ ; *ii*) en adiabatisk ekspansjon fra volum  $V_2$  til  $V_3$ ; *iii*) en isoterm kompresjon tilbake til volumet  $V_1$ . Alle delprosesser foregår nær romtemperatur og under kvasistatiske forhold.

- b) Skisser syklusen i et  $PV$ -diagram. Finn trykk, volum og temperatur i punktene 2 og 3 uttrykt ved  $x$ ,  $P_1$ ,  $V_1$  og  $T_1$ . (**Hint:** Adiabatrelasjonen  $PV^\gamma = \text{konst.}$  der  $\gamma = \frac{f+2}{f}$  kan antas kjent og brukes uten utledning. Hva er antall kvadratiske frihetsgrader  $f$  for denne gassen? Resultatet for  $V_3$  skal bli  $V_1 \cdot x^{\frac{7}{2}}$ .)
- c) Finn endring  $\Delta U$  i indre energi, arbeid  $W$  gjort på systemet og varme  $Q$  tilført systemet for hver av delprosessene.
- d) Vi antar at en varmekraftmaskin opererer med denne syklusen. Forklar hvor i syklusen input varme  $Q_h$  tilføres gassen, og hvor spillvarme  $Q_c$  forlater gassen. Vis at effektiviteten for syklusen er gitt som:

$$e = 1 - \frac{\ln x}{x - 1} . \quad (2)$$



Hvor oppnås laveste og høyeste temperatur  $T_c$  og  $T_h$  i syklusen? Sammenlign med effektiviteten for en Carnot-maskin med samme  $T_c$  og  $T_h$  for spesialtilfellet  $x = 2$  (oppgitt:  $\ln 2 \approx 0.693$ ).

### Oppgave 2:

Fordelingsfunksjonen (midlere partikkeltall pr. enpartikkel-quantetilstand) for et system av fermioner, også kalt Fermi-Dirac-fordelingen, kan uttrykkes:

$$\bar{n}_{\text{FD}}(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1} . \quad (3)$$

- a) Skisser Fermi-Dirac-fordelingen som funksjon av enpartikkelenergien  $\epsilon$  for  $T = 0$  og for en endelig temperatur  $T$ . Skriv ned generelle uttrykk som ved vilkårlig  $T$  kan brukes til å bestemme det kjemiske potensialet  $\mu$  for Fermigassen når antall fermioner er bevart og lik  $N$ , i tilfellene der vi kjenner spektret av diskrete enpartikkeltilstander  $\epsilon_j$ , eller alternativt tilstandstettheten  $g(\epsilon)$ . Hva menes med Fermi-energien  $\epsilon_F$ ?

Vi har en ultrarelativistisk Fermigass i et volum  $V$ . Det kan vises (ikke del av oppgaven) at tilstandstettheten  $g(\epsilon)$  kan uttrykkes:

$$g(\epsilon) = \frac{8\pi V}{(hc)^3} \epsilon^2 . \quad (4)$$

- b) Vis at Fermi-energien for den ultrarelativistiske Fermigassen er gitt ved:

$$\epsilon_F = hc \left( \frac{3N}{8\pi V} \right)^{1/3} , \quad (5)$$

og at totalenergien  $U$  for gassen ved  $T = 0$  kan uttrykkes:

$$U = \frac{3}{4} N \epsilon_F . \quad (6)$$

Under ekstreme astrofysiske betingelser kan materien eksistere som protoner og elektroner (normal materie) eller nøytroner (nøytronstjernematerie). Reaksjonsligningen for produksjon og henfall av nøytroner er:

$$p^+ + e^- \leftrightarrow n . \quad (7)$$

Nå betrakter vi protonet som et lite system som kan være “uokkupert” (protonet, i nærvær av frie elektroner) eller “okkupert” av ett elektron (slik at det dannes et nøytron). Energidifferansen mellom “okkupert” og “uokkupert” tilstand er lik differansen i hvileenergi mellom nøytronet og det frie partikkelparet (proton + elektron),  $\Delta E = (m_n - m_p - m_e)c^2 = \Delta mc^2$ . For enkelhets skyld setter vi  $E = E_{\text{proton}} = 0$  for den “uokkuperte” tilstanden,  $E = E_{\text{nøytron}} = \Delta E$  for den “okkuperte” tilstanden. Elektronene betraktes som en ultrarelativistisk Fermigass med temperatur  $T = 0$  og med konstant kjemisk potensiale  $\mu_e$  lik Fermi-energien  $\epsilon_F$ . Vi neglisjerer elektronenes hvilemasse overalt unntatt i energidifferansen  $\Delta E$ .

- c) Skriv ned Gibbs-summen (den storkanoniske partisjonsfunksjonen)  $Z_G$  for dette systemet, og benytt de assosierte sannsynlighetene (for at protonet skal være “okkupert” eller “uokkupert”) til å finne et uttrykk for forholdet  $\frac{N_n}{N_p}$  mellom antall nøytroner og protoner. Vis at dette forholdet blir 1 (like mange nøytroner og protoner) ved en kritisk elektrontetthet  $\frac{N}{V}$  gitt ved:

$$\left( \frac{N}{V} \right)_{\text{kritisk}} = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{\Delta mc}{h} \right)^3 . \quad (8)$$

- d) Vi ser nå på en ultrarelativistisk Fermigass ved endelig temperatur  $T$ . Det kan vises (utledningen er ikke en del av denne oppgaven) at energien  $U$  kan uttrykkes:

$$U = \frac{3}{4}N\epsilon_F + \frac{\pi^2}{2}N\frac{(kT)^2}{\epsilon_F} . \quad (9)$$

Finn et uttrykk for varmekapasiteten  $C_V$ . Forklar med utgangspunkt i den termodynamiske identiteten for  $U$  hvordan entropien  $S$  kan bestemmes for fast  $V$  og  $N$  når  $C_V$  er kjent. Finn entropien  $S$  og vis at Helmholtz fri energi  $F$  kan uttrykkes:

$$F = \frac{3}{4}N\epsilon_F - \frac{\pi^2}{2}N\frac{(kT)^2}{\epsilon_F} . \quad (10)$$

- e) Skriv ned den termodynamiske identiteten for  $F$ . Bestem det kjemiske potensialet  $\mu$ , uttrykt ved  $\epsilon_F$  og  $T$  (**hint:** start med å uttrykke  $F$  eksplisitt som funksjon av alle relevante variable). Verifiser resultatet i grensen  $T = 0$ .
- f) Bruk den termodynamiske identiteten for  $F$  til å utlede følgende relasjon:

$$\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{V,N} = -\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{T,V} . \quad (11)$$

Hva kalles denne typen relasjoner? Verifiser relasjonen for den ultrarelativistiske Fermigassen.

**Det var alt. Lykke til!**