Eksamensoppgaver i Fys 114
1998 - 2002

(Tilrettelagt for web-publisering av Magne Guttormsen)

2002
Fysisk institutt
Universitetet i Oslo

Universitetet i Oslo
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: **FYS 114 - Statistisk Fysikk**
Dato: Mandag 25. mai 1998
Tid for eksamen: 0900 - 1500
Oppgavesettet er på 4 sider
Tillatte hjelpemidler: Regnestav, Godkjente elektroniske regnemaskiner.
Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset.
Rottman: "Mathematische formelsammlung".
Øgrim :" Størrelser og enheter i fysikken".
Oliver & Boyd: "Science Data Book".

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Anta at første hovedsetning for et termodynamisk reversibelt system er gitt ved $dQ = dE + MdB$. (I denne likningen er det vanlige arbeidet $dW = pdV$ byttet ut med det magnetiske arbeidet $dW = MdB$, der B er et eksternt magnetisk felt og M er det magnetiske dipolmoment.)

a) Skriv opp uttrykkene for endring i energien dE og Helmholtz fri energi dF ved hjelp av S, T, B og M.

b) Vis at M kan uttrykkes på følgende måter:
$$M = -\left(\frac{\partial E}{\partial B}\right)_S = -\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_T$$

c) Vis at E kan uttrykkes ved den såkalte Gibbs-Helmholtz likningen:
$$E = -T^2\left(\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right)\right)_B$$

d) Vis at følgende relasjoner er gyldige for systemet:
$$\left(\frac{\partial T}{\partial B}\right)_S = -\left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_B \quad \text{og} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_T = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B$$

(Hint: Det kan være nyttig å bruke Maxwell relasjoner med E og F som potensialer)

Oppgave 2

a) Utled Fermi-Dirac's fordelingsfunksjon f og vis at den kan bringes på følgende form:

$$f(\varepsilon,\mu,T)=\frac{1}{1+\exp(\frac{\varepsilon-\mu}{kT})}$$

b) Bevis at $f(\mu+\Delta\varepsilon,\mu,T)=1-f(\mu-\Delta\varepsilon,\mu,T)$

Vi betrakter et system av N elektroner innesluttet i et volum $V = L_x L_y L_z$. Vi antar $L_x = L_y = L_z$. Elektronenes energier blir kvantisert på følgende måte

$$\varepsilon=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2+k_y^2+k_z^2),$$

der $k_x=\frac{\pi}{L_x}n_x$; $n_x=1,2,3...$ og tilsvarende for k_y og k_z.

Her er k_x, k_y og k_z komponenten av bølgevektoren i henholdsvis x, y og z - retningen. La $D(\varepsilon)d\varepsilon$ angi hvor mange kvantetilstander det er med energi mellom ε og $\varepsilon+d\varepsilon$.

c) Vis at tilstandstettheten D kan skrives som

$$D(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon$$

d) Forklar hvorfor det kjemiske potensial for elektronene i systemet synker med temperaturen.
(Hint: Det er vanskelig å løse eksakt matematisk, men sett opp hvilke likninger du må løse og argumenter kvalitativt utfra dette. Du kan bruke resultatet fra b).)

Vi betrakter så et annet system av N elektroner . Vi lar systemet nå bli én dimensjonalt (1D). Det vil si at vi lar L_x , L_y << L_z . Samtidig betrakter vi systemet ved temperaturer som er slik at $\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL_x^2}$ og $\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL_y^2} >> kT >> \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL_z^2}$. Det vil si at i bevegelsen i x og y retning trenger vi bare å betrakte $n_x = n_y = 1$.

e) Beregn et uttrykk for D_{1D} for tilstandstettheten for det én dimensjonale tilfellet.

f) Vil det kjemiske potensialet stige eller synke med temperaturen? Gi en forklaring.

Oppgave 3

Vi betrakter en krystall bestående av atomer i likevekt med konstant volum V, temperatur T og partikkeltall N. I likevekt ved endelig temperatur vil ikke alle gitterposisjonene være besatt - det vil være tomme plasser som vi kaller vakanser. Vi tenker oss at en vakans dannes ved at et atom fjernes fra en gitterplass og plasseres på overflaten av krystallen. (I en virkelig krystall foregår vakansdannelsen ved diffusjon av vakanser fra overflaten.)

Vi antar at antall gitterplasser er konstant lik N. Det er n antall vakanser. Verdien av n kan variere med tilstanden.

a) Finn et uttrykk for multiplisiteten W for systemet av n vakanser?

Energien assosiert med en vakans på en bestemt gitterplass er gitt ved ε og energien til et atom på en bestemt gitterplass er 0.

b) Finn et uttrykk for partisjonsfunksjonen Z til systemet.

c) Vis at Hemholtz fri energi blir $F = -NkT \ln(1 + e^{-\varepsilon / kT})$.

d) Finn entropien S uttrykt ved N, ε og T.

e) Finn energien E uttrykt ved N, ε og T.

f) Finn middelverdien av antall vakanser $\langle n \rangle$ uttrykt ved N, ε og T.

Oppgave 4

Anta at et lukket isolert system (μ - kanonisk system) inneholder en blanding av to monoatomiske ideelle gasser A og B, slik at det totale antall atomer er gitt ved $N = N_A + N_B$.

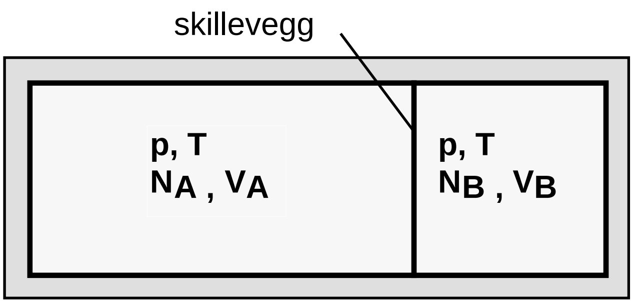
a) Vis at blandingsentropien kan uttrykkes som

$$S_{mix} = -kN[(1-x)\ln(1-x) + x\ln x]$$

hvor $x = N_B/N$ og gjør rede for de antagelser som utledningen bygger på.

b) Finn den maksimale blandingsentropi, og tegn en skisse av S_{mix}/kN som funksjon av x.

Vi tenker oss en beholder hvor de monoatomiske gassene A og B er adskilt med en skillevegg, som vist under. Beholderen er som før lukket og isolert.



c) Finn forholdet mellom størrelsene N_A og N_B uttrykt ved V_A og V_B .

Skilleveggen blir så fjernet.

d) Begrunn kort hvorfor trykket og temperaturen forblir uendret når skilleveggen fjernes.

e) Beregn S_{mix} dersom $V_A = 2V_B$.

f) Er prosessen ved å fjerne skilleveggen reversibel? Begrunn svaret.

Universitetet i Oslo
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: **FYS 114 - Statistisk fysikk**
Dato: Torsdag 10. desember 1998
Tid for eksamen: 0900 - 1500
Oppgavesettet er på 4 sider
Tillatte hjelpemidler: Regnestav, godkjente elektroniske regnemaskiner.
Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset.
Rottman: "Mathematische formelsammlung".
Øgrim :" Størrelser og enheter i fysikken".
Oliver & Boyd: "Science Data Book".

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

a) Vis at det termiske middel for energien i et kanonisk system er gitt ved

$$< E >= kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z \,.$$

Definér størrelsene som inngår i uttrykket.

Energien til en partikkel i en boks med volum $V = L^3$ kan skrives som

$$\varepsilon^{trans} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right),$$

der n_x, n_y og n_z er hele, positive tall. Anta at temperaturen er slik at $kT >> \frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\pi}{L})^2$.

b) Vis at partisjonsfunksjonen for en partikkel kan skrives som

$Z_1^{trans} = n_Q V$ hvor $n_Q = \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$ er kvantekonsentrasjonen.

Hint: Det kan lønne seg å omskrive partisjonssummen til et trippel-integral og bruke at $\int_0^\infty \exp(-u^2)du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Anta at vi har N partikler med konsentrasjon $n = N/V << n_Q$.

c) Vis at translasjonsenergien blir $< E_{trans} >= \frac{3}{2} NkT$.

Et diatomisk molekyl har kvantisert rotasjonsenergi $\varepsilon_l^{rot} = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$, der I er molekylets treghetsmoment. Multiplisiteten for hver spinntilstand l er gitt ved $W_l = 2l+1$, der l = 0, 1, 2,...

d) Skriv opp partisjonsfunksjonen Z_1^{rot} for et roterende diatomisk molekyl uttrykt ved den karakteristiske temperaturen $\theta_{rot} = \frac{\hbar^2}{2Ik}$.

e) Vis at i grensen $T >> \theta_{rot}$ blir $Z_1^{rot} = \frac{T}{\theta_{rot}}$.

Hint: Erstatt partisjons-summen med et integral.

f) Vis at rotasjonsenergien for N molekyler blir $< E_{rot} >= NkT$ i grensen $T >> \theta_{rot}$.

Anta nå at hvert diatomisk molekyl kan vibrere med energier $\varepsilon_v^{vib} = v\hbar\omega$, der ν = 0, 1, 2,... (Vi har her neglisjert nullpunktsenergien $\frac{1}{2}\hbar\omega$). Vi definerer den karakteristiske vibrasjons-temperaturen ved $\theta_{vib} = \frac{\hbar\omega}{k}$.

g) Vis at vibrasjonsenergien for N molekyler blir $< E_{vib} >= NkT$ i grensen $T >> \theta_{vib}$.

Anta at denne modellen er gyldig for en H_2 gass hvor de karakteristiske temperaturer er gitt ved $\theta_{rot} = 85.5$ K og $\theta_{vib} = 6140$ K.

h) Skissér grafisk den molare varmekapasiteten c_v som funksjon av temperaturen for H_2 gassen.

Oppgave 2

a) Tegn en skisse av en halvleder og påfør symboler for kjemisk potensial (μ), båndgapsenergien (ε_g) og energier for valensbånd (ε_v) og ledningsbånd (ε_c).

b) Beskriv kort hva som karakteriserer en halvleder, nevn eksempler på halvledere og hvorledes man lager p- og n-type halvledere.

c) Vis med utgangspunkt i Fermi-Dirac’s fordelingsfunksjon

$$f = \frac{1}{\exp[(\varepsilon - \mu)/kT] + 1}$$

at en halvleders ledningselektroner i det klassiske regime kan uttrykkes som

$$N_e = \{\sum_{CB} \exp[-(\varepsilon - \varepsilon_c)/kT]\} \exp[-(\varepsilon_c - \mu)/kT],$$

der summen tas over elektroner i ledningsbåndet (kalt CB).

d) Begrunn videre at halvlederens konsentrasjon av ledningselektroner kan skrives som

$$n_e = n_c \exp[-(\varepsilon_c - \mu)/kT],$$

der kvantekonsentrasjonen for ledningselektroner er definert ved

$$n_c = 2(m_e^* kT / 2\pi\hbar^2)^{3/2}.$$

Kommentér uttrykket for n_c (du trenger ikke bevise utrykket i denne oppgaven).

Det tilsvarende uttrykk for hull konsentrasjon er gitt ved $n_h = n_v \exp[-(\mu - \varepsilon_v)/kT]$, der kvantekonsentrasjonen for hull er definert ved $n_v = 2(m_h^* kT / 2\pi\hbar^2)^{3/2}$.

e) Finn det kjemiske potensial μ for en intrinsikk (ren) halvleder.

f) Utled massevirkningsloven for en halvleder i det klassiske regimet.

Anta at båndgapet til en intrinsikk (ren) halvleder er 1.0 eV og at gapet er uavhengig av temperaturen. Videre antas det en konsentrasjon av ledningselektroner på 1.5 x10^{10} cm^{-3} ved romtemperatur T_{RT} .

g) Hvor mange ledningselektroner har halvlederen ved temperaturen $T = T_{RT}/2$?
Hint: Det kan lønne seg å bruke at $kT_{RT} = 1/40$ eV.

Oppgave 3

a) Hva er et boson? Vis at det midlere besetningstallet for en tilstand med energi ε i et system av bosoner med kjemisk potensial μ og temperatur T er gitt ved

$$f(\varepsilon,\mu,T) = \frac{1}{\exp[(\varepsilon-\mu)/kT]-1} .$$

Vi skal i det følgende studere et system av partikler med spinn 0 som er begrenset til å bevege seg i to dimensjoner. Partiklene er begrenset av et område i xy-planet med areal $A=L^2$. En partikkel har da kvantiserte energier gitt ved

$$\varepsilon_{n_x,n_y} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \left(n_x^2 + n_y^2\right),$$

der n_x og n_y er hele, positive tall. Vi antar at $kT >> \frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\pi}{L})^2$, slik at alle summer over tilstander kan erstattes med integraler.

b) Vis at antall énpartikkel-tilstander med energi mindre enn ε er gitt ved

$$N(\varepsilon) = \frac{Am}{2\hbar^2\pi}\varepsilon ,$$

og bestem tilstandstettheten $D(\varepsilon)$.

I det følgende velger vi nullpunkt for energi slik at laveste énpartikkel-tilstand har energi $\varepsilon = 0$. La N være totalt antall partikler i systemet. Det kjemiske potensialet μ kan bestemmes av likningen $N = \int_0^\infty D(\varepsilon) f(\varepsilon, \mu, T) d\varepsilon$.

c) Vis at

$$\mu = kT \ln[1 - \exp(-\rho\Lambda^2)],$$

der $\rho = N/A$ er flatetettheten av partikler og $\Lambda^2 = 2\pi\hbar^2/(mkT)$.

Hint: Du kan få bruk for integralet $\int \frac{dx}{e^x - 1} = \ln(1 - e^{-x}) + C$.

d) Vis at antall partikler i laveste énpartikkel-tilstand er gitt ved $N_0 = e^{\rho\Lambda^2} - 1$.

Bose-Einstein-kondensasjon oppstår når det kjemiske potensial blir lik energien til den laveste énpartikkel-tilstanden.

e) Ved hvilken temperatur T_E skjer dette for denne to-dimensjonale Bose-gassen?

Oppgave 4

Delspørsmålene i denne oppgaven har ikke nødvendigvis noen innbyrdes sammenheng.

a) Hva er en tilstandsfunksjon og en tilstandslikning i termodynamikken? Gi et eksempel på hver av disse.

b) Hva er intensive og ekstensive variable i termodynamikken, og gi eksempler på slike variable.

c) Beskriv kort en Carnot-syklus i et S-T diagram. Finn Carnot-effektiviteten η_C.

d) Med utgangspunkt i Helmholtz fri energi og den termodynamiske identitet, vis at

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V.$$

Universitetet i Oslo
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	**FYS 114 - Statistisk fysikk**
Dato:	Fredag 28. mai 1999
Tid for eksamen:	0900 - 1500
Oppgavesettet:	4 sider
Tillatte hjelpemidler:	Regnestav, godkjente elektroniske regnemaskiner. Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset. Rottman: "Mathematische formelsammlung". Øgrim :" Størrelser og enheter i fysikken". Oliver & Boyd: "Science Data Book".

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

a) Hva er en Carnot maskin?

En motor er basert på en strikk som medium. Strikken kan strekkes/slakkes eller varmes/kjøles. Entropien for strikken er gitt ved

$$S = A - Bx^2,$$

der x er forlengelsen av strikken, og A og B er positive konstanter. Kraften på omgivelsene er

$$K = -2BTx,$$

og maskinen opererer mellom temperaturene $T_L < T < T_H$ og mellom forlengelsene $x_L < x < x_H$. Maskinens prosesser regnes som reversible.

b) Tegn kretsløpet (syklusen) for maskinen i et K-x diagram. Identifiser fire punkter i kretsløpet som nummeres fra 1 til 4.

c) Tegn kretsløpet for maskinen i et S-T diagram med med samme nummerering som i oppgave 1b. Beskriv omløpsretningen for maskinen, og hvilke typer prosesser kretsløpet består av.

d) Finn det arbeid ΔW maskinen utfører på omgivelsene i ett kretsløp.

e) Finn den varme ΔQ maskinen utveksler med omgivelsene i ett kretsløp.

f) Finn maskinens virkningsgrad η .

g) Vi tenker oss strikkmotoren modifisert på to måter. Hvilke av disse motorene kan kalles en Carnot maskin? Gi en kort begrunnelse.

1. $S = A - Bx^2 + CT$ og $K = -2BTx$.
2. $S = A - Bx^2$ og $K = -2BTx + Cx^2$.

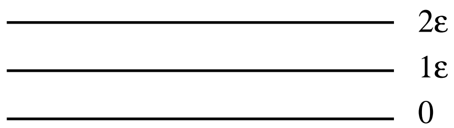
Oppgave 2

a) Vis med utgangspunkt i differesialet til Helmholtz fri energi F og den termodynamiske identitet at

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \text{ og at } E = -T^2\left(\frac{\partial\left(\frac{F}{T}\right)}{\partial T}\right).$$

Symbolene har sin vanlige betydning.

Vi betrakter et system hvor en partikkel kan være i ett av de tre ekvidistante energinivåene skissert under.



b) Finn partisjonsfunksjonen Z for partikkelen.

Vi kaller sannsynligheten for å finne partikkelen i nivået med energi $0, \varepsilon,$ og 2ε for henholdvis p_0, p_1 og p_2.

c) Finn p_0, p_1 og p_2 ved temperaturen $T = \varepsilon / k$. Hvilken nedre og øvre grenser kan p_0, p_1 og p_2 anta?

d) Finn det termiske middel av energien $\langle E \rangle$ som funksjon av T og ε.

e) Finn Helmholtz fri energi F for systemet.

f) Finn systemets entropi S.

g) Hvilke grenseverdier har energien $\langle E \rangle$ og entropien S når $kT \to 0$ og når $kT \to \infty$? Gi en tolkning av situasjonen i disse grenser.

Oppgave 3

Vi plasserer N spinnløse (spinn = 0) bosoner i et to-dimensjonalt harmonisk oscillator-potensial

$$V(x,y) = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2),$$

der ω er oscillatorfrekvensen. De kvantiserte energinivåene for en partikkel blir

$$\varepsilon_{i_x, i_y} = \hbar\omega(i_x + i_y),$$

der laveste energi er valgt lik null, og $i_x, i_y = 0, 1, 2, \ldots$ Vi antar videre at $kT >> \hbar\omega$, slik at alle summer over tilstander kan erstattes med integraler som for eksempel:

$$\sum_{n_x, n_y} f(\varepsilon, \mu, T) = \int d\varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon, \mu, T).$$

Her er det midlere besetningstallet for en tilstand med energi ε i et system av bosoner med kjemisk potensial μ og temperatur T gitt ved

$$f(\varepsilon, \mu, T) = \frac{1}{\exp[(\varepsilon - \mu)/kT] - 1} \quad ,$$

og $D(\varepsilon)$ er tilstandstettheten.

a) Vis at antall enpartikkel-tilstander med energi mindre enn ε er gitt ved

$$N(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2(\hbar\omega)^2},$$

og bestem tilstandstettheten $D(\varepsilon) \equiv dN(\varepsilon)/d\varepsilon$.

b) Vis at antall bosoner, ved lav temperatur, er gitt ved

$$N = N_0 + N_e,$$

der

$$N_0 = 1/(e^{-\mu/kT} - 1) \text{ og } N_e = \frac{1}{(\hbar\omega)^2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon}{\exp[(\varepsilon - \mu)/kT] - 1}.$$

c) Anta at $\mu/kT = 0$ i integralet for N_e. Vis at ved temperaturen $T_E = \frac{\hbar\omega}{\pi k}\sqrt{6N}$ har vi $N_e = N$.

Hint: Du kan få bruk for integralet $\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}$.

d) Vis at $\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_E}\right)^2$.

e) Skisser N_0/N og N_e/N som funksjon av T/T_E fra 0 til 1. Hva kalles det fenomenet som våre regninger er eksempel på?

Slike systemer blir realisert i laboratorier, der potensialet settes opp ved hjelp av magnetiske felter. For et typisk eksperimentelt oppsett er ω = 600 Hz, og man kan klare å ha typisk N = 10^6 atomer fanget i potensialet.

f) Regn ut T_E for det eksperimentelle oppsettet. Du bør bli imponert over hvor lave temperaturer man klarer å oppnå!

Oppgave 4

Delspørsmålene i denne oppgaven har ikke nødvendigvis noen innbyrdes sammenheng.

e) Nevn kort hva som karakteriserer termodynamisk likevekt.

f) Forklar kort hvorfor varmekapasiteten er mindre i en degenerert Fermi gass enn i en ideell gass.

c) Anta at en ideell gass plutselig ekspanderer og fyller et større volum. (Dette kalles gjerne ekspansjon inn i vakuum.) Diskuter hvor mye arbeid gassen utfører på omgivelsene, og gassens temperatur og entropi endring.

d) Vis at det termiske middel av energien i et stor kanonisk ensemble kan uttrykkes som $< E >= (\frac{\mu}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu} - \frac{\partial}{\partial\beta})\ln\Xi$. Forklar symbolene.

Universitetet i Oslo
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	**FYS 114 - Statistisk fysikk**
Dato:	Lørdag 4. desember 1999
Tid for eksamen:	0900 - 1500
Oppgavesettet:	6 sider
Tillatte hjelpemidler:	Regnestav, godkjente elektroniske regnemaskiner. Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset. Rottman: "Mathematische formelsammlung". Øgrim :" Størrelser og enheter i fysikken". Oliver & Boyd: "Science Data Book".

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Et isolert system (et mikrokanonisk ensemble) inneholder N uavhengige partikler. Hver partikkel kan enten være i et nedre eller i et øvre energinivå med energier henholdsvis $-\varepsilon_0$ og ε_0. Det er N_- partikler i nedre nivå og og N_+ partikler i øvre nivå, og overskuddet med partikler i øvre nivå er gitt ved $M = N_+ - N_-$.

a) Uttrykk N_- og N_+ og systemets totale energi E ved hjelp av N, M og ε_0.

b) Vis at multiplisiteten av en makrotilstand med gitt M og N kan skrives som

$$W_M = \frac{N!}{\left[\frac{1}{2}(N-M)\right]!\,\left[\frac{1}{2}(N+M)\right]!} \;.$$

c) Finn systemets entropi $S(M)$, og gjør rede for eventuelle tilnærmelser.

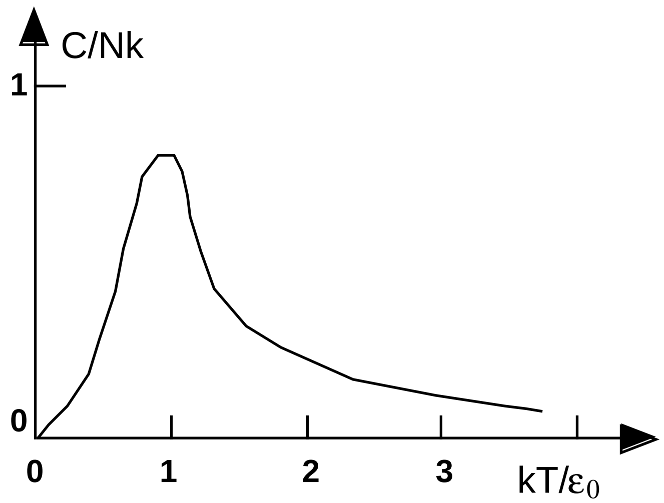
d) Vis at

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{2\varepsilon_0}\ln\frac{N-M}{N+M},$$

der symbolene har sin vanlige betydning.

e) Finn andel partikler i nedre og øvre nivå $(N_-/N$ og $N_+/N)$, som funksjon av temperaturen T. Hint: Det kan lønne seg å finne N_-/N_+ først.

f) Finn systemets energi E som funksjon av temperaturen T.



g) I figuren over er varmekapasiteten for vårt 2-nivå system vist. Diskutér forløpet av kurven C/Nk som funksjon av kT/ε_0.

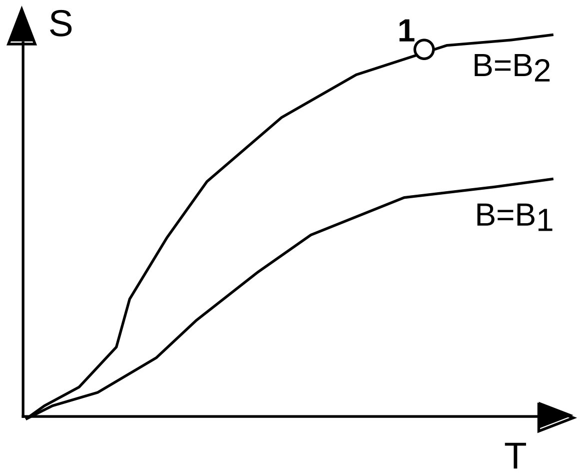
h) Vis en enkel og direkte måte å finne svaret i oppgave e) på, dersom vi antar at systemet er i termisk kontakt med et varmebad (et kanonisk ensemble)?

Oppgave 2

Vi vil studere kjøling ved adiabatisk (isentrop) avmagnetisering. Prosessen foregår ved at en plassérer et paramagnetisk materiale i termisk kontakt med et varmebad (et kanonisk ensemble). Prøven blir så magnetisert isotermt ved å sette på et ytre magnefelt. Dernest isoleres prøven fra omgivelsene, og magnetfeltet senkes langsomt (kvasistatisk) til 0.

Når prøven er magnetisert, er spinnene opplinjert, og entropien er liten. Hvis så feltet fjernes adiabatisk, er entropien konstant. Dette betyr at det tap man får i opplinjering på grunn av reduksjon i B, må oppveies ved at temperaturen T synker.

Figuren under (på neste side) viser entropien S som funksjon av temperatur T ved to forskjellige magnetfelt B. Sterkere magnetfelt svarer til lavere kurve.



a) Anta at prosessen foregår mellom B_1 og B_2, der $B_2 < B_1$. Tegn inn på figuren hvorledes systemet beveger seg, først ved isoterm magnetisering, og deretter ved isentrop avmagnetisering. Anta vi starter ved punktet 1 i figuren.

b) Vi regner at volumet er konstant og at entropien bare avhenger av temperatur og magnetfelt, dvs. $S = S(T,B)$. Skriv ned det totale differensialet av S.

c) Den termodynamiske identitet for systemet er $dE = TdS - MdB$, der M er magnetiseringen. Vis at vi har Maxwell relasjonen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_T = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B .$$

Hint: Bruk Helmholtz fri energi F som potensiale.

d) Vis at

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{C_B(T,B)}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_B ,$$

der $C_B(T,B)$ er varmekapasiteten ved konstant magnetfelt.

e) Vi har $M = V\chi B$, der $\chi = \chi(T,B)$ er suceptibiliteten og V er volumet. Med utgangspunkt i resultater fra oppgavene b), c) og d) vis at for den isentrope prosessen har vi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial B}\right)_S = -\frac{VTB}{C_B(T,B)}\left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_B .$$

f) Anta så at for et visst temperaturområde gjelder

$$\chi(T,B) = \frac{a}{T} \quad \text{og} \quad C_B(T,B) = \frac{V}{T^2}(b + aB^2),$$

der a og b er konstanter. Vis at dersom vi starter ved en temperatur T_1 og et magnetfelt B_1, og så reduserer feltet isentropisk til $B_2 < B_1$, så er slutt-temperaturen T_2 gitt ved

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{b + aB_2^2}{b + aB_1^2}}.$$

g) Det er ikke nødvendig å kjenne varmekapasiteten for $B \neq 0$, fordi denne kan finnes hvis $C_B(T,0)$ og $\chi(T,B)$ er kjent.
Vis at vi har

$$\left(\frac{\partial C_B}{\partial B}\right)_T = T\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_B\left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_T,$$

og at varmekapasiteten ved endelig magnetfelt er gitt ved

$$C_B(T,B) = C_B(T,0) + VT\int_0^B \left(\frac{\partial^2 \chi(T,B')}{\partial T^2}\right)_{B'} B' dB'.$$

h) Kontrollér at $\chi(T,B)$ og $C_B(T,B)$ i oppgave f) tilfredstiller uttrykket for $C_B(T,B)$ oppgitt på slutten av oppgave g).

Oppgave 3

Bruk følgende tall i oppgaven:
Hvilemasser for protoner, nøytroner og elektroner:

$m_p c^2 = 938.2723$ MeV

$m_n c^2 = 939.5656$ MeV

$m_e c^2 = 0.511$ MeV

Plancks konstant ganger lyshastigheten:

$\hbar c = 197.327\ \mathrm{MeV} \cdot \mathrm{fm}$, der $1\mathrm{fm} = 10^{-15}$m.

Du kan også få bruk for konverteringsfaktoren:

$1\frac{\mathrm{MeV}}{c^2} = 1.783 \cdot 10^{-30}$ kg.

a) Utled Fermi-Diracs fordelingsfunksjon

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}) + 1},$$

og forklar symbolenes betydning.

b) I grensen $T = 0$ får denne funksjonen en enkel form. Skriv ned denne. Skriv også ned og begrunn betingelsen for når vi kan sette $T \approx 0$ i beregninger, selv om $T > 0$.

I fortsettelsen ser vi hele tiden på fermioner med spinn S = 1/2 ved T = 0. Først ser vi på et system av N fermioner som beveger seg i en boks med volum $V = L^3$. En partikkel har da kvantiserte energier gitt ved

$$\varepsilon_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2),$$

der m er partikkelens masse og n_x, n_y og n_z er hele, positive tall.

c) Vis at tilstandstettheten er gitt ved

$$D(\varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\varepsilon^{1/2}.$$

d) Vis at Fermienergien ε_F for systemet er gitt ved

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3},$$

der $n = N/V$ er kosentrasjonen.

Ved høye tettheter må man regne relativistisk på gassen. Energien til en partikkel i boksen er da gitt ved

$$\varepsilon^2 = p^2c^2 + m^2c^4,$$

der bevegelsesmengden p har kvantiserte verdier gitt ved

$$p_{n_x,n_y,n_z} = \frac{\hbar\pi}{L}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right)^{1/2},$$

der n_x, n_y og n_z er hele, positive tall.

e) Vis at tilstandstettheten nå er gitt ved

$$D(\varepsilon) = \frac{V}{\pi^2}\frac{\varepsilon}{(\hbar c)^3}\left(\varepsilon^2 - m^2c^4\right)^{1/2}.$$

f) Vis at Fermienergien er gitt ved

$$\varepsilon_F = \sqrt{p_F^2c^2 + m^2c^4},$$

der $p_F = \hbar(3\pi^2 n)^{1/3}$ og $n = N/V$.

Hint: I utregningen bør du huske at $\varepsilon \geq mc^2$.

I en nøytronstjerne blir materien mer og mer nøytronrik ettersom tettheten øker. Dette skyldes at elektroner og protoner går over til nøytroner via reaksjonen

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e,$$

der ν_e er elektron-nøytrinoet. Vi skal i det følgende regne som om materien var ved T = 0, og vi skal anta at alle nøytrinoer forsvinner ut av stjerna (og ut av oppgaven !), slik at materien i stjerna til enhver tid er fri for nøytrinoer.

g) Forklar at betingelsene om kjemisk likevekt og at materien skal være ladningsnøytral gir likningene

$$\varepsilon_F^e + \varepsilon_F^p = \varepsilon_F^n \qquad (1)$$

$$n_e = n_p, \qquad (2)$$

der ε_F^e, ε_F^p og ε_F^n er fermienergien for henholdsvis elektroner, protoner og nøytroner, og n_e, n_p og n_n betegner de tilsvarende konsentrasjoner.

h) Anta at materien i utgangspunktet består av protoner og elektroner og at alle partiklene er relativistiske. Bestem ved hvilken massetetthet $\rho = m_p n_p + m_e n_e$ det første nøytronet blir dannet ved å sette $n_n = 0$ i likning (1) over. Du kan anta at at $p_F^p c$, der p_F^p er protonets fermi-bevegelsesmengde, kan neglisjeres i forhold til $m_p c^2$. Oppgi svaret i kg/m^3.

Universitetet i Oslo
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	**FYS 114 - Statistisk fysikk**
Dato:	Fredag 26. mai 2000
Tid for eksamen:	0900 - 1500
Oppgavesettet:	4 sider
Tillatte hjelpemidler:	Regnestav, godkjente elektroniske regnemaskiner. Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset. Rottman: "Mathematische formelsammlung". Øgrim :" Størrelser og enheter i fysikken". Oliver & Boyd: "Science Data Book".

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Vi studerer her en ideell H_2-gass med N molekyler i et temperaturområde rundt T = 500 K. Gassen følger tilstandslikningen $pV = NkT$.

a) Hvorfor har denne gassen varmekapasitet $C_V = \frac{5}{2}Nk$, som er Nk mer enn for en mono-atomisk gass ved samme temperatur? Gi en kort begrunnelse.

b) Finn uttrykket for energien E av gassen, og gi en kvalitativ begrunnelse for at energien til en ideel gass bare avhenger av temperaturen.

c) Vis at volumet V og temperaturen T er forbundet ved likningen

$$VT^{5/2} = \text{konstant}$$

for en isentropisk (adiabatisk) prosess.

Gassen gjennomløper et kretsløp (syklus) som består av en isoterm $(1 \to 2)$, en isentrop (adiabatisk) $(2 \to 3)$, en ny isoterm $(3 \to 4)$ og tilslutt en isokor prosess $(4 \to 1)$. Vi antar $V_2 = 2V_1$, $T_1 = T_0$ og $T_3 = \frac{1}{2}T_0$.

d) Tegn kretsløpet i et p-V diagram (p langs y-aksen og V langs x-aksen).

e) Finn volumet V_3 uttrykt ved V_1.

f) Finn arbeidet W utført av systemet på omgivelsene i delprosessene $(1 \to 2)$, $(2 \to 3)$ og $(3 \to 4)$ uttrykt ved N, k og T_0.

g) Finn tilført varmemengde ΔQ til systemet i delprosessene $(1 \to 2)$ og $(4 \to 1)$.

h) Hvilken vikningsgrad η har kretsløpet, og sammenlikn dette med Carnot virkningsgraden?

Oppgave 2

Helmholtz fri energi for en ideell gass er gitt ved $F = -kT \ln \frac{Z_1^N}{N!}$ der enkelt partikkel partisjonsfunksjonen er beskrevet ved $Z_1 = n_Q V$. De oppgitte symboler har sin vanlige betydning.

a) Vis at det kjemiske potensial (*m*) og den absolutte aktivitet (*l*) er gitt ved

$$\mu = kT \ln \frac{n}{n_Q} \quad \text{og}$$

$$\lambda = n / n_Q$$

Gjør rede for eventuelle definisjoner og tilnærmelser.

I det påfølgende skal vi anta at oksygen (O_2) molekyler oppfører seg som en ideell gass i en væske. I væsken finnes det myoglobin (Mb) molekyler som hver kan binde til seg maksimalt ett O_2 molekyl. Vi antar at O_2 molekylet har energi 0 når det ikke er bundet til Mb, og energi $-\varepsilon_0$ når det er bundet til Mb for å danne MbO_2.

b) Vis at Gibbs sum for O_2 blir

$$\Xi = 1 + \lambda \exp(\varepsilon_0 / kT).$$

Hint: O_2 er enten absorbert eller ikke absorbert på Mb.

c) Finn andelen f av Mb molekyler som har bundet til seg et O_2 molekyl når diffusiv likevekt er oppnådd.

d) Vis at denne andelen kan uttrykkes ved hjelp av partialtrykket p for O_2 som

$$f = \frac{p}{p_0 + p}$$

der $p_0 = n_Q kT \exp(-\varepsilon_0 / kT)$ og hvor vi antar ideell gass forhold.

e) Vi setter p_0 = 5 mmHg. Plott f som funksjon av p, fra 0 til 50 mmHg.

Oppgave 3

Delspørsmålene i denne oppgaven har ikke nødvendigvis noen innbyrdes sammenheng og kan besvares kort.

a) Hva er betingelsen for at en gass oppfører seg som en kvantegass, og nevn noen karakteristika for de to kvantegassene som er behandlet i kurset.

b) Tegn en skisse av båndgapet for en halvleder og påfør de vanlige betegnelser og symboler som karakteriserer en halvleder. Hva er en intrinsikk halvleder?

c) Hva er ekstensive og intensive variable? Nevn noen eksempler på slike variable.

d) Hvilke tre ensembler har vi gjennomgått i kurset? Hvilke termodynamiske størrelser er konstante (faste) i de tre ensemblene?

Oppgave 4

Det kan vises at de 3 koeffisientene:

$$\alpha - \text{ isobar termisk utvidelseskoeffisient}$$
$$\kappa - \text{ isoterm kompressibilitet}$$
$$\beta - \text{ trykk - koeffisient,}$$

inngår i følgende differensialer:

$$dV = -\kappa V dp + \alpha V dT$$
$$dp = -\frac{1}{\kappa V} dV + p\beta dT,$$

der vi har antatt h.h.v. $V = V(p,T)$ og $p = p(T,V)$.

a) Finn α, κ og β uttrykt v.h.a. størrelsene V, p og T.

b) Vis at $\alpha = \beta\kappa p$.

c) For en reversibel prosess gjelder følgende sammenheng mellom isobar og isokor varmekapasitet

$$C_p dT - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp = C_V dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV.$$

Ved å studere differensialet $dT(p,V)$, vis at

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V.$$

d) Vis at $C_p - C_V = \dfrac{\alpha^2}{\kappa} TV$.

e) Finn $C_p - C_V$ for en ideell gass.

f) Det viser seg at vann har samme isobar og isokor varmekapasitet ved $4\,^{\circ}$C, som er den temperaturen da vann har maksimal tetthet. Hvorfor er den isobare og den isokore varmekapasit like i dette tilfellet? Kan $C_p - C_V$ være negativ?

Universitetet i Oslo
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

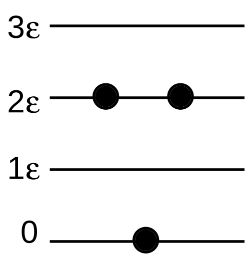
Eksamen i:	**FYS 114 - Statistisk fysikk**
Dato:	Mandag 4. desember 2000
Tid for eksamen:	0900 - 1500
Oppgavesettet:	4 sider
Tillatte hjelpemidler:	Elektronisk kalkulator, godkjent for videregående skole To A4-ark med egne notater (kan beskrives på begge sider) Rottman: Matematisk formelsamling Øgrim og Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

a) Hva karakteriserer et mikrokanonisk og et kanonisk system.

Vi antar et mikrokanonisk system med 3 identiske partikler med spin 0 som kan plasseres uavhengig av hverandre i 4 nivåer. I figuren under er det vist én av de 3 mulige mikrotilstander som gir totalenergi $E = 4\varepsilon$.



b) Tell opp multiplisiteten W for hver enkelt av makrotilstandene med totalenergi $E = 0,\ 1\varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon, \ldots\ 9\varepsilon$.

c) Gi en grafisk fremstilling av entropien $S(E)$ i enheter av Bolzmanns konstant k.

d) Estimér den statistiske temperaturen T i enheter av ε / k ved $E = 0,\ 2\varepsilon$ og 9ε.

Hint: Benytt verdier av entropien i nærheten av $E = 0,\ 2\varepsilon$ og 9ε.

a) Hvor mange partikler er det i gjennomsnitt i hver orbital når $E = 0,\ 2\varepsilon$ og 9ε ?

Vi bytter nå til et kanonisk system, men har fortsatt samme antall partikler og énpartikkel nivåskjema.

f) Benytt deg av svaret i oppgave b) og skriv opp partisjonsfunksjonen.

g) Hva blir gjennomsnittlig antall partikler i orbitalene ved grensetilfellene $T \to 0$ og $T \to \infty$?

h) Oppfører vårt system seg tilnærmet likt i mikrokanonisk og kanonisk ensemble? Hvordan bør systemene være bygd opp for at vi skal få tilnærmet samme resultater i de to ensemble teorier?

Oppgave 2

Delspørsmålene i denne oppgaven har ikke nødvendigvis noen innbyrdes sammenheng og kan besvares kort.

a) Hva særmerker fermioner og bosoner, og nevn noen eksempler.
Skissér fordelingsfunksjonen $f(\varepsilon)$ for de to tilfellene. Merk av på figuren hvor det klassiske området er lokalisert og skriv ned den forenklede form for $f(\varepsilon)$ i dette området.

b) Tegn en skisse av en halvleder og påfør symboler for kjemisk potensial (μ), båndgapsenergien (ε_g) og energier for valensbånd (ε_v) og ledningsbånd (ε_c). Nevn eksempler på halvledere og hvorledes man kan dope disse til å bli p- og n-type.

c) Med utgangspunkt i Gibbs fri energi $G = E - TS + pV$ og den termodynamiske identitet i et lukket system, vis at vi får Maxwell-relasjonen

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T .$$

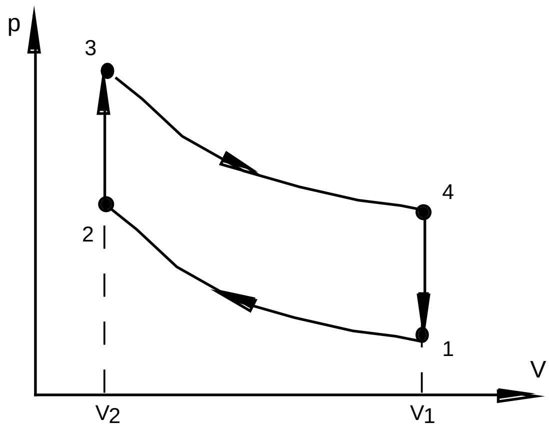
Oppgave 3

Helmholtz fri energi for en ideell monoatomisk gass kan skrives som $F = -kT\ln(Z_1^N / N!)$. Én-partikkel partisjonsfunksjonen er gitt som $Z_1 = n_Q V$, der kvantekonsentrasjonen er gitt ved $n_Q = (mkT / 2\pi\hbar^2)^{3/2}$. Symbolene har sin vanlige betydning.

a) Utled Sackur-Tetrode likningen $S = Nk[\ln(n_Q / n) + 5/2]$, og gjør rede for eventuelle tilnærminger.

b) Vis at $TV^{2/3} =$ konstant for en isentropisk (adiabatisk) prosess.

Virkemåten av en bensinmotor kan grovt beskrives som et såkalt Otto-kretsløp (syklus) for ideell gass. Gassen gjennomløper en isentropisk $(1 \rightarrow 2)$, en isokor $(2 \rightarrow 3)$, en ny isentropisk $(3 \rightarrow 4)$ og tilslutt en ny isokor prosess $(4 \rightarrow 1)$, som vist i pV – diagrammet under.



c) Finn tilført varmemengde ΔQ til systemet i delprosessene $(2 \rightarrow 3)$ og $(4 \rightarrow 1)$ uttrykt ved varmekapasiteten C_V for gassen og temperaturene T_1, T_2, T_3 og T_4 .

d) Finn det totale arbeidet W utført av systemet på omgivelsene i kretsløpet uttrykt ved C_V, T_1, T_2, T_3 og T_4.
Hint: Det er tilstrekkelig å bruke resultatene fra c).

e) Finn Otto kretsløpets effektivitet (virkningsgrad) η uttrykt ved T_1, T_2, T_3 og T_4.

f) Vis at η kan skrives som funksjon av kompresjonsgraden $r = V_1 / V_2$, og finn η for en maskin med kompresjon $r = 10$.

Oppgave 4

a) Vis at det termiske middel for antall partikler i et stor-kanonisk ensemble er

$$\langle N \rangle = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \Xi,$$

der $\lambda = \exp(\mu / kT)$. Definér størrelsene som inngår i uttrykkene.

Vi skal studere et stoff med N_0 lokaliserte adsorpsjonssentere (= et sted hvor et molekyl kan feste seg). Hvert senter kan enten *(i)* ikke ha adsorbert et molekyl eller *(ii)* ha adsorbert et molekyl. Molekylet kan befinne seg i en energitilstand ε_i med i =1,2,3,... når det er adsorbert (energien settes lik 0 ellers).

b) Vis at den stor-kanoniske partisjonsfunksjonen (Gibbs sum) kan skrives

$$\Xi = (1+\lambda a)^{N_0},$$

der

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-\varepsilon_i / kT)\,.$$

c) Finn midlere antall partikler $\langle N \rangle$ adsorbert til adsorpsjonssentrene.

d) Finn det kjemiske potensial μ for systemet uttrykt ved a, N_0 og $\langle N \rangle$.

e) Vis at partisjonsfunksjonen kan skrives på formen

$$\Xi = \sum_{N=0}^{N_0} C_N \lambda^N,$$

der C_N er uttrykt ved hjelp av a, N_0 og N.

f) Regn ut det kjemiske potensial ved relasjonen (som ikke skal vises)

$$\mu = -kT \frac{\partial}{\partial N} \ln C_N$$

for gitt antall partikler N, og sammenlikn med oppgave d).

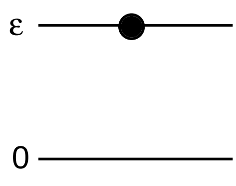
Universitetet i Oslo
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	**FYS 114 - Statistisk fysikk**
Dato:	Mandag 28. mai 2001
Tid for eksamen:	0900 - 1500
Oppgavesettet:	4 sider
Tillatte hjelpemidler:	Elektronisk kalkulator, godkjent for videregående skole To A4-ark med egne notater (kan beskrives på begge sider) Rottman: Matematisk formelsamling Øgrim og Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Vi antar at et system som står i termisk kontakt med et varmebad (kanonisk system). Systemet har én partikkel med spinn 0 som kan plasseres i ett av to nivåer. I figuren under er det vist et tilfelle der partikkelen er i øverste nivå.



a) Skriv ned partisjonsfunksjonen Z som funksjon av temperatur T.

b) Finn Helmholtz fri energi $F(T)$.

c) Finn systemets entropi $S(T)$.

d) Finn midlere energi $\langle E(T)\rangle$ på to forskjellige måter.

e) Diskuter kort S og $\langle E \rangle$ når $T \to \infty$. Hvordan går det med varmekapasiteten og den midlere besetning av nivåene når $T \to \infty$ (skal ikke regnes ut)?

Flere fysiske systemer (f.eks. atomkjernen) har et energigap mellom grunntilstanden og de neste nivåene. For å beskrive denne situasjonen bruker vi modellen over, men tillater flere tilstander ved energien ε. Antall tilstander ved ε kalles *W*.

f) Skriv ned den nye partisjonsfunksjonen. Gi også et forenklet uttrykk i tilfellet $W >> \exp(\varepsilon / kT)$, der *k* er Boltzmanns konstant.

g) Finn entropien i tilfellet $W >> \exp(\varepsilon / kT)$.

Anta at det er målt $S = 4.7k$ ved temperaturen $T = \dfrac{\varepsilon}{k}$.

h) Hvor mange tilstander *W* har systemet ved energi ε i følge vår enkle modell? Sjekk om betingelsen $W >> \exp(\varepsilon / kT)$ er oppfylt.

Oppgave 2

Delspørsmålene i denne oppgaven har ikke nødvendigvis noen innbyrdes sammenheng og kan besvares kort.

a) Hvilke tre betingelser må være oppfylt for at en gass og en væske skal være i termodynamisk likevekt?

b) Tegn en skisse av en halvleder. Forklar hva en donor og akseptor er, og hvor ligger akseptor og donor nivåene? Hva er en p- og n-type halvleder?

c) Hva særmerker fermioner og bosoner, og nevn noen eksempler på slike partikler.

d) Utled Fermi-Diracs fordelingsfunksjon, og tegn en skisse av funksjonen for tilfellene $T = 0$ og $T > 0$.

Oppgave 3

Vi har en fotongass som er innestengt i et hulrom med volum *V* og med vegger med temperatur *T*. Helmholtz fri energi for fotongassen kan skrives som $F = -\dfrac{a}{3} V T^4$, der *a* er en konstant.

a) Finn entropien og trykket av fotongassen.

b) Finn en sammenheng mellom p, V og E, og hva kalles en slik likning?

c) Hva er gassens kjemiske potensial, og hvordan tolker du dette?

d) Hva mener vi med en adiabatisk prosess? Vis at adiabatlikningen for fotongassen kan skrives som $pV^{4/3} = \text{ konstant}$.

Fotongassen brukes som medium i en reversibel varmemaskin. Et kretsløp (syklus) består av 3 prosesser:

$1 \rightarrow 2$: Isobar kompresjon
$2 \rightarrow 3$: Isokor trykkøkning
$3 \rightarrow 1$: Adiabatisk ekspansjon.

e) Tegn syklusen i et pV-diagram slik at maskinen gjør et positivt arbeid på omgivelsene. Tegningen skal være skjematisk, men formen på linjene skal være riktige (rette eller buede).

f) Tegn syklusen i et S-T diagram.

Oppgave 4

Vi skal studere en enkel modell av en gummistrikk. Den termodynamiske identitet for systemet er gitt ved (reversibel prosess):

$$TdS = dE - KdL,$$

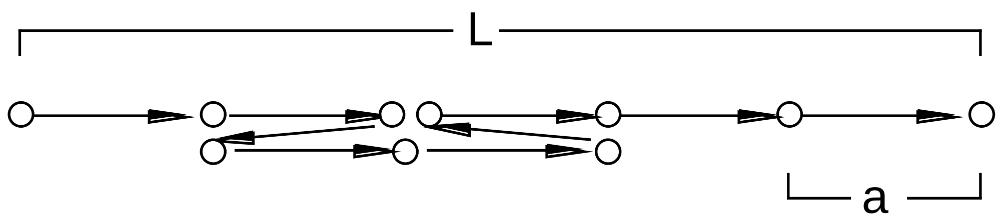
der K er den eksterne kraften og dL er forlengelsen av strikken. Vi antar videre at den indre energi E er uavhengig av L.

a) Vis at kraften på strikken kan skrives som:

$$K = \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_T = -T\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T,$$

hvor F er Helmholtz fri energi.

Vi antar at strikken er satt sammen av små ledd med lengde a. Hvert ledd peker med lik sannsynlighet enten mot høyere (+) eller mot venstre (-). Antall ledd som peker mot høyere kalles n_+, og de som peker mot venstre kalles n_-. Totalt har vi $n = n_+ + n_-$ ledd. I figuren under er det totalt 9 ledd, hvor henholdsvis 7 og 2 peker i motsatte retninger.



b) Uttrykk n_+ og n_- ved hjelp av n, a og strikkens lengde L.

c) Skriv opp antall måter W (multiplisitet) de n leddene kan organiseres på (+ eller – retning) for en gitt lengde L på strikken (og dermed også for gitt n_+ og n_-). Uttrykket skal beskrives ved størrelsene n, n_+ og n_-.

Vi antar at strikken består av et meget stort antall ledd, slik at alle størrelser er kontinuerlige og at Stirlings tilnærming kan brukes.

d) Finn entropien S uttrykt ved n, a, L og Boltzmanns konstant k. Det endelige uttrykket skal ikke inneholde fakulteter (f.eks. $n!$).

e) Finn kraften K uttrykt ved T, n, a, L og k.

f) Sjekk om K har fornuftig oppførsel i grensetilfellene $L << na$ og $L = na$.

Hint: Du kan få bruk for tilnærmingen $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ for $|x| << 1$.

Universitetet i Oslo

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	**FYS 114 - Statistisk fysikk**
Dato:	Tirsdag 18. desember 2001
Tid for eksamen:	0900 - 1500
Oppgavesettet:	4 sider
Tillatte hjelpemidler:	Elektronisk kalkulator, godkjent for videregående skole
	To A4-ark med egne notater (kan beskrives på begge sider)
	Rottman: Matematisk formelsamling
	Øgrim og Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Energien til en partikkel med masse M i en boks med volum $V = L^3$ kan skrives som

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right),$$

der n_x, n_y og n_z er hele, positive tall. Anta at systemet står i termisk kontakt med et varmebad med en temperatur slik at $kT >> \frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$.

a) Vis at én-partikkel partisjonsfunksjonen kan skrives som

$Z_1 = n_Q V$, hvor $n_Q = \left(\frac{MkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$ er kvantekonsentrasjonen.

Hint: Omskriv partisjonssummen til et trippelintegral og bruk at

$\int_0^\infty \exp(-u^2)du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

b) Skriv ned partisjonsfunksjonen og Helmholtz fri energi for en ideell gass med N identiske partikler.

c) Vis at det indre kjemiske potensial kan uttrykkes ved

$$\mu_{\text{int}} = kT\ln\left(\frac{n}{n_Q}\right), \text{ der } n = \frac{N}{V}.$$

Gjør rede for eventuelle tilnærmelser.

Vi antar at en ideell gass av partikler med spinn opp $(\uparrow)$ eller ned $(\downarrow)$ er plassert i et ytre magnetfelt *B*. Vi betrakter partiklene med spinn opp og ned som to typer partikler som skal være i termisk og diffusiv likevekt. De har ytre kjemisk potensial gitt ved henholdsvis $\mu_{ext}(\uparrow) = -mB$ og $\mu_{ext}(\downarrow) = mB$, der *m* er partiklenes magnetiske dipolmoment.

d) Skriv ned betingelsen for diffusiv likevekt for dette systemet.

e) Finn det relative forhold $n_\uparrow / n_\downarrow$ mellom konsentrasjonen av antall partikler med spinn opp og ned.

f) Oppgaven over kan sees på som en kjemisk likevektsreaksjon der $n_\uparrow \leftrightarrow n_\downarrow$. Finn også forholdet $n_\uparrow / n_\downarrow$ ved hjelp av massevirkningsloven $\prod_j n_j^{\nu_j} = K(T)$.

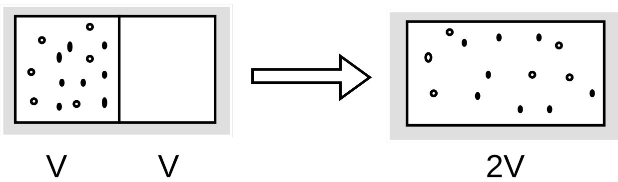
Oppgave 2

Delspørsmålene i denne oppgaven har ikke nødvendigvis noen innbyrdes sammenheng.

En legering består av to typer atomer A og B med blandingsforhold $x = N_B / (N_A + N_B)$.

a) Tegn Helmholtz fri energi per atom *f(x)* i tilfellet legeringen har et løslighetsgap. Merk av på figuren hvor vi har homogen og heterogen blanding.

En ideell gass med *N* partikler som er avgrenset i et volum *V*, ekspanderer plutselig inn i et vakuumkammer med volum *V*, slik at gassen totalt fyller et volum på *2V* etter ekspansjonen, se Figur 1.



Figur 1: Ekspansjon inn i vakuum

b) Diskutér hvor mye arbeid gassen utfører på omgivelsene og temperatur- og entropiforandringen under ekspansjonen. Gi en kort begrunnelse for om du vil få samme resultat med en reell gass?

Oppgave 3

a) Hva særmerker fermioner og bosoner, og nevn noen eksempler på disse.

En kvantegass av fermioner står i diffusiv og termisk kontakt med et reservoar av fermioner. La det eksistere en én-partikkel kvantetilstand (orbital) med energi ε .

b) Sett opp Gibb's sum for denne kvantetilstanden, og gjør rede for symboler/størrelser som du bruker.

c) Vis at det midlere antall fermioner i tilstanden kan skrives som

$$\langle N\rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right)+1}.$$

d) Vis at $\langle N^2\rangle = \langle N\rangle$.

e) Vis at standardavviket for midlere antall fermioner i tilstanden er

$$\sigma_N = \sqrt{\langle N\rangle(1-\langle N\rangle)}.$$

For bosoner har vi (skal ikke utledes): $\sigma_N = \sqrt{\langle N\rangle(1+\langle N\rangle)}$, der $\langle N\rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{kT}\right)-1}$.

f) Diskutér partikkelfluktuasjonene for fermioner og bosoner i områdene

I $kT << \mu-\varepsilon$

II $kT << \varepsilon-\mu$

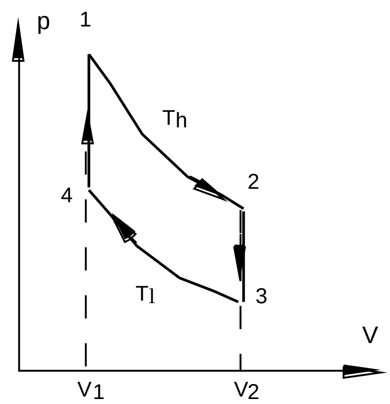
III $\varepsilon \approx \mu+\Delta\varepsilon$, og $kT \approx 10\Delta\varepsilon$,

der $\Delta\varepsilon$ er typisk energiavstand mellom orbitalene.

g) Finn den relative fluktuasjonen $r = \frac{\sigma_N}{\langle N\rangle}$ uttrykt ved ε, μ og kT for fermioner og bosoner og kommentér r i det klassiske området.

Oppgave 4

En monoatomisk ideell gass med N atomer brukes som medium i en Stirling maskin. Denne varmemaskinen har 4 prosesser som vist i Figur 2, og arbeider mellom volumene V_1 og V_2 og temperaturene T_l og T_h. Syklusen består av en isoterm prosess ved høy temperatur $(1 \rightarrow 2)$, en isokor prosess ved stort volum $(2 \rightarrow 3)$, en isoterm prosess ved lav temperatur $(3 \rightarrow 4)$ og tilslutt en isokor prosess ved lite volum $(4 \rightarrow 1)$. Vi antar at prosessene er reversible.



Figur 2: Stirlings varmemaskin.

a) Vis at arbeidet som gassen utfører på omgivelsene fra 1 til 2 er

$$W_{12} = NkT_h \ln \frac{V_2}{V_1}$$

og at tilført varme blir $Q_{12} = W_{12}$. Bryter det med noen fysisk lov at all varme går over til arbeid?

b) Finn de tilsvarende *W* og *Q*'er i de 3 andre prosessene, og sjekk at indre energi *E* er en tilstandsvariabel.

c) Vis at $\frac{Q_{12}}{Q_{34}} = -\frac{T_h}{T_l}$ og finn virkningsgraden η for varmemaskinen.

d) Anta at Stirlings varmemaskin er ombygd til en kjølemaskin. Hvordan ville Figur 2 sett ut i dette tilfellet? Finn kjøleytelsesfaktoren γ.

I de siste oppgavene kan du få brukt for Sackur-Tetrode likningen

$$S = Nk\left[\ln\left(\frac{n_Q}{n}\right) + \frac{5}{2}\right], \text{ der } n_Q = \left(\frac{MkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}.$$

e) Omgjør *p-V* diagrammet for Stirlings varmemaskin i Figur 2 til et *S-T* diagram slik at de samme prosessene er inkludert. Tegningen skal være skjematisk, men formen på linjene skal være riktige (rette eller buede).

f) Gjør rede for at arbeidet som varmemaskinen utfører på omgivelsene gjennom en syklus, er gitt ved

$$W = -\oint S dT.$$

g) Beregn arbeidet *W* ved hjelp av *S-T* diagrammet og sammenlikn med summen av de *W*'er du fant i oppgavene a) og b).

Universitetet i Oslo

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	**FYS 114 - Statistisk fysikk**
Dato:	Mandag 6. mai 2002
Tid for eksamen:	0900 - 1500
Oppgavesettet:	4 sider
Tillatte hjelpemidler:	Elektronisk kalkulator, godkjent for videregående skole To A4-ark med egne notater (kan beskrives på begge sider) Rottman: Matematisk formelsamling Øgrim og Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Én-partikkel partisjonsfunksjonen for spinnløse partikler i en boks med volum V kan skrives som $Z_1 = n_Q V$, hvor $n_Q = \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$ er kvantekonsentrasjonen.

a) Skriv ned partisjonsfunksjonen og Helmholtz fri energi for en ideell gass med N identiske partikler.

b) Finn tilstandslikningen for ideell gass og bestem trykket p ved temperatur T =0. Gjør rede for eventuelle tilnærmelser i utregningen.

En kvantegass av fermioner står i diffusiv og termisk kontakt med et reservoar av fermioner. La det eksistere en én-partikkel kvantetilstand (orbital) med energi ε.

c) Sett opp Gibb's sum for systemet, og gjør rede for symboler/størrelser som du bruker.

d) Finn Fermi-Diracs fordelingsfunksjon

$$f(\varepsilon) = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) + 1\right]^{-1},$$

og lag en skisse av denne for T = 0 og T > 0.

Vi vil i resten av oppgaven studere en elektrongass (fermiongass) med volum V ved temperaturen $T = 0$. Tilstandstettheten er gitt ved $D(\varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\varepsilon^{1/2}$, der m er elektronmassen. Videre definerer vi Fermi-nivået ved $\varepsilon_F = \mu(T = 0)$.

e) Finn antall elektroner N i gassen uttrykt ved ε_F , m og V.

f) Finn gassens midlere energi E uttrykt ved ε_F , m og V , og vis at $E = \frac{3}{5}N\varepsilon_F$.

g) Fra oppgave e) og f) får vi at $\frac{E}{V} = \frac{\hbar^2}{10\pi^2 m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{5/3}$ (skal ikke vises!). Sett opp Helmholtz fri energi ved $T = 0$ og finn gassens trykk p uttrykt ved m, N og V.

h) Kommentér forskjellen i trykk for ideell gass og fermiongass ved $T = 0$.

Oppgave 2

Delspørsmålene i denne oppgaven har ikke nødvendigvis noen innbyrdes sammenheng.

a) Hva karakteriserer en ren halvleder? Forklar hva en donor og akseptor er, og gi et eksempel på slike. Skriv ned den enkle likningen som beskriver massevirkningsloven for halvledere og hva kalles de konsentrasjoner som inngår i uttrykket.

b) Hvilke likevektsbetingelser eksisterer for at to system kan være i termisk, diffusiv og mekanisk kontakt. Tegn opp isotermer i et pV diagram, som viser de forskjellige faser som et gass/væske system har. Hva skjer ved den kritiske temperatur T_C og hva kalles fasen for $T > T_C$.

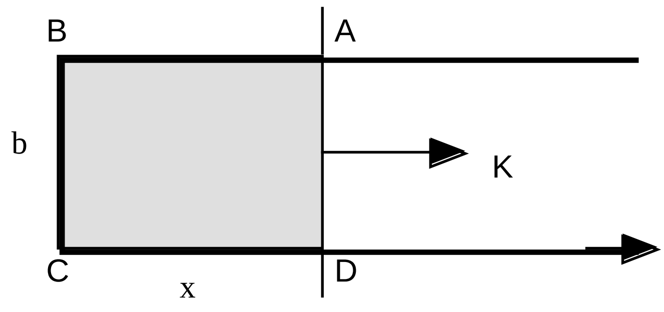
c) Nevn minst 4 måter man kan øke entropien i et system på (bruk gjerne tegninger til å illustrere).

d) Skriv opp varmekapasiteten C_V for en ideell monoatomisk gass, og hvorfor er tilsvarende varmekapasitet for elektroner i metaller mye lavere (kort forklaring)?

e) Tegn varmekapasiteten for en krystall som funksjon av temperatur i henhold til Debye-teorien. Kommentér kurven for lav og høy temperatur.

Oppgave 3

En film av såpe er utspent av rektangelet ABCD som vist i figur 1. Stangen AD kan bevege seg parallelt med BC. Arealet av filmen er $2bx$, der b er bredden og x er lengden (2-tallet skyldes at såpefilmer har 2 "overflater"). Det virker en konstant kraft $K = 2\sigma b$ langs x-aksen for å holde såpefilmen utstrukket, der σ er overflatespenningen til filmen. Vi antar at prosessen er kvasistasjonær og at systemet står i kontakt med et varmebad med temperatur T.



Figur 1.

a) Anta at systemets energi avhenger av entropien S og lengden x, altså $E = E(S,x)$. Skriv opp differensialet av E, og vis generelt at

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_x \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T + \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_S$$

b) Skriv ned arbeidet dW som filmen utøver på omgivelsene når stangen AD beveger seg fra x til $x + dx$ ved konstant temperatur, og sett opp termodynamikkens annen hovedsetning for systemet.

c) Sammenlikn det generelle differensialet av $E = E(S,x)$ i oppgave a) med resultatet i oppgave b) for dermed å kunne identifisere likhetene

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_x = T \quad \text{og} \quad \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_S = 2\sigma b.$$

d) Vis Maxwellrelasjonen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T = -2b\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_x.$$

Hint: Det kan lønne seg og bruke Helmholtz fri energi som potensial.

e) Vis at

$$dE = -2bT\left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)_x dx + 2b\sigma dx\ ,$$

ved konstant temperatur.

f) Vis at varmekapasiteten ved konstant utstrekning x er gitt ved $C_x = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_x$.

Vi antar i det påfølgende at overflatespenningen er gitt ved $\sigma = \sigma_0[1 - a(T - T_0)]$, der a, σ_0 og T_0 er konstanter.

g) Vis at C_x er uavhengig av x ved konstant temperatur T.

h) Vis at

$$TdS = C_x dT + 2a\sigma_0 Tbdx$$

i) Anta at systemet isoleres og at utvidelsen skjer adiabatisk. Finn temperaturen T som funksjon av x uttrykt ved hjelp av C_x, a, σ_0, og b og ved kjennskap om at $T(x = x_0) = T_0$.