

FYS

114

**Eksamens-
oppgaver**



1985 - 1995

Et kompendium fra
UNIPUB

Henvendelser angående dette
kompendiet kan rettes til:

Akademika AS
UNIPUB
Postboks 84 Blindern
0314 OSLO

Omslag ved
Enzo Finger design/
Alv Reidar Dale

Fotokopiert ved Reprosentralen
Blindern, Universitetet i Oslo

Tekstene i dette kompendiet er kopiert
etter tillatelse fra opphavsretthavere og
copyrightholdere. Respekter
opphavsretten ved å unngå ulovlig
kopiering.

UNIVERSITETET I OSLO.

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet.

Eksamen i FYS 104 - Termodynamikk og statistisk fysikk.

Eksamensdag: Onsdag 12. juni 1985.

Tid for eksamen: 0900-1500.

Oppgavesettet er på 8 sider.

Tillatte hjelpemidler: Regnestav. Godkjente elektroniske regnemaskiner.

Clark: Physical and Mathematical Tables.

Matematiske og fysiske tabeller for gymnasen.

Rottmann: Mathematische Formelsammlung.

Oppgave 1

Vi betrakter gassfasen og væskefasen for én type molekyler, og forsøker å beskrive begge faser ut fra én-partikkel partisjonsfunksjoner.

En-partikkel partisjonsfunksjonen Z er av formen

$$Z = \xi(T) \int_V e^{-\beta U(\vec{r})} dV, \quad \beta = \frac{1}{kT},$$

med et potensial $U(\vec{r})$ i volumet V . $\xi(T)$ er karakteristisk for molekylet og avhenger bare av temperaturen.

I gassen kan vi regne $U(\vec{r}) = 0$.

For væsken tar vi hensyn til kohesjonskreftene mellom molekylene med et potensial

$$U(\vec{r}) = -\eta = \text{konstant}$$

i partisjonsfunksjonen. Vi regner med et konstant volum v_0 per molekyl i væskefasen. Væskemodellen er altså en "gass" av N molekyler innenfor en potensial-brønn med volum Nv_0 og potensial $-\eta$.

fortsettes side 2

Ek. 104. V85. side 1

Helmholtz fri energi F er generelt knyttet til partisjonsfunksjonen Z ved relasjonen

$$F = -kT \ln \left(\frac{Z^N}{N!} \right)$$

- Hva blir gassens partisjonsfunksjon?
Hva blir væskens partisjonsfunksjon?
- Hvis vi ser bort fra molekylrotasjoner og indre vibrasjoner og regner molekylene som punktmasser m , hva blir faktoren $\xi(T)$ i Z ?
- Finn uttrykket for Gibbs fri energi $G(N,p,T)$ for henholdsvis gassfasen og væskefasen. Vi bruker Stirlings formel $\ln N! = N(\ln N - 1)$. For væskefasen skal trykket p i pV -leddet i G forstås som det ytre trykk væsken er under.
- Finn de kjemiske potensialer for de to fasene, og vis at modellen gir at væsken har et damptrykk bestemt av

$$p_d = \frac{kT}{ev_o} \cdot e^{-\beta\eta} \cdot e^{+\beta v_o p_d}$$

Vi kan anta at $v_o p_d \ll kT$ slik at dette reduserer seg til

$$p_d = \frac{kT}{ev_o} e^{-\beta\eta}$$

Vis at den molære entropiforskjell mellom væskens damp og væsken blir

$$s_g - s_v = \frac{N_A \eta}{T} + R, \quad N_A = \text{Avogadros tall.}$$

når vi fortsatt regner $p_d v_o \ll kT$.

Hva blir fordampningsvarmen L per mol i samme tilnærming?

- Vis at modellen, under tilnærmelsen $p_d v_o \ll kT$, gir at forholdet mellom fordampningsvarmen L og RT er bestemt av forholdet mellom de molære volum for gass, v_g , og væske, $N_A v_o$, ved trykk p_d ,

$$\frac{L}{RT} = \ln \left(\frac{v_g}{N_A v_o} \right)$$

fortsettes side 3

- f) Vi vil undersøke hvordan denne relasjonen stemmer for vann ved kokepunktet 100°C ved trykk 1 atm.

Fordampningsvarmen ved koking av vann er målt til

$$L = 40.55 \text{ KJ/mol.}$$

Hva blir forholdet

$$L/RT \text{ for vann ved kokepunktet ?}$$

Tettheten til vann ved 100°C og 1 atm. er 958 kg/m^3 . Molekylvekten til vann er 18.01. Vanndampen er en ideell gass. Hva blir

$$\ln \left(\frac{v}{N_A v_0} \right)$$

ved kokepunktet ? Antyd mulige forandringer av modellen som vil gi bedre overensstemmelse med målingene.

Oppgave 2

Vi betrakter en tynn løsning som vi antar eksakt er beskrevet med Gibbs fri energi funksjonen

$$G = N_1 \mu_1^0(p, T) + N_2 \tilde{\mu}_2^0(p, T) + kTN_2 \left(\ln \left(\frac{N_2}{N_1} \right) - 1 \right)$$

p er totalt trykk i oppløsningen.

- a) Hva er tolkningen av μ_1^0 ?

Det totale differensialet dG for en binær blanding er

$$dG = Vdp - SdT + \mu_1 dN_1 + \mu_2 dN_2$$

- b) Vis at entalpien $H = E + pV$ er gitt ved formelen

$$H = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{G}{T} \right)_{p, N_1, N_2}$$

- c) Utled uttrykkene for μ_1 og μ_2 for den tyne løsning, ut fra den oppgitte G .

d) Vis at for den tynne løsning kan entalpien H skrives på formen

$$H = N_1 h_1^{\circ}(p, T) + N_2 \tilde{h}_2^{\circ}(p, T),$$

det totale volum V som

$$V = N_1 v_1^{\circ}(p, T) + N_2 \tilde{v}_2^{\circ}(p, T)$$

og entropien S som

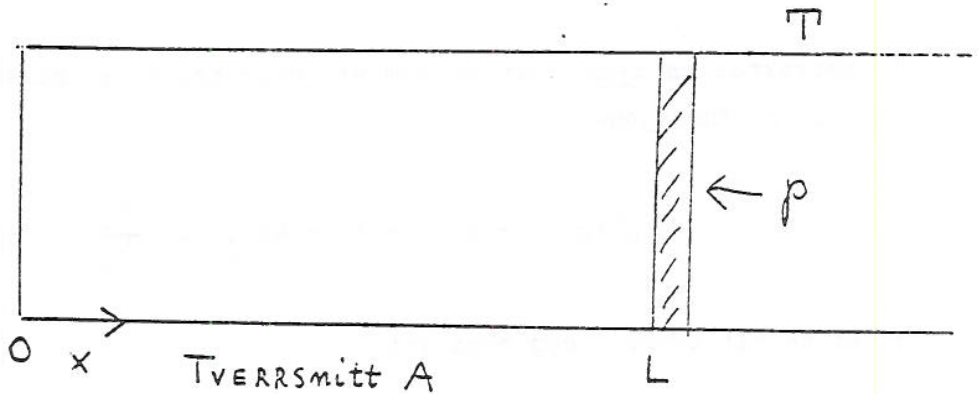
$$S = N_1 s_1^{\circ}(p, T) + N_2 \tilde{s}_2^{\circ}(p, T) - kN_2 \left(2n \frac{N_2}{N_1} - 1 \right)$$

Anta nå at vi har en ujevn konsentrasjon

$C(x)$,

$$dN_2 = C(x)Adx$$

i løsningen, men at trykket p og temperaturen T er konstant.



Vi antar at alle de foregående uttrykk gjelder lokalt, som funksjonen av x .

e) Vis at

$$dN_1 = \frac{(1-C(x)\tilde{v}_2^{\circ})}{v_1^{\circ}} Adx$$

La den ujevne konsentrasjonen ved tiden $t = 0$ være

$$C(x) = C_0 + C_1 \cos \left(2\pi \frac{x}{L} \right)$$

Det videre forløp blir bestemt av Fick's 2.lov

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}, \text{ der}$$

D er diffusjonskoeffisienten, og konsentrasjonsfluktuasjonen dør ut som

$$C_1(t) = C_1(0)e^{-t/T}$$

- f) Finn relaksasjonstiden \overline{t} . Vi regner at systemets lengde holder seg konstant under prosessen.

Vi sammenlikner nå begynnelsestilstanden ved tiden $t = 0$ og slutt-tilstanden der det oppløste stoff er jevnt fordelt. Vi antar at relaksasjonen foregår så langsomt at trykk p og temperaturen T hele tiden er lik omgivelsenes trykk og temperatur.

- g) Er det eksakt riktig, med den antatte G , at volumet ikke forandrer seg, $\Delta V = 0$?

Begrunn svaret. Forandrer entalpien H seg ?

- h) Under tilnærmelsen

$$\frac{dN_2}{dN_1} \cong C(x)v_1^0, \quad C_1 \ll C_0,$$

vis at en entropiøkning

$$\Delta S = kC_1^2(0)V/4C_0$$

finner sted i systemet.

- i) Blir det avgitt noen netto varmemengde ΔQ fra omgivelsene til løsningen under relaksasjonen ? Svaret skal begrunnes.

Eks. FYS 104 - V 85 side 5

fortsettes side 6

Oppgave 3

Vi betrakter Bernoulliprosessen, myntkast med sannsynligheten p for kron og sannsynligheten q for mynt.

- a) Vis at sannsynligheten for K kron i løpet av N kast er

$$P_N(K) = \binom{N}{K} p^K q^{N-K}, \text{ der } \binom{N}{K} = \frac{N!}{K!(N-K)!}$$

- b) Vis at
- $$\bar{K} = pN$$

og

$$\overline{(K-\bar{K})^2} = Npq, \quad q = 1-p.$$

Vi anvender nå Bernoulli-teorien på hopp langs en rett linje. Hoppavstanden er a . Sannsynligheten for hopp til høyre er p , for hopp til venstre q .



Hoppfrekvensen er v , slik at i løpet av en tid t utføres det $N = vt$ hopp. Vi tenker oss $p > q$ slik at det blir netto bevegelse til høyre.

- c) Vis at partikler som starter i $x = 0$ ved tiden $t = 0$ etter en tid t vil ha en midlere posisjon

$$\overline{x(t)} = avt(2p-1)$$

og at

$$\overline{(\Delta x(t))^2} = \overline{(x(t) - \overline{x(t)})^2} = 4a^2 vtp(1-p)$$

- d) Observasjoner av $\overline{x(t)}$ og $\overline{(\Delta x(t))^2}$ kan benyttes til bestemmelse av v og p . I et eksperiment er $a = 3 \cdot 10^{-10}$ m, og eksperimentelle observasjoner gir $\bar{x} = 10^{-4}$ m og $\overline{(\Delta x)^2} = 10^{-10}$ m² etter en tid $t = 10^4$ s. Hva blir v og p ?

e) (Vanskelig, ta til slutt hvis tid. Spørsmål f) kan besvares ut fra det som er oppgitt under e)).

Anta nå at hoppfrekvensen ikke er helt jevn, men at det midlere antall hopp etter en tid t , $\bar{N}(t)$, er gitt som

$$\bar{N}(t) = vt$$

og at der er en fordeling i $N(t)$ som gir

$$\overline{(N(t) - \bar{N}(t))^2} = v\beta t, \quad \beta > 0.$$

Forøvrig lar vi modellen være uforandret.

Vis at i dette tilfellet får vi

$$\overline{x(t)} = avt(2p - 1), \quad \text{som før,}$$

men at nå

$$\overline{(x(t) - \bar{x}(t))^2} = 4vta^2(pq + \frac{1}{4}\beta(p - q)^2)$$

(Hint: Tenk dere et stort antall M forsøk med fast tid t . Sannsynligheten for at et forsøk gir N hopp, kaller vi $S_t(N)$. Sannsynligheten for at N hopp bringer oss til x kaller vi $P_N(x)$. Den \bar{x} det spørres om, er således

$$\bar{x} = \sum_{x,N} x P_N(x) S_t(N) M/M$$

eller

$$\bar{x} = \sum_{x,N} x P_N(x) S_t(N)$$

$\bar{N}(t)$ kan skrives som

$$\bar{N}(t) = \sum_N N S_t(N)$$

etc. Dette er ment som en hjelp til å formulere en utledning. Du må gjerne lage en alternativ formulering.

- f) Hvis vi behandler observasjoner som under d), under antagelsen $\beta = 0$, mens i virkeligheten $\beta \neq 0$, blir da de bestemte frekvenser ν for store eller for små ?

Blir de bestemte p 'er for store eller for små ?

UNIVERSITETET I OSLO.

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet.

Eksamen i FYS 104 - Termodynamikk og statistisk fysikk.

Eksamensdag: Mandag 25. november 1985.

Tid for eksamen: Kl. 0900-1500.

Oppgavesettet er på 5 sider.

Tillatte hjelpemidler: Regnestav. Godkjente elektroniske regnemaskiner.
Clark: Physical and Mathematical Tables.
Matematiske og fysiske tabeller for gymnasen.
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken.
Rottmann: Mathematische Formelsammlung.

Oppgave 1

For et énkomponent system gjelder generelt

$$TdS = dE + pdV - \mu dN$$

- Definer Helmholtz fri energi F og Gibbs fri energi G og utled differensialene dF og dG .
- Vis fra a) hvordan det kjemiske potensial kan uttrykkes som deriverte av F eller G .
Begrunn uttrykket $G = \mu N$.
- Vis at temperaturendringer dT og trykkendringer dp fører til forandringer i det kjemiske potensial

$$d\mu = -s dT + v dp$$

der s er entropi per partikkel og v er volum per partikkel.

Betrakt en fast fase (1) og en væskefase (2) av samme stoff i likevekt med hverandre. Likevektstemperaturen T vil anhenge av trykket p , $T = T(p)$.

2) Bevis Clausius-Clapeyrons likning

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T (v_2 - v_1)}{q}$$

der q er smeltevarme per molekyl og v_2 og v_1 er volum per molekyl henholdsvis i væskefase (2) og fast fase (1).

Betrakt nå spesielt vann-is systemet. Når $p = 1 \text{ atm.} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ er likevektstemperaturen $T_0 = 273.15 \text{ K}$, tettheten til is 920 kg/m^3 og tettheten til vann 1000 kg/m^3 . Smeltevarmen er $334 \times 10^3 \text{ J/kg}$. Vi regner at smeltevarmen er temperaturuavhengig. Vi regner at tettheten til is og tettheten til vann ved konstant trykk er temperaturuavhengig. Vi regner at is og vann har samme kompressibilitet $4.2 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$. Kompressibiliteten regner vi som konstant, uavhengig av trykk og temperatur.

Vi har en solid lukket beholder fylt med vann med 1 atm. trykk ved $T_0 = 273.15 \text{ K}$.

Vi regner at beholderens volum er konstant.

- e) Vis at når systemet avkjøles så det dannes is, stiger trykket etter formelen

$$\Delta p = 3.79 \times 10^4 \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) \text{ atm}$$

eller tilnærmet

$$\Delta p = -(1.39 \times 10^2 \text{ atm K}^{-1}) \Delta T$$

- f) Hvor langt ned må man avkjøle for at alt vannet skal fryse, hvis de forutsetninger vi har gjort holder?

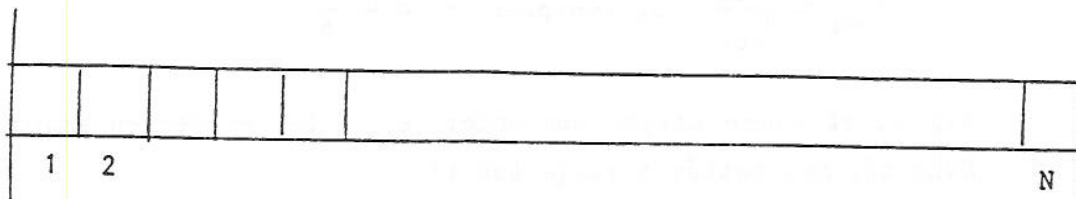
Oppgave 2

Et forsøk kan komme ut med to resultater, "kron" og "mynt", med sannsynlighet p og q henholdsvis. $p + q = 1$.

- a) Hva er sannsynligheten for at N uavhengige forsøk alle skal komme ut med "kron"?

- b) Hva er sannsynligheten for K "kron" og $M = N - K$ "mynt" i N forsøk?
- c) Regn ut fra sannsynligheten under b) det midlere antall "kron" \bar{K} i N forsøk og variansen $(K - \bar{K})^2$.

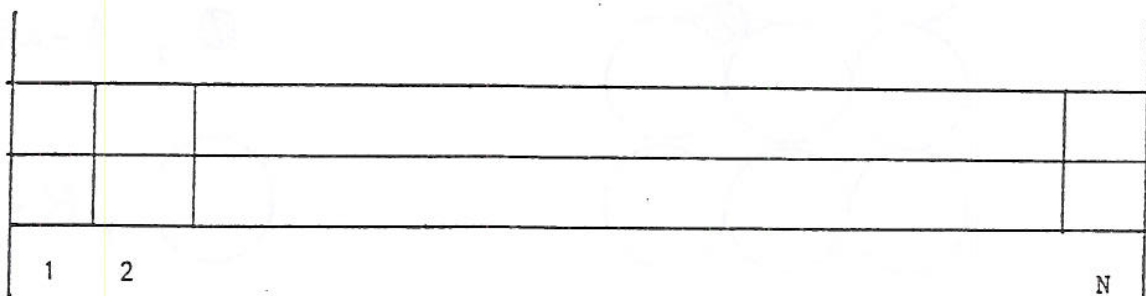
Betrakt nå en stripe bygget opp av N kvadrat. Kvadratene er elektrisk ledende med en sannsynlighet p . Ledende kvadrat



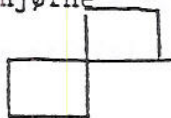
ved siden av hverandre gir kontakt.

- d) Hva er sannsynligheten for at stripen er ledende? Hva er sannsynligheten for ett isolerende kvadrat i stripen?

Betrakt nå to slike striper ved siden av hverandre, altså i alt $2N$ kvadrat.

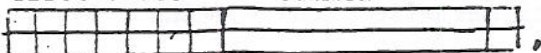


Vi regner at to ledende kvadrat med kontakt med hverandre gjennom et hjørne



også gir ledende kontakt.

- e) Hva er sannsynligheten for at dobbelt-stripen er ledende?

Tenk dere nå at vi har gitt $2N$ kvadrat, hvorav $N + M$ er ledende og atskiller seg fra de ikke ledende med en metallisert overflate. Vi legger disse kvadratene sammen til en dobbeltstripe, N sidekant-er lang. 

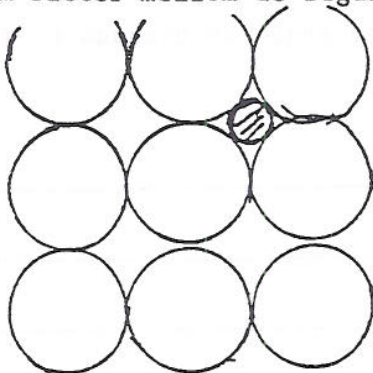
- f) Hva er det totale antall mulige forskjellige konfigurasjoner W_{tot} ?
- g) Hva er det totale antall mulige ledende konfigurasjoner W_{led} ?
(Kontakt gjennom hjørne gir også ledende kontakt).
- h) Hvis vi definerer


$$P_{\text{led}} = \frac{W_{\text{led}}}{W_{\text{tot}}} \quad \text{og innfører } p = \frac{N + M}{2N},$$

vil vi få samme uttrykk som under e), eller er det en annen situasjon?
Hvis så, hva består forskjellen i?

Oppgave 3

Vi har en krystall bygd opp av atomer M der det er oppløst atomer A som sitter mellom de regulære plassene for M-atomer.



 , A-atom

 , M-atom

La krystallen inneholde N mulige plasser for A-atomer, og la det være $N_A \ll N$ A atomer tilstede, som kan fordele seg vilkårlig mellom plassene.

- a) Hvor mange måter W_A kan A-atomene fordele seg på? Vis at entropien blir

$$S \cong kN_A \left(\ln \left(\frac{N}{N_A} \right) + 1 \right)$$

i Stirlings tilnærming $\ln n! = n(\ln n - 1)$.

Forskjellen mellom energien til et A-atom i krystallen og energien til et fritt A-atom i ro utenfor krystallen er E_A .

- b) Vis at det kjemiske potensial til A-atomer i krystallen blir

$$\mu_A = + E_A + kT \ln \left(\frac{N_A}{N} \right)$$

Betrakt nå krystallen, omgitt av en ideell monoatomisk gass av A-atomer med trykk p_A . Temperaturen er T . Det kjemiske potensial i gassen er da

$$\mu_A = kT \ln \left(\frac{p_A V_F}{kT} \right)$$

der $V_F = (h^2/2\pi m_A kT)^{3/2}$. m_A er A-atomenes masse, h = Planck's konstant.

- c) Hvilken besetningssansynlighet N_A/N for A-atomer i krystallen gir likevekt med den omgivende gass ?

Avstanden mellom naboposisjoner for A-atomer i krystallen er $b = 3 \times 10^{-10}$ m. A-atomene utfører virrevandring ved å hoppe mellom disse posisjonene. Krystallen er en terning med sidekant 10^{-2} m.

Vi forandrer det omgivende trykk p_A ved en temperatur der hoppfrekvensen ν i krystallen er 10^{11} s^{-1} .

- d) Estimer hvor mange timer vi må vente for at N_A/N skal innstille seg på ny likevekt gjennom hele krystallen.

UNIVERSITETET I OSLO.

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet.

Eksamen i: FYS 104 - Termodynamikk og statistisk fysikk.

Eksamensdag: Onsdag 11. juni 1986.

Tid for eksamen: Kl. 0900-1500.

Oppgavesettet er på 7 sider.

Vedlegg:

Tillatte hjelpemidler: Regnestav. Godkjente elektroniske regnemaskiner.
Clark: Physical and Mathematical Tables.
Matematiske og fysiske tabeller for gymnasen.
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken.
Rottmann: Mathematische Formelsammlung.
Oliver & Boyd: Science Data Book.

Oppgave 1

- a) Sannsynligheten for kron er p og for mynt q . Angi uten bevis sannsynligheten for K kron i løpet av N kast. Hva kalles den statistikk som gjelder i dette tilfellet?

Vi betrakter nå en klasse med 30 elever. Vi regner 365 dager i året og at sannsynligheten for at en elev har en bestemt fødselsdag er $p = 1/365$. (alle dager i året er like sannsynlige, og vi ser bort fra skuddårseffekter.)

- b) Hva er sannsynligheten for at to, og bare to, har fødselsdag 12. mai?
- c) Hva er sannsynligheten for at ingen av fødselsdagene faller sammen?

- d) Hva er sannsynligheten for én eller flere dager i året med to eller flere sammenfallende fødselsdager?
Svarene til b), c) og d) skal angis med tallverdi. Du kan få bruk for Stirlings formel $n! \approx \sqrt{2\pi n} 2^{-n} n^n$.

Nå går vi over til et mer fysikalsk problem.

Sannsynligheten \tilde{p} for at en radioaktiv kjerne skal sende ut en α -partikkel i et lite tidsintervall Δt er proporsjonal med Δt ,

$$\tilde{p} = \Delta t / \tau_0$$

τ_0 er en karakteristisk tid for kjernen.

- e) Vis at sannsynligheten $q(t)$ for at kjernen ikke skal sende ut en α -partikkel i løpet av tiden t er gitt ved

$$q(t) = e^{-t/\tau_0}$$

(Hint: Del intervallet t opp i mange små intervaller Δt . Du kan få bruk for utviklingen

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots, \text{ gyldig for små } x).$$

- f) Vi har en samling av N slike kjerner. La $P_N(K)$ være sannsynligheten for at vi i et fast tidsintervall t får K desintegrasjoner. Argumenter for at $P_N(K)$ er gitt ved Bernoulli fordelingen, med q som gitt under e) og med $p = 1 - q$.
- g) Finn det midlere antall kjerner $\bar{n}(t)$ som ikke har desintegrert etter en tid t . Hvor lang tid tar det før antall kjerner som ikke har desintegrert er blitt halvert?

Uran U^{234} kan spontant emitte en α -partikkel med en karakteristisk tidskonstant

$$\tau_0 = 2,61 \times 10^5 \text{ år}$$

Massen til et uran atom er $3,83 \times 10^{-22}$ gram.

- h) Hvis man preparerer 1 mikrogram U^{234} , hva er det midlere antall desintegrasjoner man vil finne i løpet av det første minutt? Hvis man teller antall desintegrasjoner i løpet av det første minuttet, med hvor stor nøyaktighet kan man estimere t_0 ?

Oppgave 2

- a) Hva karakteriserer en ideell gass (generelle egenskaper felles for alle ideelle gasser)?

Et system karakteriseres gjerne med en rekke konstanter, materialkonstantene

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad (\text{utvidelseskoeffisient})$$

$$\kappa_T = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (\text{isoterm kompressibilitet})$$

$$\kappa_S = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S \quad (\text{adiabatisk kompressibilitet})$$

for mediet, og varmekapasiteter

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \quad \text{og} \quad C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P$$

som er ekstensive størrelser.

- b) Vis direkte at for en ideell gass gjelder

$$C_P - C_V = nR,$$

$$\kappa_T = \frac{1}{P}$$

og
$$\kappa_S = \frac{1}{\gamma P}$$

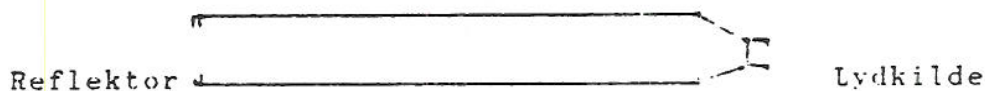
der n er antall mol, og γ er adiabatkonstanten

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

I en lydbølge i en gass foregår periodiske trykkforandringer. Lydhastigheten c er gitt som

$$c = \sqrt{\frac{1}{\kappa \rho}},$$

der κ er kompressibilitet og ρ er gassens tetthet. Vi kan tenke oss to muligheter. Enten foregår trykkendringene isotermt, og da er det κ_T som skal brukes i uttrykket for c , eller de foregår adiabatisk, og da er det κ_S som skal brukes. For å avgjøre om trykkforandringene i en lydbølge foregår isotermt eller adiabatisk ble lydhastigheten målt i luft med trykk $1 \cdot 10^5$ Pa og tetthet $\rho = 1,20$ kg/m³. Adiabatkonstanten for luft kan settes til 1,4. Målingene ble utført i et rør lukket i den ene enden med en lydreflekterende plate. I den andre enden ble det sendt inn en lydbølge med en kjent frekvens f . Oppstillingen er skjematisk antydnet i figuren. Rørdiameteren



er så liten i forhold til bølgelengden at det bare oppstår plane bølger i røret. Ved interferens mellom innfallende og reflektert bølge får vi en stående bølge med lydminima i en innbyrdes avstand $\lambda/2$ hvor λ er lydens bølgelengde. Posisjonene x av minima kan observeres med en bevegelig mikrofon.

Sammenhengen mellom lydhastighet c , frekvens f og bølgelengde λ er gitt ved

$$c = \lambda f$$

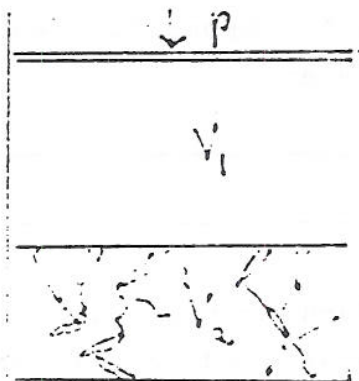
Målingene ble foretatt ved frekvens $f = 1000$ s⁻¹. Beliggenheten av minima ble observert slik:

1. minimum ved $x_1 = 8,5$ cm, 5. minimum ved $x_5 = 76,7$ cm.

Eks. Fys. 104. v. 86 side 4

- c) Bruk observasjonene til å bestemme lydshastigheten i luften og avgjør på dette grunnlag om trykkforandringene i lydbølgen foregår isotermt eller adiabatisk. Vi kan regne at usikkerheten i den målte verdi av c er 0,5%, mens de beregnede verdier har vesentlig mindre usikkerhet.

Ofte karakteriserer man også et sammensatt system med konstanter for systemet som helhet, definert slik som i teksten før spørsmål b). Betrakt følgende system: En porøs stein med et ytre volum V_2 , neddykket i vann under trykk p slik at alle porer fylles med vann. Porene har et samlet volum ϕV_2 og ϕ kalles porøsiteten. Vannet fyller også et volum V_1 utenfor den porøse steinen.



Således er det totale vannvolum ved trykk p

$$V = V_1 + \phi V_2$$

Vannet beskrives vi med materialkonstanter

$$\alpha_p^v, \kappa_T^v, c_p^v \text{ etc. } c_p^v \text{ er spesifikke varmekapasitet}$$

per volumenhet. Steinen regner vi som inkompressibel og uten termisk utvidelse, dvs. V_2 og ϕ er helt faste størrelser. Den porøse stein uten vann i seg tilskrives en varmekapasitet C^s .

- d) Finn uttrykket for utvidelseskoeffisienten α og varmekapasiteten C for dette sammensatte systemet.

e) Vis at for adiabatisk kompresjon av systemet gjelder

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \frac{T\alpha^v (V_1 + \rho V_2)}{C^{st} + (V_1 + \rho V_2)c_p^v}$$

(Utleddningen krever bruk av kjedereglen og en Maxwell-relasjon. Hvis vanskelig, utsett dette spørsmål til slutt).

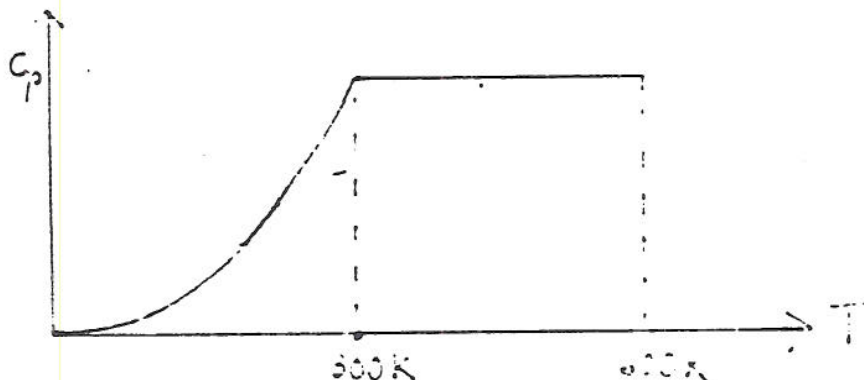
Oppgave 3

Vi har et metall med smeltepunktet $T_{sm} = 600\text{K}$. Den spesifikke varmekapasitet c_p per kg er blitt målt fra 0K til 600K og lar seg fremstille som

$$c_p = \alpha T^3, \quad 0\text{K} \leq T < 300\text{K}$$

$$\text{der } \alpha = \frac{4}{9} \cdot 10^{-5} \text{ J/kg K}^4$$

$$\text{og } c_p = 120 \text{ J/kgK}, \quad 300\text{K} \leq T \leq 600\text{K}$$



Smeltevarmen ved $T_{sm} = 600\text{K}$ er

$$Q = 2,5 \times 10^3 \text{ J/kg}$$

Metallets atomvekt er 200.

Det ytre trykk er hele tiden konstant lik 1 atm.

a) Hva er entropien per kg fast stoff ved smeltepunktet ?

- b) Hva er entropien per kg smelte ved smeltepunktet ?

Smelten tilsettes litt av et annet metall (2) som går i oppløsning i smelten. For en tilstrekkelig tynn oppløsning kan vi regne at Gibbs fri energi kan skrives som

$$G = N_1 \mu_1^0(p, T) + N_2 \mu_2^0(p, T) - kT N_1 X (\ln X)$$

der $X = N_2/N_1$. N_1 er antall atomer av basismetallet, N_2 er antall atomer fra tilsetningen.

- c) Med en relativ tilsetning X , hvor mye blir det kjemiske potensial for basismaterialet redusert ?
- d) Vi antar at tilsetningsmetallet har null oppløselighet i den faste fase av basismetallet. Hvor mye lavere vil størknings-temperaturen være for en smelte med $X = 10^{-2}$ enn for en ren smelte med størkingstemperatur $T_{sm} = 600K$. Vi regner lineært.

UNIVERSITETET I OSLO.

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet.

Eksamen i: FYS 104 - Termodynamikk og statistisk fysikk.

Eksamensdag: Mandag 17. november 1986.

Tid for eksamen: Kl. 0900-1500.

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Regnestav. Godkjente elektroniske regnemaskiner.

Clark: Physical and Mathematical Tables.

Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset.

Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken.

Rottmann: Mathematische Formelsammlung.

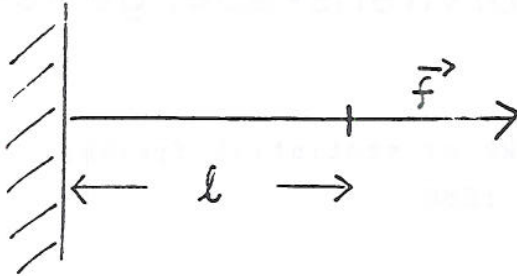
Oliver & Boyd: Science Data Book.

Oppgave 1

Et elektron kan hoppe langs et lineært molekyl. Sannsynligheten for et hopp til høyre er p og hopplengden er l . Sannsynligheten for hopp til venstre er $q = 1-p$. Hoppene er statistisk uavhengige.

- Etter N hopp; hva er sannsynligheten $P(n)$ for at elektronet har beveget seg n plasser eller skritt til høyre?
- Hva er sannsynligheten for at elektronet er tilbake til utgangspunktet etter N hopp? Vi antar at N er et like tall.
- Hvor langt har elektronet flyttet seg i middel etter N hopp?
- Betrakt den n -te plass til høyre for startposisjonen. Hva er den totale sannsynlighet for at elektronet har besøkt denne plassen en eller flere ganger i løpet av $N = n+3$ hopp?

Oppgave 2



Vårt system består av en gummi-
strikk. Denne holdes utspent i en
lengde l av en kraft f . Strikkens
lengde uten strekk er l_0 . Vi har at
 $l > l_0$ og bruker $x = l - l_0$ som én

av de termodynamiske koordinater for systemet. Den absolutte tempera-
turen på strikk og omgivelser er T . Tilstandsligningen, som gjelder
under de forhold oppgaven behandler, er $f = aTx$, hvor a er en kjent
konstant. Som man ser øker kraften på en utspent gummistrikk med
temperaturen når lengden holdes konstant. Det kan vises at tilstands-
ligningen impliserer at den indre energi u er en funksjon av T
alene. Dette brukes som en forutsetning der det er nødvendig når man
svarer på spørsmålene a) til og med d).

- Strikken strekkes reversibelt og isotermt fra x_1 til x_2 . Beregn arbeidet W og varmen Q . Blir varmen absorbert eller avgitt av strikken?
- Varmekapasiteten av systemet ved konstant lengde C_x antas kjent og konstant. Beregn $u(T)$. ($u(T_0) = u_0$).
- Beregn varmekapasiteten ved konstant kraft C_f .
- Vi antar at systemet er varmeisolert og strekker strikken reversibelt fra x_1 til x_2 . Temperaturen før forlengelsen var T_1 . Hva er temperaturen T_2 etter forlengelsen?

I resten av oppgaven skal man ikke bruke som forutsetning at
 $u = u(T)$.

e) Bevis formelen $f - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_T = T \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_x$.

Hint: Bruk (og helst bevis) en av Maxwells relasjoner for dette systemet

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T = - \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_x$$

- f) Bevis nå at u er en funksjon av T alene, når tilstandsligningen er som oppgitt.

- d) Beregn damptrykket av A-komponenten som funksjon av N_B/N_A .
- e) B atomene kan forekomme som ren B-krystall med bindingsenergi e_B . Bindingsenergien for B-atomer i A-krystallen er e_{BA} . Anta at $e_{BA} \ll e_B$, og at løsligheten av A i B krystallen kan neglisjeres. Hva blir likevektskonsentrasjonen for B i A krystallen når A og B krystaller er i kontakt med hverandre ?

Oppgave 4

- a) Hva er Gibbs' paradoks ?
- b) Hva omhandler Clausius Clapeyron's likning ?
- c) Hva er henholdsvis Fermioner og Bosoner ?
- d) Hva er Ficks to lover for diffusjon ?
- e) Formuler (ikke utled) massevirkningsloven for kjemiske reaksjoner

UNIVERSITETET I OSLO.

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet.

Eksamen i: FYS 104 - Termodynamikk og statistisk fysikk.

Eksamensdag: Lørdag 13.juni 1987.

Tid for eksamen: Kl.0900-1500.

Oppgavesettet er på 7 sider.

Vedlegg:

Tillatte hjelpemidler: Regnestav. Godkjente elektroniske regnemaskiner.
Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset.
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken.
Rottmann: Mathematische Formelsammlung.
Oliver & Boyd: Science Data Book.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare oppgavene

Oppgave 1

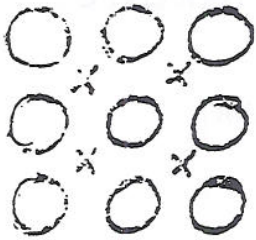
- a) Hvilke egenskaper er det som karakteriserer den idelle gass? (Dens tilstandslikning, hva energien avhenger av).
- b) Den ideelle gass' kjemiske potensial er

$$\mu = kT \ln \left(p / \left(kT \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{3/2} \right) \right)$$

Utleid den idelle gass' tilstandslikning rent termodynamisk fra dette uttrykket for μ .

- c) Vi betrakter en blanding av ideelle monoatomiske gasser (1), (2) og (3) med atommasser m_1 , m_2 og m_3 . Sett opp de additivetslover som gjelder. Gjør kort rede for begrepet blandingsentropi.

Vi vil nå studere en legering bestående av tre atomslag, i likevekt med sin damp. Modellen er en vertskrystall bestående av N atomer som gir et gitter med N mellomgitterplasser. Av mellomgitterplassene er N_1 besatt med atomer av et annet slag med masse m_1 , og N_2 med atomer av et tredje slag med masse m_2 . Atomene (1) har en bindingsenergi ϵ_1 til en mellomgitterplass, og atomene (2) har en bindingsenergi ϵ_2 til en mellomgitterplass. En mellomgitterplass kan ikke besettes med mer enn ett atom.



○, atomene til vertskry-
stallen
X, mellomgitterplasser

Vi skal se bort fra vibrasjonsbidrag til entropien og bare regne med konfigurasjonsentropi i beskrivelsen av legeringen.

- d) Sett opp uttrykket for W , antall mulige konfigurasjoner, med N_1 og N_2 atomer av slag (1) og (2) fordelt på N plasser.
- e) Vis, ved hjelp av Stirlings formel $\ln n! = n(\ln n - 1)$

at konfigurasjonsentropien blir:

$$S = k(-N_1 \ln(\frac{N_1}{N}) + N_1 - \frac{1}{2} N_1 \frac{N_1}{N})$$

$$+ k(-N_2 \ln(\frac{N_2}{N}) + N_2 - \frac{1}{2} N_2 \frac{N_2}{N})$$

$$- kN(\frac{N_1}{N}) (\frac{N_2}{N})$$

Vi regner at $N_1/N \ll 1$ og $N_2/N \ll 1$.

Vi regner dampen som en blanding av ideelle gasser.

- f) Hva blir partialtrykkene p_1 og p_2 for gitt N_1/N og N_2/N for legeringen?
- g) La p_0 være damptrykket til ren ($N_1 = 0$, $N_2 = 0$) vertskry-
stall, og la p'_0 være partialtrykket til vertsatomene med
gitt N_1/N og N_2/N for legeringen. Hva blir forholdet

$$p'_0/p_0?$$

Oppgave 2

- a) Sett opp, uten bevis, hva sannsynligheten $P_N(K,M)$ for K kron og $M = N-K$ mynt i et N kast-eksperiment er. p og q er sannsynligheten for henholdsvis kron og mynt. Beregn forventningsverdien \bar{K} ut fra

$$\bar{K} = \sum_{K=0}^N K P_N(K,M)$$

Istedenfor mynt-krone kast betrakter vi nå kast med en tresider terning med sider a , b og c . La sannsynlighetene for at den skal komme ned på sidene a , b og c være henholdsvis p , q og r . La A , B og C være antall ganger som henholdsvis a , b og c forekommer i et N kast. p , q og r er sannsynlighetene for alle mulighetene slik at

$$p + q + r = 1.$$

- b) Vis at sannsynligheten for A a -resultater, B b -resultater og C c -resultater i et N -kast er

$$P_N(A,B,C) = \frac{N!}{A! B! C!} p^A q^B r^C$$

- c) Beregn \bar{A} , $\overline{A^2}$ og $\overline{(A-\bar{A})^2}$

Hint: Utnytt formelen

$$(p+q+r)^N = \sum_{A,B,C} \frac{N!}{A! B! C!} p^A q^B r^C$$

- d) I et N kast får man A a -resultater og B b -resultater. Dann produktet AB . Ut fra mange N -kast kan man finne den midlere verdi av produktet, \overline{AB} . Vis at

$$\overline{AB} = N^2 pq - Npq$$

- e) Betrakt bare de N -kast som kommer ut med en bestemt verdi A . Forklar hvorfor den midlere verdi av B for disse tilfellene

må være gitt ved

$$\bar{B}_A = (N-A) \frac{q}{q+r}$$

f) Vis at \bar{AB} , beregnet fra

$$\bar{AB}_A,$$

gir samme svar som funnet under d).

Oppgave 3

a) Ficks to lover for diffusjon er

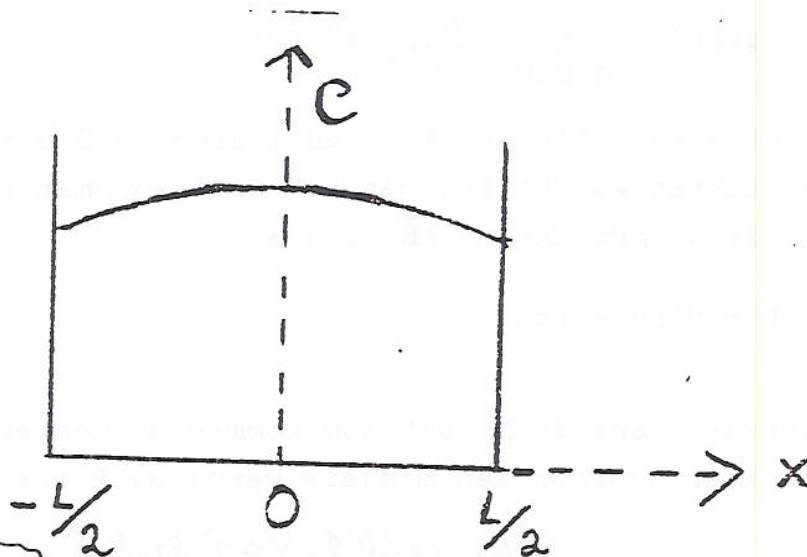
$$j = -D \frac{\partial C}{\partial x} \quad (1.lov)$$

og

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t} \quad (2.lov)$$

Definer de størrelsene som inngår. Utled 2.lov fra 1.lov via kontinuitetslikningen.

Vi betrakter nå en todimensjonal beholder av bredde L (beholderen anses for meget lang i forhold til bredde L slik at man kan se bort fra ende-effekter); se figuren.



Beholderen er fylt med en diffunderende gass. Konsentrasjonen ved x angis som $C(x)$. De to sideveggene lekker. Lekkasjen angis som mengde gass per tidsenhet per arealenhet \dot{q} , og vi antar at

$$\dot{q} = \gamma C$$

der γ er en konstant og C er konsentrasjonen ved veggen.

På grunn av lekkasjen vil konsentrasjonen ikke være konstant som funksjon av x . Den midlere konsentrasjon vil også avta med tiden.

Vi antar at konsentrasjonen som funksjon av x og t kan skrives i formen

$$C(x,t) = A \cos(kx) \cdot e^{-\alpha t}$$

der k og α er konstanter.

b) Vis at hvis dette skal være en løsning må

$$k = \sqrt{\frac{\alpha}{D}}$$

Bare for en riktig verdi av α vil b) gi en løsning som stemmer med lekkasjen.

c) Vis at α må tilfredsstille betingelsen

$$D \sqrt{\frac{\alpha}{D}} \sin \left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}} \cdot \frac{L}{2} \right) = \gamma \cos \left(\sqrt{\frac{\alpha}{D}} \cdot \frac{L}{2} \right)$$

d) For tilstrekkelig liten lekkasje blir α så liten at

$$\sqrt{\frac{\alpha}{D}} \cdot \frac{L}{2} \ll 1$$

Vis at betingelsen under c) da tilnærmet gir

$$\alpha = \frac{2\gamma}{L}$$

Gi en tolkning av dette resultatet.

Oppgave 4

Termodynamisk kan man karakterisere et legeme med en rekke konstanter,

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

$$\kappa_T = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

$$C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P$$

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V$$

- a) Definer størrelsene og sett navn på konstantene
- b) Vis at

$$C_P - C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

Hint: Betrakt $S(T, V(p, T))$, der $V = V(p, T)$ er tilstandsfunksjonen.

- c) Vis at

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$$

og at

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T$$

slik at

$$C_P - C_V = T \alpha^2 V / \kappa_T$$

Hint: En Maxwell relasjon utledet fra potensialet F . Bruk av kjederegelen.

d) Den adiabatiske kompressibilitet er definert som

$$\kappa_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S$$

Finn κ_S uttrykt ved de andre materialkonstanter angitt innledningsvis i denne oppgaven.

Hint: Start med å betrakte $V(p, T(S, p))$.

UNIVERSITETET I OSLO.

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet.

Eksamen i: FYS 104 - Termodynamikk og statistisk fysikk.

Eksamensdag: Fredag 20. november 1987.

Tid for eksamen: Kl. 0900-1500.

Oppgavesettet er på 6 sider.

Vedlegg:

Tillatte hjelpemidler: Regnestav. Godkjente elektroniske regnemaskiner.
Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset.
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken.
Rottmann: Mathematische Formelsammlung.
Oliver & Boyd: Science Data Book.

Obs: Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene

OPPGAVE 1

- a) Angi de forskjellige ekvivalente definisjoner av det kjemiske potensial μ for et monatomisk stoff ut fra potensialene S, F og G.
- b) Angi betingelsene for likevekt mellom to faser av samme stoff (si mellom en krystall og dens damp).

For en ideell monatomisk gass har man en fullstendig teoretisk beskrivelse. Det kjemiske potensial er

$$\mu = kT \ln\left(\frac{P}{kTz(T)}\right)$$

der

$$z(T) = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}$$

Enpartikkelpartisjonsfunksjonen for gassen er

$$Z = Vz(T) = v\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}$$

- c) Gi en kort utledning av uttrykket for enpartikkelpartisjonsfunksjonen Z for den monatomiske ideelle gass.

Kurven for damptrykket til et fast stoff som funksjon av temperaturen,

$$p = p(T)$$

inneholder mye termodynamisk informasjon om det faste stoff.

Vi betrakter et monatomisk stoff og dets monatomiske ideelle damp. Vi antar at vi fra damptrykk-målinger kjenner kurven $p = p(T)$ og derved også de deriverte,

$\frac{dp}{dT}$ og $\frac{d^2p}{dT^2}$. For dampen bruker vi det oppgitte uttrykket for μ .

I god tilnærming kan vi anta at det kjemiske potensial i den faste fase er uavhengig av trykket og er en funksjon bare av T .

d) Vis at under disse forutsetningene er entropien per atom i den faste fase

$$s = -k \ln p - \frac{kT}{p} \frac{\partial p}{\partial T} + \frac{5}{2} k \ln(kT) + \frac{5}{2} k + \frac{3}{2} k \ln \left(\frac{2\pi m}{h} \right)$$

e) Skisser, uten å gjennomføre regningene, hvordan du vil gå frem for også å finne energien ϵ per atom i den faste fase fra damptrykk-kurven og dens deriverte.

f) Vis videre at varmekapasiteten c per atom i den faste fase er

$$c = - \frac{2kT}{p} \frac{\partial p}{\partial T} + \frac{kT^2}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)^2 - \frac{kT^2}{p} \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} + \frac{5}{2} k$$

I læreboka har vi studert den såkalte Einstein-krystall og dens damptrykk. Når $kT \gg \frac{1}{2} \hbar \omega$, der ω er oscillatorfrekvens, har uttrykket for damptrykket formen

$$p = \alpha T^{-1/2} e^{-E/kT}$$

der E er en konstant bindingsenergi og α er en annen konstant. I samme temperaturområdet gjelder

$$c = 3k$$

ifølge ekvipartisjonsprinsippet.

g) Vis at dette er konsistent med resultatet under f).

OPPGAVE 2

En kjemisk reaksjonslikning kan formelt skrives på formen

$$\sum_i \nu_i A_i = 0$$

der A_i er det i -te molekylslag og ν_i er hele tall, positive for reaksjonsprodukter og negative for reaktanter. Når alle komponentene er ideelle gasser gjelder massevirkningsloven

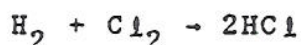
$$\prod_i p_i^{\nu_i} = K_p(T)$$

ved likevekt. p_i er partialtrykket for komponent i , og $K_p(T)$, massevirkningskonstanten, avhenger bare av temperaturen.

a) Forklar kort den termodynamiske basis for massevirkningsloven.

Betrakt et volum V med like store molare mengder H_2 og Cl_2 gass. Temperaturen er $T_1 = 300$ K og det totale trykk er 1 atm.

Gassblandingen blir så påtent og reagerer etter loven



(reaktanter) \rightarrow (reaksjonsprodukt)

Under reaksjonen stiger temperaturen til $T_f = 1400$ K. Det antas at ingen varme avgis til omgivelsene. Likevektkonstanten ved T_f er $K_p = 6 \cdot 10^4$.

- b) Hva er det totale trykket etter reaksjonen ?
 c) Hva er partialtrykket for H_2 etter reaksjonen ?

OPPGAVE 3

- a) Angi uten bevis sannsynligheten $P_N(H, V)$ for at av N hopp er H til høyre og $V = N - H$ til venstre. Enkelthoppsannsynlighetene for hopp til høyre og venstre er p og $q = 1-p$ henholdsvis.

- b) Vis at

$$\bar{H} = Np$$

og at

$$\overline{(H - \bar{H})^2} = Npq$$

Disse resultatene kan brukes til å studere hopp langs en lineær kjede. La hoppavstanden være a , og la $p = q = 1/2$.

- c) Vis at N hopp gir en midlere kvadratisk forflytning

$$\overline{x^2} = Na^2$$

La oss nå betrakte hopp i et plan, med de elementære hopp i to ortogonale retninger, x og y . Alle hopplengder er a . La H og V være antall hopp langs x -retning til høyre og venstre henholdsvis, og la F og T være antall hopp langs y -retningen i fremoverretning og i tilbakeretning henholdsvis. La p, q, r og s være de elementære hoppsannsynligheter for de 4 typer hopp, H, V, F og T hopp, i denne rekkefølge. $p + q + r + s = 1$.

- d) Et totalt antall hopp N må bestå av hopp av de 4 typer,

$$N = H + V + F + T.$$

Vis at sannsynligheten for et bestemt sett verdier for H, V, F og T er

$$P_N(H, V, F, T) = \frac{N!}{H!V!F!T!} p^H q^V r^F s^T$$

- e) Vis ved å bruke resultatet under d) at når $p = q = r = s = 1/4$ vil N hopp gi en midlere kvadratisk forflytning

$$\overline{R^2} = \overline{(x^2 + y^2)} = Na^2$$

Hint: Bruk formelen

$$(p + q + r + s)^N = \sum P_N(H, V, F, T) p^H q^V r^F s^T$$

- f) Utledningen under e) unngår tilnærmelsen med $N/2$ hopp i de to retninger x og y .

Vis at

$$\overline{(H + V)} = \frac{N}{2}$$

når $p = q = r = s = 1/4$, men at det også er spredning,

$$\overline{(H + V - (\overline{H} + \overline{V}))^2} = \frac{1}{4} N$$

I en kontinuumbeskrivelse beskrives todimensjonal diffusjon med Fick's likninger

$$j_x = -D \frac{\partial C}{\partial x}$$

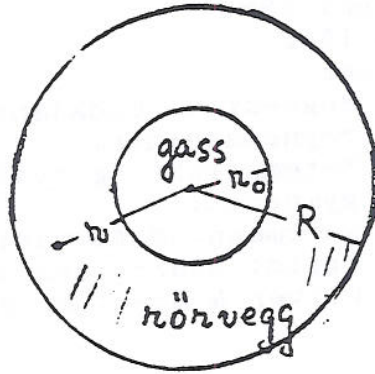
$$j_y = -D \frac{\partial C}{\partial y}$$

der C er konsentrasjon, D diffusjonskoeffisient og j_x og j_y er x og y er komponentene av partikkelstrømmen.

Vi vil betrakte symmetriske situasjoner der bare radielle strømmer er tilstede,

$$j_r = -D \frac{\partial C}{\partial r}$$

Vi har et rør med indre radius r_0 og ytre radius R . I røret holdes



en gass under høyt trykk. Rørmaterialet er ikke tett og lar gass sive sakte ut. Rørmaterialet har en diffusjonskoeffisient D for gassen. Ved den indre overflate har vi en konsentrasjon C_0 i rørmaterialet, bestemt av gasstrykket i røret:

$$C(r = r_0) = C_0$$

Ved den ytre overflate, der den diffunderende gass unnslipper, blir konsentrasjonen 0:

$$C(r = R) = 0$$

Vis at når vi regner med disse grensebetingelsene blir det en gasslekasje

$$J = \frac{2\pi DC_0}{\ln(R/r_0)}$$

per tidsenhet per lengdeenhet av røret.

OPPGAVE 4

- Hva er henholdsvis Fermioner og Bosoner ?
- Hva omhandler Clausius-Clapeyrons likning ?
- Definer Ω potensialet, og skriv ned differensialet for $d\Omega$. Når er Ω potensialet det riktige potensialet å bruke ?
- Hva er Joule-Thompson koeffisienten

$$\mu_{JT} = - \frac{1}{C_p} \left(\frac{\partial H}{\partial P} \right)_T \quad \text{et mål for ?}$$

- Skriv ned uttrykket for det osmotiske trykk fra en tynn løsning på en semipermeabel membran.

UNIVERSITETET I OSLO.

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet.

Eksamen i: FYS 104 - Termodynamikk og statistisk fysikk.

Eksamensdag: Lørdag 18. juni 1988.

Tid for eksamen: Kl. 0900-1500.

Oppgavesettet er på 6 sider.

Tillatte hjelpemidler: Regnestav. Godkjente elektroniske regnemaskiner.
Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset.
Rottmann: Mathematische Formelsammlung.
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken.
Oliver & Boyd: Science Data Book.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

- a) Definer pH skalaen for konsentrasjonen av H^+ joner i vann. Likevektskonstanten for reaksjonen mellom aminoender NH_2 og H^+ er

$$K = \frac{[NH_2][H^+]}{[NH_3^+]}$$

Definer pK , og utled uttrykk for sannsynlighetene p og q for at en aminoende i en løsning med gitt pH er protonert (NH_3^+) og nøytral (NH_2) henholdsvis.

- b) Vi betrakter makromolekyler med $N = 10$ aminoender på overflaten, oppløst i vann med en $pH = 6.5$. Aminoendene er karakterisert med $pK = 7$. Regn ut den midlere ladning \bar{q} for et makromolekyl.
- c) Hva blir root mean square fluktuasjonen $\left\{ \frac{1}{(q - \bar{q})^2} \right\}^{1/2}$ i dette eksemplet, og hva blir sannsynligheten for at et makromolekyl er uladet ?

Oppgave 2

Vi betrakter diffusjon, og bortsett fra siste spørsmål diffusjon i en dimensjon, langs en uendelig x-akse. Spørsmål e) anses som litt vanskelig.

- a) Skriv opp Fick's lover, og definer de størrelsene som inngår.
- b) Definer mobilitet. Sett opp Einstein-relasjonen mellom mobiliteten μ og diffusjonskonstanten D (bevis forlanges ikke).
- c) Hva blir D når den mikroskopiske hoppfrekvens er ν og den mikroskopiske hopplengde er l ? (bevis forlanges ikke).

- d) Vis at

$$C(x,t) = C_0 + C_1 \sin kx \exp(-k^2 Dt)$$

og

$$C(x,t) = \frac{N}{(4\pi Dt)^{1/2}} \exp(-x^2/4Dt)$$

er spesielle løsninger av diffusjonslikningen. Hva slags situasjoner beskriver løsningene?

- e) Ved tiden $t = 0$ settes en kilde ved $x = 0$ som hele tiden injiserer q partikler per tidsenhet. Der er ingen partikler på linjen fra før. Hva blir konsentrasjonen $C(x,t)$ på stedet x ved en tid $t > 0$? Vis at svaret kan bringes på formen

$$C(x,t) = \frac{qt^{1/2}}{(\pi D)^{1/2}} \cdot \exp(-x^2/4Dt)$$

$$- \frac{q|x|}{2D} \operatorname{Erfc}(|x|/(4Dt)^{1/2})$$

der Erfc y er definert ved

$$\text{Erfc } y = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_y^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Hint: Bruk den andre spesielle løsnning under d) som utgangspunkt for en integral-løsning. Den vanlige errorfunction erf y er definert som

$$\text{Erf } y = \frac{2}{\pi^{1/2}} \int_0^y e^{-z^2} dz.$$

Erfc y , definert ovenfor, er konjugert til erf y i den forstand at erf y + Erfc y = 1.

- f) Studer den under e) oppgitte $C(x,t)$ for en gitt x i grensen stor t . Vil $C(x,t)$ nærme seg en stasjonær grense når $t \rightarrow \infty$? Gi en kvalitativ forklaring av det resultatet du kommer frem til.
- g) Vi kunne studere det tilsvarende 3-dimensjonale problem, med en kilde i origo i det tredimensjonale rum. Gjør kvalitative betraktninger (ikke detaljerte regninger) om hvorvidt du venter en stasjonær (tidsuavhengig) konsentrasjonsfordeling $C(r)$ etter lang tid t .

Oppgave 3

Vi betrakter et monoatomisk stoff, kalt (1), med en fast fase (f) og en væskefase (smelte) (s). Som funksjon av temperatur og trykk, T og p , er de kjemiske potensialer $\mu_f(T,p)$ og $\mu_s(T,p)$. Vi betrakter trykket p som konstant, 1 atm.

- a) Tegn i et (μ, T) diagram typiske kurver for μ_f og μ_s som funksjon av T . Vil kurvene ha positiv eller negativ helning, og hvorfor? Plasser smeltepunktet T_{sm} i den grafiske skisse, og begrunn plasseringen.

- b) Betrakt nå en smelte av N_1 (1) atomer og $N_2 \ll N_1$ atomer av et annet slag (2). Vi går ut fra at Gibbs fri energi for smelten kan gis på formen

$$G = N_1 \mu_s(T, p) + N_2 \tilde{\mu}_2(p, T) + kT N_2 \left(\ln \left(\frac{N_2}{N_1} \right) - 1 \right)$$

Hva blir de kjemiske potensialer μ_1 og μ_2 uttrykt ved størrelsene i G?

- c) Smeltevarmen per atom for det rene stoff er l . Vi regner at atomene (2) ikke er løselige i den faste fase, slik at rent fast stoff (1) vil begynne å skille seg ut ved størkning. Utled under disse forutsetninger formelen

$$\Delta T_{sm} \sim - \frac{kT_{sm}^2}{l} \cdot \frac{N_2}{N_1}$$

for forskyvningen ΔT_{sm} av størkningstemperaturen som funksjon av ilegering av smelten til første orden i

$N_2/N_1 \ll 1$. Er ΔT_{sm} positiv eller negativ ?

- d) For det rene stoff kan størkningstemperaturen også forskyves med økning ΔP i trykket. Utled Clausius Claperyon's likning for forskyvningen ΔT_{sm} .

- e) Som et eksempel betrakter vi Cu(kopper). For kopper kan vi regne med konstantene nedenfor.

Smeltepunkt, $T_{sm} = 1356 \text{ K}$
 Smeltevarme, $L = 21 \times 10^4 \text{ Jkg}^{-1}$

Tetthetene ρ_f og ρ_s i henholdsvis fast fase og smelte,

$\rho_f = 8930 \text{ kg m}^{-3}$
 $\rho_s = 8500 \text{ kg m}^{-3}$

Atomvekten til Cu er 63.54 atomære masseenheter eller 0.06354 kg mol⁻¹. For å lette arbeidet oppgir vi også at Avogadros tall N_A er

$$N_A = 6.0225 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1},$$

at gasskonstanten R_A er

$$R_A = N_A k = 8.3143 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

og at

$$1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Nm}^{-2}.$$

Hvor mye forandrer størkningstemperaturen seg med

$$N_2/N_1 = 10^{-3} ?$$

Hvor stort trykk (i atm.) måtte man anvende for å forskyve T_{sm} like mye i motsatt retning?

Oppgave 4

- a) Bevis de termodynamiske formler

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(-\frac{p}{T}\right)\right)_V$$

og

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V$$

- b) Den idelle gass tilfredsstiller likningen

$$pV = NkT.$$

Vis ved hjelp av a), at for en ideell gass er energien E en funksjon bare av temperaturen T .

- c) Van der Waals gass har tilstandslikningen

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = NkT$$

der a og b er konstanter. Vis at

$$E(T, V) = E_{id}(T) - \frac{a}{V},$$

når vi antar at gassen nærmer seg en ideell gass når $V \rightarrow \infty$ slik at $E(T, V) \rightarrow E_{id}(T)$ når $V \rightarrow \infty$. Vil varmekapasiteten C_V bli forskjellig fra det vi ville få om vi regnet ideell gass?

- d) Betrakt en ideell gass, og anse C_V som konstant. Vis under denne forutsetning at en adiabat følger loven

$$T^\beta \cdot V = \text{konst}$$

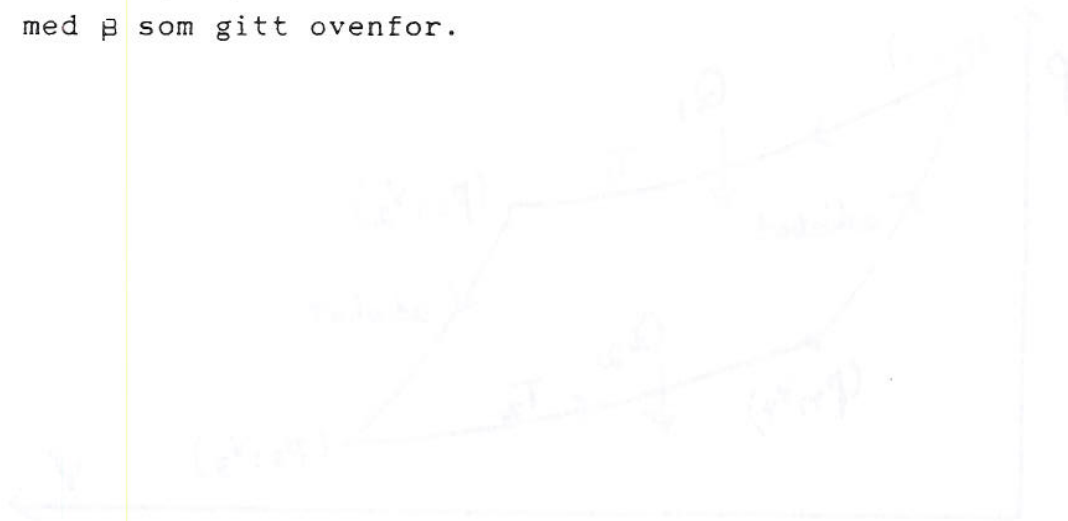
der

$$\beta = C_V / Nk$$

Betrakt så en van der Waals gass, anse C_V som konstant, og vis at loven for en adiabat må bli

$$T^\beta (V - b) = \text{konst}$$

med β som gitt ovenfor.



UNIVERSITETET I OSLO.

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet.

Eksamen i FYS 114 - Termodynamikk og statistisk fysikk.

Eksamensdag: Onsdag 14. desember 1988.

Tid for eksamen: Kl. 0900-1500.

Vedlegg:

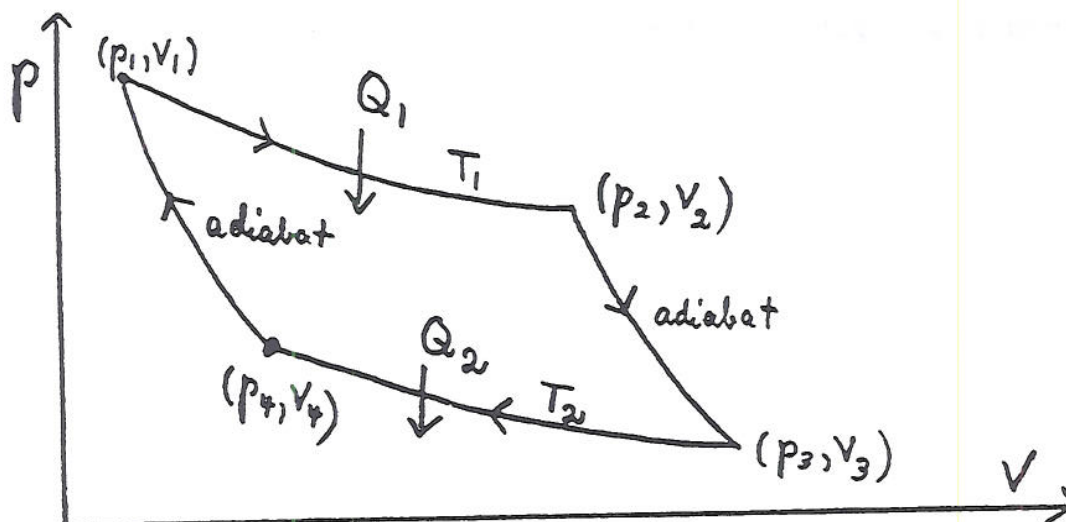
Oppgavesettet er på 6 sider.

Tillatte hjelpemidler: Regnestav. Godkjente elektroniske regnemaskiner.
Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset.
Rottmann: Mathematische formelsammlung.
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken.
Oliver & Boyd: Science Data Book.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvarer spørsmålene

Oppgave 1

Vi vil studere en Carnot-maskin for det tilfellet at substansen i maskinen er en van der Waals gass.



Tilstandslikningen for en van der Waals gass er

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT$$

der a og b er konstanter og V er molært gassvolum.

a) Vis at

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{T}\right)_V$$

er en generelt gyldig termodynamisk relasjon. E er den indre energien.

b) Vis at antagelsen om at vi for en van der Waals gass kan skrive

$$E = C_V T^2 - \frac{a}{V}, \text{ der } C_V \text{ er konstant,}$$

er konsistent med den termodynamiske relasjon under a) og tilstandslikningen for gassen.

c) Vis, når vi regner at uttrykket for E under b) gjelder, at adiabatene følger likningen

$$T(V - b)^{\gamma-1} = \text{konst.}$$

der $\gamma = (C_V + R)/C_V$

d) Beregn varmemengden Q_1 (se figuren i innledningen) som funksjon av T_1 , V_1 og V_2 og varmemengden Q_2 som funksjon av T_2 , V_3 og V_4 . Både Q_1 og Q_2 regnes positive.

e) Påvis, som en sjekk på regningene, at relasjonen

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

er oppfylt.

Oppgave 2

a) Et system i termisk likevekt består av N partikler. Det midlere besetningstall \bar{N}_i er gitt ved uttrykket

$$\bar{N}_i = \frac{N \omega_i e^{-\beta \epsilon_i}}{Z}$$

Eks. Fys114 H88 side 2

Definer alle størrelser som inngår i uttrykket og gi et uttrykk for Z .

- b) Vis at systemets energi i termisk likevekt er gitt ved

$$E = NkT^2 \frac{d}{dT} \ln Z$$

Vi betrakter nå en ideell diatomisk gass av N H_2 -molekyler.

Vi ser bort fra potensiell energi i ytre felt. H_2 -molekylets energi er da sammensatt av tre ledd; translasjonsenergi, rotasjonsenergi, og vibrasjonsenergi

$$E_{H_2} = E_{tr} + E_{rot} + E_{vib}$$

- c) Gi, uten bevis, uttrykket for translasjonsenergiens bidrag til gassens indre energi som funksjon av temperaturen

$$E_{tr}(T) = N\bar{E}_{tr}(T)$$

Kvantemekanisk finner vi at H_2 -molekylets rotasjonsenergi E_{rot} er gitt v.h.j.a. spinn kvantetallet

$$l \text{ som } E_{rot} = l(l+1) \frac{\hbar^2}{2I}$$

der I er molekylets treghetsmoment relativt til en normal akse gjennom massesenteret. For hver spinn-tilstand $l = 0, 1, 2, \dots$ kan molekylet ha $(2l+1)$ forskjellige orienteringer som alle har samme energi E_{rot} .

- d) Finn uttrykket for det midlere besetningstallet \bar{N}_l av molekylets energi-nivåer for rotasjon og for rotasjons-partisjonsfunksjonen Z_{rot} .

Innfør $\theta_r = \frac{\hbar^2}{2Ik}$ (den karakteristiske temperatur for rotasjon) i disse uttrykkene.

Når $T \gg \theta_r$ er et stort antall av rotasjonstilstandene besatt, dessuten er avstanden mellom rotasjonstilstandene liten sammenliknet med den termiske energi. Da kan vi bruke tilnærmelsene $2l+1 \sim 2l$ og $l(l+1) \sim l^2$ og erstatte summasjonene over l med integrasjon.

- e) Vis at i denne grensen ($T \gg \theta_r$) er

$$Z_{\text{rot}} = \frac{I}{\theta_r}$$

- f) Beregn rotasjonsenergiens bidrag $E_{\text{rot}}(T)$ til gassens indre energi som funksjon av temperaturen i denne ($T \gg \theta_r$) grensen.

- g) Gi et uttrykk for gassens varmekapasitet C_V når vi bare tar hensyn til bidragene fra translasjon $E_{\text{tr}}(T)$ og rotasjon $E_{\text{rot}}(T)$ til den indre energi $E(T)$.

Vi betrakter i det følgende også bidragene til gassens indre energi fra vibrasjonene i H_2 -molekylene.

Vi lar hvert molekyl være en harmonisk oscillator slik at $\epsilon_{\text{vib}} = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$

- h) Finn et uttrykk for partisjonsfunksjonen for vibrasjon

$$Z_{\text{vib}}$$

og innfør den karakteristiske temperatur for vibrasjoner $\theta_V \equiv \frac{\hbar\omega}{k}$

- i) Finn vibrasjonsbidraget til gassens indre energi og vis at dette i grensen $T \gg \theta_V$

$$\text{blir } E_{\text{vib}} = NkT \left(1 + \frac{1}{12} \frac{\theta_V^2}{T} \right)$$

Finn gassens varmekapasitet C_V når vi også tar med bidragene fra molekyl-vibrasjonene til gassens indre energi.

For H_2 -gass er $\theta_r = 85,5$ K og $\theta_v = 6140$ K.

- j) Tegn en grafisk fremstilling av variasjonen av C_V til H_2 med temperaturen.

Oppgave 3

- a) Hva er et fermion? Vis at i Stirlings tilnærming er entropien til en gass av fermioner

$$S = -k \sum_i \omega_i \{n_i \ln n_i + (1-n_i) \ln(1-n_i)\}$$

der $n_i = N_i/\omega_i$ er besetnings-sannsynlighet. Bruk dette til å vise at den mest sannsynlige n_i er av formen (F.D. statistikk)

$$n_i = \frac{1}{\exp(\epsilon_i - \epsilon_F)/kT + 1}$$

- b) Vis at tettheten av translasjonstilstander $D(\epsilon)$, definert slikt at $D(\epsilon)d\epsilon$ er antall tilstander med energi i intervallet $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$, er gitt som

$$D(\epsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \epsilon^{1/2}$$

Vi har en halvleder med energi-gap $E_g = 1.2$ eV ved $T = 300$ K. Konsentrasjonene n og p av elektroner og hull henholdsvis er bundet sammen med massevirkningsloven

$$n \cdot p = K ; K = \alpha T^3 e^{-E_g/kT}$$

der konstanten K har verdien

$$K = 0.90 \times 10^{29} \text{ m}^{-6} \text{ ved } T = 300 \text{ K.}$$

- c) Halvlederen er dopet med donorer slik at $n = 10^{21} \text{ m}^{-3}$. Hva blir da konsentrasjonen av hull ved $T = 300^\circ\text{K}$? Hva ville konsentrasjonen av hull være ved denne temperaturen hvis halvlederen var helt ren?
- d) Finn uttrykket for konstanten K i massevirkningsloven som funksjon av m_e , m_h , E_g og T . (Bruk a) og b)
og at $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$
- e) Vis at den oppgitte verdi av K ved $T = 300 \text{ K}$ passer med $m_e = 0.2 m$ og $m_h = 0.4 m$ der m er fritt elektron masse. I den oppgitte K betyr m meter!

Oppgave 4

Noen spredte spørsmål.

- a) Forklar kort hva en P-N junction er og hva den kan brukes til (1/2 side).
- b) Forklar hva Clausius-Clapeyrons lov refererer til, og sett opp loven (uten bevis).
- c) Hva er osmotisk trykk? Sett opp loven, uten bevis.
- d) Sett opp, uten bevis, Einstein-relasjonen mellom mobilitet og diffusjonskoeffisient.

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS 104 - Termodynamikk og statistisk fysikk.

Eksamen i: FYS 114 - Statistisk fysikk.

Eksamensdag: Fredag 15. desember 1989.

Tid for eksamen: Kl. 0900-1500.

Oppgavesettet er på 8 sider.

Tillatte hjelpemidler: Regnestav. Godkjente elektroniske regnemaskiner.

Clark: Physical and Mathematical Tables. Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset.

Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken.

Rottmann: Mathematische Formelsammlung.

Oliver & Boyd: Science Data Book.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene

Oppgave 1 for FYS 114 og FYS 104

Vi har en "tippe"-kupong, bestående av $4 \times 4 = 16$ ruter, fig.A). Vinner-konfigurasjonen,

(A)

	X		X
		X	
			X

(B)

med 4 kryss og 12 åpne ruter, er vist i fig.B).

Vi regner at kupongene fylles ut vilkårlig, uten noe system, slik at hvis ikke noe er oppgitt, er sannsynligheten for en krysset rute og en åpen rute den samme, $p = q = 1/2$.

- Hvis intet er oppgitt, hva er da sannsynligheten for å fylle ut med vinner-konfigurasjonen, fig.B)?
- Hvis det er oppgitt at det skal være 4 kryss, hva er da sannsynligheten for å vinne?

- c) Hva er sannsynligheten for bare én feil (ett kryss feilplassert) under betingelsen b)?
- d) Hva er sannsynligheten for 2 feil (2 kryss feilplassert) under samme betingelser?

Vi vil i resten av oppgaven regne med at betingelsen b) gjelder.

- e) Hvis hver kupong koster 10 kroner, hva er den største premie du kan ha for alt rett dersom det forventede overskudd per 1000 solgte kuponger skal bli kr 6000?
- f) Premien for alt rett er satt til kr 5 000. Salget går dårlig. Det blir ialt solgt 400 kuponger. Hva er sannsynligheten for at det går med underskudd?

Oppgave 2 for FYS 114 og FYS 104

Tilstandslikningen for n mol med argon-gass er

$$\left(p + a \frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

der $a = 1.35 \text{ liter}^2 \text{ atm mol}^{-2}$
og $b = 0.032 \text{ liter mol}^{-1}$.

R er gasskonstanten, $R = 0.08205 \text{ liter atm K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

Vi har 40 mol argon-gass i en høytrykks flaske med volum 10 liter. Temperaturen er 300 K.

- a) Vis at trykket da blir
 $p = 91.2 \text{ atm}$.

Hvor langt ned må flasken avkjøles for at trykket skal synke til 60 atm?

Heretter betrakter vi tilstanden ved og rundt $T = 300 \text{ K}$ for 40 mol argon-gass i et volum 10 liter.

For et homogent termodynamisk system kan man definere forskjellige materialkonstanter:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \text{ termisk utvidelseskoeffisient.}$$

$$\kappa_T = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T, \text{ isoterm kompressibilitet.}$$

$$\beta = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V, \text{ koeffisienten for trykkforandringer med temperaturforandringer ved konstant volum.}$$

- b) Regn ut verdiene for α , κ_T og β ved $p = 91.2 \text{ atm}$, $T = 300 \text{ K}$, direkte ved hjelp av tilstandslikningen.

Koeffisientene α , κ_T og β er ikke uavhengige, men hører sammen i en generell relasjon

$$\alpha = \beta \kappa_T$$

- c) Bevis dette som en generell relasjon, og sett svarene under b) på prøve i relasjonen.

Foruten den isoterme kompressibilitet kan man spørre etter den adiabatisk kompressibilitet,

$$\kappa_S = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S$$

Det er denne kompressibiliteten som inngår i uttrykket for lyd hastigheten i gassen,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\rho \kappa_S}}, \text{ der } \rho \text{ er massetetthet.}$$

d) Vis at

$$\kappa_S^{-1} = \frac{\beta^2 T}{c_V} + \kappa_T^{-1}$$

der $c_V = C_V/V$ er varmekapasitet per volumenhet:

(Hint: begynn med å betrakte $p(T,V)$ og

$$\text{etabler } \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$$

Problemet blir å omforme $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S$. Det blir bruk for både kjerneregelen (sykliske regel) og teknikken med Maxwell-relasjoner).

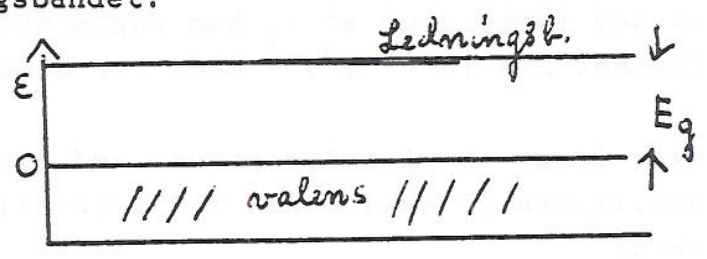
e) La oss spesialisere til en ideell monoatomisk gass, $pV = nRT$, $c_V = \frac{3}{2} nR/V$. Bruk det som er oppgitt ovenfor til å vise at vi for lyd hastigheten får

$$v = \frac{1}{3} \sqrt{5} \cdot (v_T^2)^{1/2}$$

der v_T er atomenes termiske hastighet. Legg merke til at ifølge dette uttrykket avhenger ikke lyd hastigheten av trykket.

Oppgave 3 for FYS 114

Vi betrakter en halvleder, med et energigap E_g mellom valensbåndet og ledningsbåndet.



a) Forklar hva donorer og akseptorer er. Tegn inn akseptor og donornivåer i figuren ovenfor.

- b) Hvor omtrent ligger Fermivånet i en intrinsikk halvleder? Hva er en N-type halvleder, hva er en P-type halvleder og hvor omtrent ligger Fermivånet i henholdsvis N og P type halvledere? Svarene skal gis med en kort begrunnelse.
- c) Skisser elektronfordelingen i en P-N overgang. Begrunn fordelingen ut ifra begrepene under b).

En kompensert halvleder, der konsentrasjonene av akseptorer og donorer er like store,

$$C_d = C_a$$

kan erstatte en intrinsikk halvleder for mange formål. Det må imidlertid settes store krav til homogenitet.

En i middel kompensert halvleder oppviser variasjoner

$$C_d - C_a = \Delta C \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

der $\Delta C > 0$ er amplitude og λ er variasjonenes bølgelengde langs en retning som vi lar være x-aksen.

- d) Lag en skisse der du antyder hva slags varierende elektriske felter du vil få i prøven. En kvalitativ skisse er nok.

Vi har en kompensert prøve med uakseptable varierende felter. Vi vet at $\lambda = 10^{-4}$ m. Vi varmebehandler prøven ved en så høy temperatur at vi kan regne med en diffusjonskoeffisient $D = 10^{-12} \text{ m}^2\text{S}^{-1}$ både for donorer og akseptorer.

- e) Hvor lenge må vi holde prøven ved denne temperaturen for at amplityden ΔC skal synke til 1/10 del av sin opprinnelige verdi?

Eks. H 89. side 5

Oppgave 3 FYS 104

Vi har et system bestående av N oscillatorer med samme frekvens ω . Energienivåene til en oscillator er $\epsilon_j = j\hbar\omega$, $j = 0, 1, 2, \dots$ når vi ser bort fra 0-punkts-energien.

På disse oscillatorene fordeler vi en total energi

$$E = n\hbar\omega.$$

Vi antar at n er et helt tall. N og n er store tall.

- a) På hvor mange forskjellige måter kan vi fordele de n kvantene mellom de N oscillatorer, dvs. hva er det totale antall realisasjonsmåter?
- b) Hva er den fundamentale sammenheng mellom entropi og det totale antall realisasjonsmåter? Vis at entropien blir $S = kN\left\{\left(1 + \frac{n}{N}\right)\ln\left(1 + \frac{n}{N}\right) - \frac{n}{N}\ln\left(\frac{n}{N}\right)\right\}$ når vi regner $(N-1)/N \sim 1$ og bruker Stirlings formel $n! \sim n(n-1)!$.

Finn fra dette også uttrykket for $S(E)$, entropien som funksjon av energi.

- c) Den absolutte temperatur svarende til E kan avledes fra $S(E)$ ved en termodynamisk relasjon. Sett opp denne relasjonen og vis at den fører til at

$$E = \frac{N\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

med uttrykket for $S(E)$ utledet under b).

Eksempel Fys 114/104. H89 side 6

Oppgave 4 for FYS 114, 104

- a) I et system gjøres N forsøk som kan gi forskjellige resultater r_j . Resultatet r_j opptrer med sannsynlighet p_j .

Hvilke betingelser må tilfredsstilles for at man kan anvende Multinomial fordelingen? Multinomial-fordelingen er analog (tilsvarende) med Bernoullifordelingen og gjelder når det er flere enn to mulige utfall ($j = 1, 2, 3, \dots, m$, $m > 2$). En kan også betrakte Bernoullistatistikk som et spesialtilfelle $m = 2$ av Multinomialfordelingen.

- b) Formelen for sannsynligheten for å få R_j utfall av typen r_j i $N \geq R_j$ forsøk kan gis som

$$P_N(R_j) = \frac{N!}{R_j!(N-R_j)!} p_j^{R_j} (1-p_j)^{N-R_j}$$

Gi en kort begrunnelse for denne formelen.

- c) Betrakt en Einstein krystall med $N = 4$ atomer som alle er endimensjonale oscillatorer. Hver oscillator kan ha energien

$$\epsilon_n = n\epsilon_0 \quad \text{der } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Totalenergien for denne krystallen er gitt

$$E = 5\epsilon_0$$

ϵ_0 er konstant.

- i) Hva er midlere energi per partikkel?
- ii) I tabellen gjengis en mulig makrotilstand for krystallen. Her angir symbolene $N_n = 0, \dots, 5$ antall oscillatorer i energinivå n

$$\begin{array}{cccccc} N_0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 \\ 3 & & & & & 1 \end{array}$$

Fyll ut tabellen med alle makrotilstander under de gitte betingelsene.

iii) Finn antall mulige konfigurasjoner W_α for hver av disse makrotilstandene α . Finn også det totale antall mikrotilstander $W_T = \sum_\alpha W_\alpha$.

iv) Hva er \bar{N}_0 og hva er $P(n = 0)$?

$P(n = 0)$ sannsynligheten for at et atom er i tilstanden $n = 0$.

v) Tabuler $P(n)$ for alle n og tegn figur.

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS 104 - Termodynamikk og statistisk fysikk.

Eksamen i: FYS 114 - Statistisk fysikk.

Eksamensdag: Mandag 18. juni 1990.

Tid for eksamen: Kl. 0900-1500.

Oppgavesettet er på 6 sider.

Tillatte hjelpemidler: Regnestav. Godkjente elektroniske regnemaskiner.

Clark: Physical and Mathematical Tables.

Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset.

Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken.

Rottmann: Mathematische Formelsammlung.

Oliver & Boyd: Science Data Book.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene

Oppgave 1 for FYS 114 og FYS 104

Gibbs fri energi for en tynn løsning kan skrives som

$$G = N_1 \mu_1^0(p, T) + N_2 \mu_2^0(p, T) + kT N_1 X (\ln X - 1)$$

$$\text{der } X = N_2/N_1 \ll 1.$$

- a) Definer de størrelsene som inngår, og finn det kjemiske potensial μ_1 for basismaterialet ut fra uttrykket for G ovenfor.

La oppløsningsmiddelet være en væske. T_f^0 er frysepunktet til den rene væske (vi regner $p = \text{konst} = 1 \text{ atm.}$) La en fraksjon $X = N_2/N_1$ med andre molekyler være oppløst i væsken, og la oss anta at disse molekylene ikke er oppløselige i den faste fase.

- b) Vis at vi får en forandring i frysepunktet (en depresjon),

$$\Delta T_f = T_f - T_f^0,$$

til første orden gitt ved

$$\Delta T_f = - \frac{kT_f^0{}^2 x}{q}$$

der q er smeltevarmen per atom for det rene oppløsningsmiddel.

Betrakt nå en frostvæske-blanding bestående av 4 liter vann (H_2O) og 1/2 kg etylenglykol ($C_2H_6O_2$).

- c) Hva blir frysepunktet for blandingen når vi tillater oss å regne som ovenfor?
Smeltevarmen for is er 334×10^3 J/kg. Atomvektene for H, C og O er 1, 12 og 16 henholdsvis. Vi minner om at 1 liter vann veier 1 kg, og vi opplyser at verdien for gasskonstanten er $R = 8.314$ J/mol.K.

Oppgave 2 for FYS 114 og FYS 104

- a) Sett opp, uten bevis, formelen for sannsynligheten $P_N(K, M)$ for å få K kron og $M = N - K$ mynt ved N kast. p er sannsynligheten for kron og q er sannsynligheten for mynt.

Vi forlater nå foreløpig Bernoulli-statistikken for å vende tilbake til den senere.

Vi har en ideell gass med n molekyler per volumenhet. Molekylene kan anses som kuler med radius a som ikke vekselvirker når de ikke er i kontakt.

- b) Lag et estimat for molekylenes midlere fri veglengde mellom støt, l .

Som ordet midlere fri veglengde antyder har vi en fordeling av fri veglengder. La fordelingen være $p(x)$ der $p(x)dx$ er sannsynligheten for en veglengde mellom x og $x+dx$.

Vi skal anta formen

$$p(x) = \frac{1}{l} \exp\left(-\frac{x}{l}\right)$$

- c) Vis at den ovenfor angitte $p(x)$ er riktig normert, og at den gir

$$\bar{x} = l$$

La oss nå se på et stort antall N forskjellige fri baner, hvis veglengder er statistisk uavhengige og fordeler seg etter den angitte $p(x)$. (Slike observasjoner er ikke lette i en gass, men man har analoge situasjoner i analysen av observerbare partikkelspor i tåkekammere, filmer etc., så våre spørsmål er relevante for reelle situasjoner). Av de N veglengende vil et antall N_1 være lengere enn l og et antall N_2 vil være kortere enn l , og $N = N_1 + N_2$.

- d) Vis at

$$\overline{N_1} = \frac{1}{e} \cdot N$$

og at

$$\overline{N_2} = \frac{e-1}{e} \cdot N$$

- e) Hva er den midlere lengde av de fri veglengder som er lengere enn den midlere fri veglengde l ?
(les spørsmålet nøye!)

Svarene under d) er midlere verdier. Forskjellige ensembler med N veglengder vil gi forskjellige N_1 og N_2 , og der vil egentlig være en sannsynlighetsfordeling $P_N(N_1, N_2)$ for hvordan N deler seg i N_1 og N_2 .

- f) Vis at sannsynligheten for å få presist de midlere verdier under d) er

$$P_N(N_1 = \bar{N}_1, N_2 = \bar{N}_2) = \frac{e}{\sqrt{2\pi(e-1)N}}$$

Hint og opplysninger: Dann først sannsynligheter p og q som gir et Bernoulliproblem. Du vil også få bruk for Stirlings formel,

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot e^{-n} \cdot n^n$$

Oppgave 3 for FYS 114 og FYS 104

Vi betrakter elektroner fordelt mellom translasjonstilstander. Translasjonstilstandene er gitt ved en tetthet av tilstander per volumenhet

$$D(\epsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \epsilon^{1/2}, \quad \epsilon \geq 0$$

Her har vi tatt med en faktor 2 for spinn opp og spinn ned.

- a) Utled uttrykket for $D(\epsilon)$.

Disse tilstandene er besatt med en sannsynlighet (F.D. statistikk)

$$f = \frac{1}{\exp(\epsilon - \mu)/kT + 1}$$

(f er kalt n_i , og μ er kalt ϵ_F i Feder's stensil).

- b) Skisser, for en gitt temperatur T og en gitt μ forløpet av f som funksjon av energien ϵ for $\epsilon \geq 0$ når

- a) $\mu/kT \ll -1$
og når
b) $\mu/kT \gg 1$.

La n være det totale antall elektroner per volumenhet i translasjonstilstandene beskrevet med $D(\epsilon)$. n , temperaturen T , og funksjonen $D(\epsilon)$ dikterer hva μ må være.

- c) Sett opp den generelle betingelsen som bestemmer μ som funksjon av T og n .

La oss anta at regimet a) under spørsmålet b) gjelder slik at vi kan sette

$$f \sim e^{\mu/kT} \cdot e^{-\epsilon/kT}, \quad \epsilon > 0$$

- d) Vis, at med denne tilnærmelsen, får vi fra betingelsen under c)

$$\frac{\mu}{kT} = \ln\left(\frac{n}{2Z}\right)$$

der

$$Z = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2}$$

som vi gjenkjenner fra teorien for ideelle gasser som partisjonsfunksjonen per volumenhet for translasjon.

- e) I teorien for monoatomiske ideelle gasser er det kjemiske potensial μ bestemt ved

$$\frac{\mu}{kT} = \ln\left(\frac{n}{Z}\right)$$

Gi en forklaring på og tolkning av forskjellen mellom dette uttrykket og uttrykket under d).

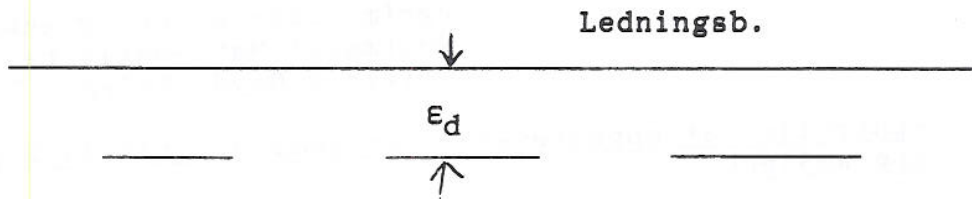
- f) Uttrykket d) er bare gyldig dersom verdien det gir for μ/kT er konsistent med forutsetningene for utledningen. Sett opp en ulikhet som forteller hvor lav elektron tettheten n må være ved en gitt temperatur T for at uttrykket under d) skal være gyldig.

g) Bare for FYS 104

For et typisk metall har vi en elektrontetthet $n = 5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$.
For elektronets masse kan vi bruke fritt elektron masse. Vil uttrykket under d) her være gyldig ved $T = 300 \text{ K}$.

g) Bare for FYS 114

La oss se på en halvleder, med et ledningsbånd som beskrevet i det foregående, og med n_d donoratomer per volumenehet med et elektron-nivå ϵ_d under bunnen av ledningsbåndet. Vi ser helt bort fra



valensbåndet slik at alle elektroner i ledningsbåndet må komme fra donorene.

Vi antar at uttrykket under d) er gyldig for ledningsbåndet.

Sett opp en betingelse som bestemmer den temperaturen der halvparten av donor-nivåene er tomme.

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i FYS 114 - Statistisk fysikk

Eksamensdag: Tirsdag 18. desember 1990

Tid for eksamen: Kl. 0900-1500

Oppgavesettet er på 6 sider.

Tillatte hjelpemidler:

Regnestav. Godkjente elektroniske regnemaskiner.

Clark: Physical and Mathematical Tables.

Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset.

Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken.

Rottmann: Mathematische Formelsammlung.

Oliver & Boyd: Science Data Book.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene

Oppgave 1

- a) Vi skal kaste kron og mynt igjen. Sannsynligheten for kron kalles p og den for mynt kalles q . Kastenes utfall er statistisk uavhengige og $p + q = 1$.

Utled uttrykket for midlere antall kron, \bar{K} , for en serie av forsøk der en hver gang foretar N kast.

- b) Hva er sannsynligheten for at en skal få samme antall kron og mynt ved forsøket beskrevet i a)?
- c) Vi kaster fortsatt kron og mynt, men vi lar forsøket foregå slik at når vi har fått et bestemt antall kron, K , så er forsøket avsluttet og vi teller antall ganger, N , vi har kastet. Vi betrakter altså varierende N og konstant K .

Utled et uttrykk for sannsynligheten $P_K(N)$ for at vi må foreta N kast for å få kron K ganger i forsøket beskrevet over.

- d) Sjekk at sannsynligheten beregnet i spørsmål c) er normert.

Dvs. vis at $\sum_N P_K(N) = 1$

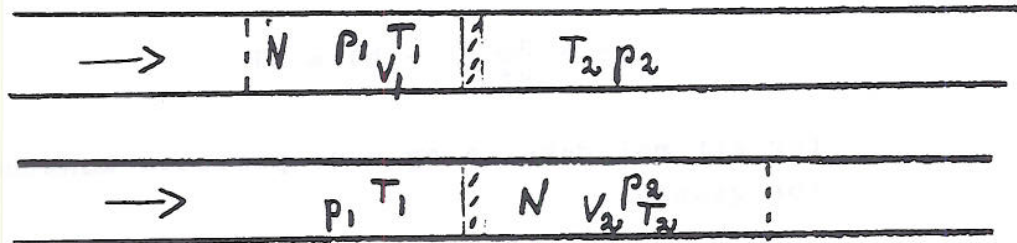
Hint:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \binom{n+k}{k} x^n = \frac{(k+1) \cdot x}{(1-x)^{k+2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

- e) Regn ut den midlere verdi av N ved mange slike forsøk som beskrevet under spørsmål c). (Tipp svaret hvis du ikke kan regne det ut).

Oppgave 2



I et termisk isolert rør strømmes det gass kontinuerlig fra venstre mot høyre. Inne i røret er det plassert en porøs plugg som skaper et trykkfall i gassen når den passerer.

- a) Vis at tilstandsforandringen som gassen erfarer ved passasje gjennom pluggen er karakterisert ved konstant entalpi

$$H = E + pV$$

for en gitt mengde gass.

Den sentrale størrelsen for denne prosessen er Joule-Thomson koeffisienten

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$$

Når $\mu_{JT} > 0$ gir prosessen temperaturfall.

- b) Vis at differensialet dH kan skrives som

$$dH = C_p dT + \left(T \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T + V\right) dp$$

- c) Bruk uttrykket for dH og en Maxwellrelasjon til å vise at

$$\mu_{JT} = \frac{V}{C_p} \left(\frac{T}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - 1 \right)$$

- d) Vis at $\mu_{JT} = 0$ for en ideell gass.

Reelle gasser beskrives mer nøyaktig med Van der Waals likning,

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

for ett mol gass. a og b er positive konstanter karakteriske for gassen.

- e) Vis at for en Van der Waal gass er

$$\mu_{JT} = \frac{V}{C_p} \frac{2a\left(1 - \frac{b}{V}\right)^2 - bRT}{RTV - 2a\left(1 - \frac{b}{V}\right)^2}$$

Vi antar at nevneren er positiv, og at vi kan regne at $b/V \ll 1$. Da vil vi få $\mu_{JT} > 0$ og avkjøling når initialtemperaturen

$$T_1 < T_c$$

der den kritiske temperaturen

$$T_c = \frac{2a}{Rb}$$

N_2 gass (nitrogen) har konstantene $a = 1,34 \text{ atm liter}^2$ og $b = 0,05 \text{ liter}$.

- f) Beregn T_c for N_2 gass.
- g) Vis at positiv nevner i Van der Waal uttrykket for μ_{JT} er ekvivalent med positiv kompressibilitet

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T > 0$$

Hvorfor må kompressibiliteten til et homogent termodynamisk stabilt system være positiv (eller 0, inkompressibel)?

Oppgave 3

- a) Vis at likevektskravet $S = \max$ for E og V konstant kan reformuleres til kravet

$$F = E - T_0 S = \min$$

for et system med V konstant i kontakt med omgivelser med temperatur T_0 .

- b) Helmholtz fri energi er definert som

$$F = E - TS$$

Utled differensialet dF fra den differensielle form for 1. og 2.hovedsetning kombinert, generalisert til åpent system, og vis hvordan S , p og μ kan avledes fra $F(T, N, V)$.

- c) Helmholtz fri energi for en ideell monoatomisk gass kan skrives som

$$F = -kT \ln\left(\frac{Z^N}{N!}\right)$$

der Z er partisjonsfunksjonen

$$Z = \left(\frac{2\pi m k T}{h^2}\right)^{3/2} V = \frac{V}{V_F(T)}$$

Vis, ved hjelp av Stirlings formel $\ln N! = N(\ln N - 1)$ og definisjonen for μ under b, at det kjemiske potensial i gassen er

$$\mu = kT \ln\left(\frac{N}{Z}\right)$$

eller

$$\mu = kT \ln\left(\frac{p V_F}{k T}\right)$$

- d) Vi har en kondensert monoatomisk fase (si fast stoff eller væske) i likevekt med sin egen damp ved temperaturen T . Damptrykket er p og fordampningsvarmen, per atom, er q .

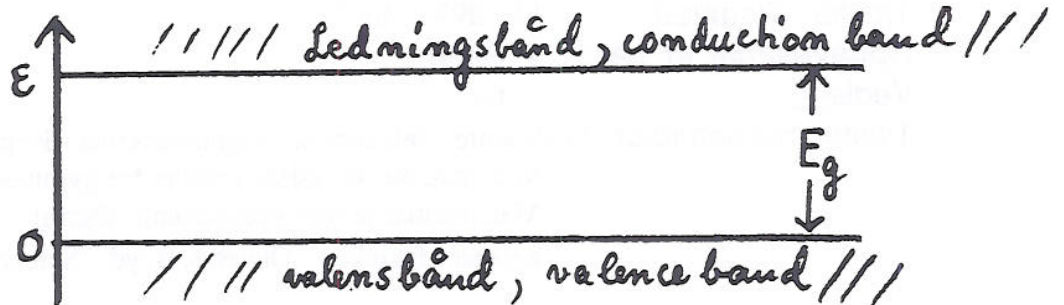
Uttrykk energien ϵ_c og entropien s_c per atom i den kondenserte fase ved p, q, T og parametre som inngår i beskrivelsen av den ideelle gass. Vi regner at vi kan se bort ifra $p v_c$ ledd siden disse er $\ll kT$.

- e) Lag en begrunnelse for at $p v_c \ll kT$ med utgangspunkt i det faktum at den ideelle damp er et mye tynnere system enn den kondenserte fase.

Eks. Fys 114. H90. side 5

Oppgave 4

- 1) Forklar hva akseptorer og donerer er. Tegn inn akseptor og donornivåer nedeufor



- 2) Skisser elektronfordelingen i en P-N overgang. Hva kan en P-N overgang brukes til?
- 3) Hva er osmotisk trykk? Sett opp den loven som gjelder for tynne løsninger, uten bevis.
- 4) Sett opp, uten bevis, Einsteinrelasjonen mellom mobilitet og diffusjonskoeffisient.

UNIVERSITETET I OSLO

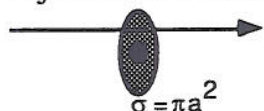
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i : FYS 114 -Termodynamikk og Statistisk Fysikk
 Eksamensdag : Mandag 3. juni 1991
 Tid for eksamen : kl. 900-1500
 Oppgavesettet er på : 7 sider
 Vedlegg : intet
 Tillatte hjelpemidler: Godkjente elektroniske regnemaskiner. Regnestav.
 Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset. Rottman:"
 Mathematische formelsammlung" Øgrim : " Størrelser og
 enheter i fysikken". Oliver & Boyd: "Science Data Book".

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

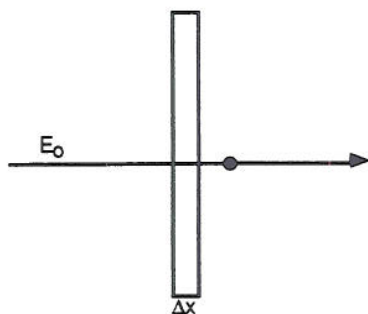
Oppgave 1.

Vi betrakter i oppgaven "projektiler" med energi E_0 som sendes inn i et stoff som består av en samling "atomer". Projektiler og atomer regnes for punktformede. Atomene være i en av to mulige energi tilstander: Grunntilstanden har energi 0(null) og den eksiterte har energi $\Delta\epsilon$ ($\gg kT$). Alle atomene er i grunntilstanden når stoffet ikke utsettes for projektil bombardement.) Tettheten av atomer er ρ (antall/cm³) og vi antar en vilkårlig romlig fordeling. Vi ønsker så å betrakte projektilets energitap når det beveger seg i stoffet. Vi antar at projektilet mister sin kinetiske energi til stoffet ved at atomene blir eksitert. En eksitasjon vil skje dersom avstand mellom projektil og atom er mindre enn a_0 .



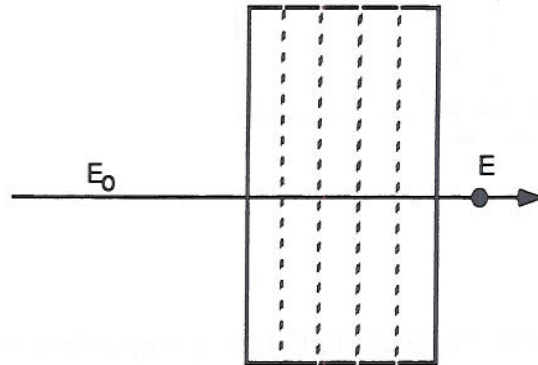
Vi tenker oss at vi kan lage tynne skiver med tykkelse Δx_0 av stoffet. Vi vil regne med en konstant sannsynlighet for eksitasjon av atomer for hver skive.

a)



Vi tenker oss at vi har én skive. Hva er sannsynligheten p for at projektilet skal ha mistet energien $\Delta\epsilon$ ved passasje av skiva? Regn ut verdien av p med følgende oppgitte verdier: $\rho=5 \times 10^{22}$ cm⁻³, $a_0=5 \times 10^{-9}$ cm, $\Delta x_0=2 \times 10^{-8}$ cm

Vi tenker oss at vi kan bygge opp større stoffmengder ved å sette sammen flere skiver. Vi setter sammen N skiver og regner eksitasjon av atomer i skivene som statistisk uavhengig. Vi regner at $E_0 > N\Delta\varepsilon$.



b)

Beregn sannsynligheten, $P_N(K)$, for at projektilet skal ha en energi $E(K) = E_0 - K\Delta\varepsilon$ etter passasje av skivene. (Tips: Se prosessen som en Bernoulli prosess)

Dersom vi hadde hatt dobbelt så mange og halvparten så tykke skiver ville vi: 1) få en annen sannsynlighet, p' , for eksitasjon pr. skive; 2) få en sannsynlighet, $P'_{2N}(K)$, for at projektilet har energien $E(K) = E_0 - K\Delta\varepsilon$ etter passasje av skivene.

c)

Sett opp et uttrykk for $P'_{2N}(K)$.

Vi ville ønske at $P'_{2N}(K) = P_N(K)$ siden disse sannsynlighetene skal beskrive samme fysiske situasjon.

d)

Under hvilke betingelser får vi $P'_{2N}(K) = P_N(K)$? (definert i pkt. b) og c).)

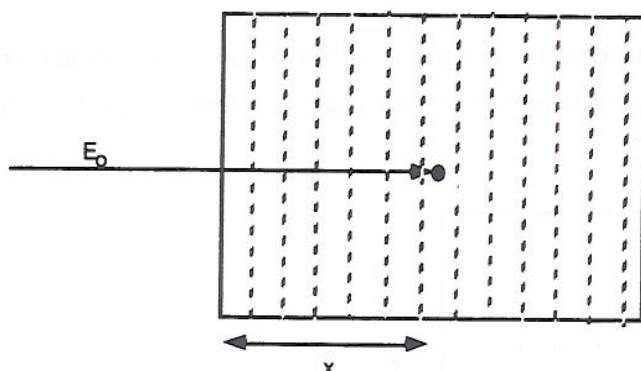
En skal i det etterfølgende ignorere hva en har kommet fram til i pkt. d)

e)

Vi har en sammensetning av skiver som i pkt. b). Kall energitapet av projektilet ΔE . Hva blir middelverdien $\overline{\Delta E}$ av dette enegitapet, og hva blir rms variansen $\overline{\Delta E^2} - \overline{\Delta E}^2$? (Det er lov å huske formler)

I det etterfølgende regner vi at vi har så mange skiver at sannsynligheten for transmisjon av et projektil er null. Når et projektil har mistet all sin kinetiske energi kommer det til ro. Vi nummerer skivene fra 1 og oppover og kaller en vilkårlig skive for skive nummer N . Vi

regner at projektillets energi kan skrives som $E_0 = K\Delta\varepsilon$.



f)

Utleid et uttrykk som gir sannsynligheten, $P_K(N)$ for at projektillet kommer til ro i skive nummer N .

g)

Avstanden x til overflaten er rekkevidden av projektillet.

Beregn den midlere rekke-vidde, \bar{x} , og rms variansen i rekkevidden $\Delta x = \sqrt{x^2 - \bar{x}^2}$.

(

Hint:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \binom{n+k}{k} x^n = \frac{(k+1) \cdot x}{(1-x)^{k+2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

Dersom du ikke har klart oppg. 1f) får du ikke bruk for disse formlene, men skriv allikevel opp formelle uttrykk for Δx

)

Oppgave 2 .

Vi vil i denne oppgave betrakte ideelle monoatomiske gasser som vi beskriver ved Maxwell-Boltzmann statistikk. Det er N atomer totalt og på vanlig måte deles fase-rommet opp i celler: I celle nummer " i " har N_i atomer med energi ε_i . Det finnes g_i tilstander med energi ε_i i celle i . Den termodynamiske sannsynlighet W kan i dette tilfellet tilnærmes med

$$\ln W \approx \sum_i (N_i \ln g_i + N_i - N_i \ln N_i).$$

Det er kjent at én-partikkel-partisjonsfunksjonen z kan skrives som

$$z = V \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

a)

Sett opp et formelt uttrykk for én-partikkel-partisjonsfunksjonen z . D.v.s. fyll ut de tomme plassene i uttrykket

$$z = \sum_{\epsilon_i}$$

b)

Sett opp et uttrykk for besetnings sannsynligheten N_i/N for celle i ved termodynamisk likevekt uttrykket ved g_i , kT , z og ϵ_i

c)

Vis at entropien, S , for et system av N gass-partikler kan skrives som

$$S = \frac{E}{T} + Nk \ln\left(\frac{ze}{N}\right)$$

d)

Vis at Helmholtz fri energi, F , for systemet kan skrives som

$$F = -NkT \ln\left(\frac{ze}{N}\right)$$

e)

Vis at trykket i gassen kan skrives som

$$p = NkT \left(\frac{\partial \ln z}{\partial V} \right)_{T,N}$$

Vi vil så betrakte et lukket (termisk og mekanisk isolert) system bestående av to forskjellige monoatomiske gasser: A og B , som ikke reagerer med hverandre. Vi regner med at gassene er adskilt ved en termisk ledende og glidende skillevegg slik at trykket og temperaturen i de to gassene like.

p, T	p, T
V_A, N_A	V_B, N_B

f)

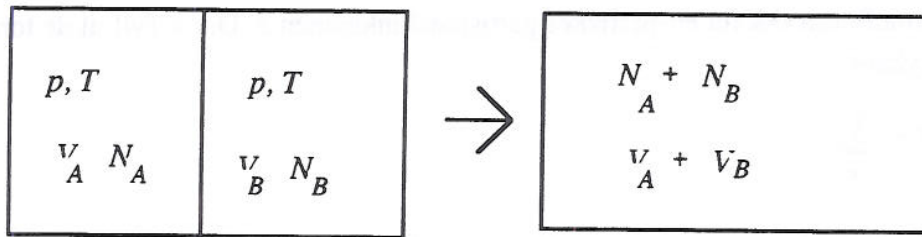
Vis at for situasjonen beskrevet har en

$$\frac{N_A}{N_B} = \frac{V_A}{V_B}$$

g)

Beregn systemets entropi. Angi svaret ved størrelser for gass A og gass B .

Skilleveggen fjernes så og de to gassene blander seg



h)

Hva blir trykk forandringen av systemet?.

Hva blir temperaturforandringen?

i)

Vis at systemets entropi-forandring (før og etter fjerning av skilleveggen) kan skrives som

$$\Delta S = k \ln \left[\frac{(V_A + V_B)^{N_A + N_B}}{V_A^{N_A} \cdot V_B^{N_B}} \right]$$

j)

Er denne prosessen reversibel?

k)

Er uttrykket oppgitt i pkt 2.i) gyldig for identiske partikler($A=B$)? Begrunn svaret.

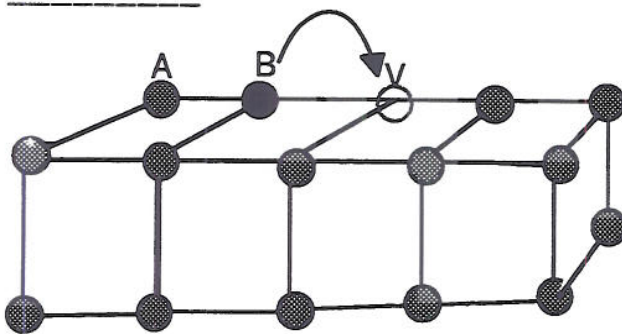
Oppgave 3

a)

Gjengi Fick's 1. og 2. lov og definer symbolene som inngår.

b)

Vis at utsagnet "I likevekt er entropien maksimal for et system (S_i) der E, V og N er konstant" fører til at Gibbs fri energi er minimal for et system (S) der T, p og N er konstant.



Vi antar vi har en krystall bestående av A-atomer ved konstant trykk og temperatur. Vi har totalt N gitterplasser der atomene kan plasseres. På et lite antall gitter-plasser, N_V , sitter ingen atomer. Disse plassene kalles vakanser.

c)

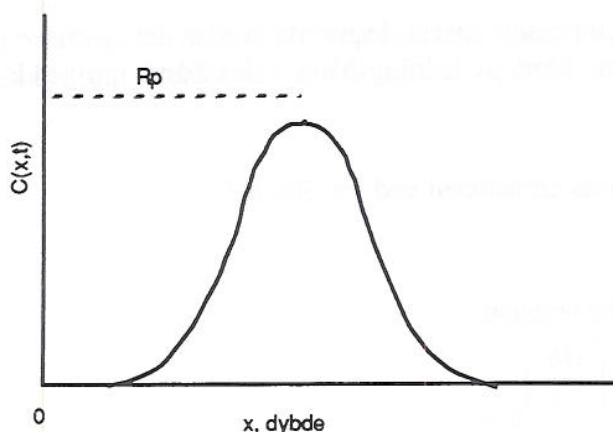
Vis at likevekts konsentrasjonen av vakanser i krystallen kan skrives som:

$$\frac{N_V}{N} = \exp\left(\frac{\Delta S_V}{k}\right) \exp\left(-\frac{\Delta h_V}{kT}\right)$$

der ΔS_V er dannelses-entropien for en vakans og Δh_V er dannelses entalpien for en vakans.

Vi antar vi i krystallen kan løse opp B-atomer. B atomene substituerer A atomene i gitteret. Vi antar at B atomene diffunderer v.h.a vakanser. Det vil si at et atom kan foreta et hopp fra en gitterplass til den nærmeste nabo-plass hvis det er en vakans der.

Vi antar vi har en krystall med A-atomer. Ved tiden $t=0$ introduseres en Gaussisk fordeling av B atomer inn i krystallen (skjematisk som på figuren)



Fordelingen av B-atomer ved tiden $t=0$ er da

$$C(x, t = 0) = C_0 \exp\left(-\frac{(x - R_p)^2}{\Delta R_p^2}\right)$$

Vi skal så finne fordelingen for $t > 0$ når B atomene diffunderer. Diffusiviteten av B-atomer kalles D . Fordelingen er så nær overflaten at dette må tas i betraktning for tider vi er interessert i. Vi regner at vi har den samme hopp sannsynlighet til tomme gitterplasser på overflaten som inne i materialet, mens sannsynligheten for hopp ut av krystallen regnes lik null. Vi kan da populært si at B-atomene blir reflektert ved overflaten.

d)

Argumentér for at én randbetingelse i diffusjonsproblemet skissert ovenfor er

$$j_B(x=0, t > 0) = 0; \text{ hvor } j_B \text{ er strømtettheten av B atomer}$$

e)

Finn konsentrasjonen for $t > 0$ og $x \geq 0$, og vis at den kan skrives som

$$C(x, t) = \frac{2C_0}{\sqrt{1+z^2}} \exp\left(-\frac{1+y^2}{1+z^2}\right) \cosh\left(\frac{2y}{1+z^2}\right)$$

der

$$y \equiv \frac{x}{\Delta R_p}; \text{ og } z \equiv \frac{\sqrt{4Dt}}{\Delta R_p}$$

f)

Hvordan ville du sjekke at løsningen oppgitt i 3e) var riktig? Angi matematisk minst 2 betingelser som skal være oppfylt.

Oppgave 4

Spørsmålene i oppgaven har ikke nødvendigvis noen sammenheng og skal besvares kort.

I)

Vi betrakter halvlederen Si som er dopet med 5×10^{16} bor(gr III) atomer per cm^3 . Ved romtemperatur har vi: $n_i = 1.5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ og $E_g = 1.12 \text{ eV}$, der symbolene har sin vanlige betydning. (n_i : intrinsikk ladn. bærerer konsentrasjon, E_g : båndgap) Alle bor atomene er ionisert ved romtemperatur.

a) Regn ut den numeriske verdi av elektron konsentrasjonen i termodynamisk likevekt ved romtemperatur.

b) Tegn opp skjematisk (i et temperatur-energi diagram) hvordan det kjemiske potensial for hull varierer med temperaturen. Merk av ledningsbånd, valensbånd, intrinsikk-ferminivå o.s.v.

c) Regn ut hva blir elektron-konsentrasjonen ved $T = 1300 \text{ K}$?

II)

Utled følgende termodynamiske relasjon:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,N} = \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{V,N} \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N}$$

III)

Utled Gibbs-Duhem relasjonen

IV)

Hva er Joule-Thompson effekten og hva kan den brukes til.

V)

Hva er en termodynamisk likevekts tilstand?.

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i : FYS 114 -Termodynamikk og Statistisk Fysikk
 Eksamensdag : Torsdag 19. desember 1991
 Tid for eksamen : kl. 900-1500
 Oppgavesettet er på : 5 sider
 Vedlegg : ingen
 Tillatte hjelpemidler: Godkjente elektroniske regnemaskiner. Regnestav.
 Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset. Rottman: "Mathematische formelsammlung". Øgrim: "Størrelser og enheter i fysikken". Oliver & Boyd: "Science Data Book".

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Vi vil i denne oppgave betrakte ideelle mono-atomiske gasser. Partisjonsfunksjonen for et slikt system av N atomer antar vi kan skrives som

$$Z = \frac{z_1^N}{N!}$$

Det er kjent at én-partikkel partisjonsfunksjonen z_1 kan skrives som

$$z_1 = n_Q V$$

der kvantekonsentrasjonen er gitt ved

$$n_Q = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

og symbolene ellers har sin vanlige betydning.

a)

Sett opp et formelt uttrykk for E , (det termiske) midlet av den totale energi for et kanonisk system (T, V, N gitt) ved temperaturen T . Definer symboler som inngår i uttrykket.

b)

Vis at middel-energien E er gitt ved

$$E = kT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_{V, N}$$

c)

Vis at Helmholtz fri energi, F , for et system av N gass-partikler kan skrives som

$$F = -NkT \ln \left(\frac{z_1 e}{N} \right) \quad \left(\text{bruk tilnærmelsen } \ln x! \approx x \ln x - x \right)$$

(i uttrykket er e definert ved $\ln e = 1$)

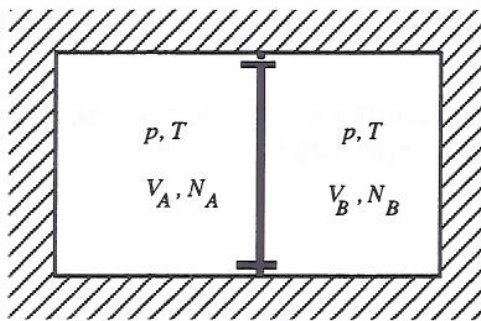
d)

Vis at entropien, S , for et system av N gass-partikler kan skrives som

$$S = Nk \left\{ \frac{5}{2} + \ln \left(\frac{z_1}{N} \right) \right\}$$

e)

Påvis tilstands ligningen for den ideelle gass utfra hva som er oppgitt i denne oppgaven.



Vi vil så betrakte et "mikrokanonisk" system (termisk og mekanisk isolert) bestående av to forskjellige monoatomiske gasser; A og B , som ikke reagerer med hverandre. Vi regner med at gassene er adskilt ved en termisk ledende og glidende skillevegg slik at trykket og temperaturen i de to gassene er like.

f)

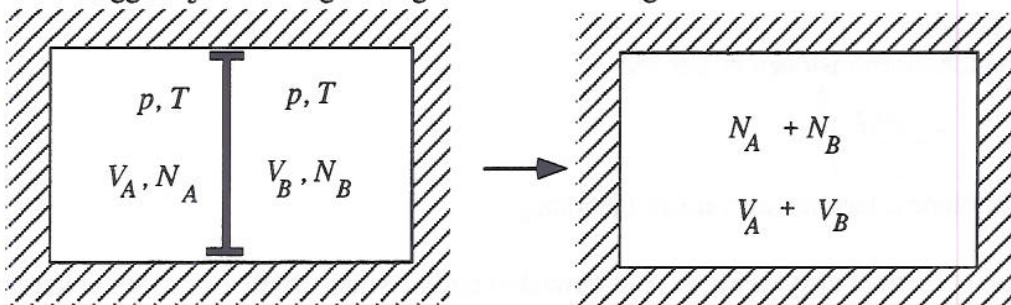
Vis at for situasjonen beskrevet har en

$$\frac{N_A}{N_B} = \frac{V_A}{V_B}$$

g)

Beregn systemets entropi. Angi svaret ved tilstands-variabler for gass A og gass B .

Skilleveggen fjernes så og de to gassene blander seg



h)

Hva blir trykk forandringen av systemet?.

Hva blir temperaturforandringen?

i)

Vis at systemets entropi-forandring (før og etter fjerning av skilleveggen) kan skrives som

$$\Delta S = k \ln \left[\frac{(V_A + V_B)^{N_A + N_B}}{V_A^{N_A} \cdot V_B^{N_B}} \right]$$

j)

Er denne prosessen reversibel? Begrunn svaret.

k)

Er trykket oppgitt i pkt. i) gyldig for identiske partikler ($A=B$)? Begrunn svaret.

Oppgave 2

Vi har et stort system av bosoner. La det eksistere en én-partikkel kvante-tilstand (for bosoner) med energi ϵ .

a)

Skriv opp Gibb's sum for denne kvante-tilstanden.

b)

Vis at det midlere antall bosoner, $\langle N \rangle$, i tilstanden kan skrives som

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon - \mu}{kT}\right) - 1}$$

(Her er μ det kjemiske potensial. De andre symboler har også sin vanlige betydning)

Angi hvilke forutsetninger, du eventuelt har gjort i utledningen

Vi vil så betrakte fluktuasjoner i antallet, N , av bosoner i kvante-tilstanden. La disse være parametrisert ved $\langle (\Delta N)^2 \rangle$, der $\Delta N = N - \langle N \rangle$

..

c)

Vis at $\langle (\Delta N)^2 \rangle = \langle N \rangle (1 + \langle N \rangle)$

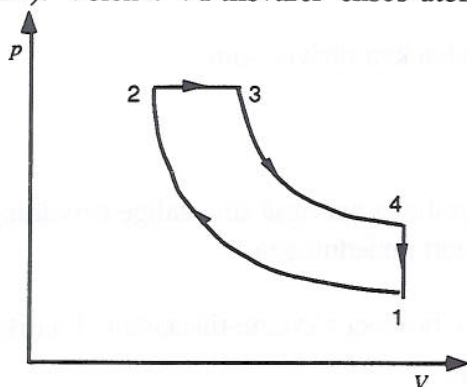
d)

Finn et uttrykk for besetnings-fluktuasjonen for en én-partikkel-tilstand for fermioner og sammenlign med uttrykket for bosoner. Diskuter kort tilfellene $(\mu - \epsilon) \gg kT$ og $(\epsilon - \mu) \gg kT$.

NB, oppgave-settet er ikke slutt!!

Oppgave 3

En diesel-motors syklus antas idealisert som vist på figuren. La oss beskrive de ulike trinnene i denne syklus og hvilke prosesser de representerer: Luft suges inn i en sylinder i innsugningsfasen (sløyfet i figuren). Denne luften trykkes sammen adiabatisk ($1 \rightarrow 2$). Ved pkt. 2 sprøytes diesel-olje inn i sylindere. Siden temperaturen er høy vil olja antenne umiddelbart. Forbrenningen er langsom og i første del av effekt-fasen utvides gassen ved tilnærmet konstant trykk, ($2 \rightarrow 3$). Etter forbrenning er resten av effekt-fasen adiabatisk. ($3 \rightarrow 4$). Veien $4 \rightarrow 1$ tilsvarer eksos-utblåsnings fasen.



Anta en kvasistatisk reversibel maskin som gjennomgår den idealiserte syklus med en ideell gass. Adiabatkonstanten for gassen kaller vi γ , og er gitt ved forholdet mellom varmekapasiteten ved konstant trykk og volum ($\gamma = C_p/C_v$). Adiabatligningen $pV^\gamma = \text{konst}$ antas kjent.

Bruk indeks lik nummeret i pV diagrammet for identifisering av tilstands variable: f.eks. p_1, T_1, p_2, V_2 . La ΔW_{12} betegne arbeidet utført av gassen når gassen forandres fra tilstand 1 til tilstand 2. Oppgaven er laget slik at spørsmål a) til e) er en hjelp til f).

a)

Vis at for en adiabatisk prosess i ideelle gasser har en generelt at $TV^{\gamma-1} = \text{konst}$.

b)

Hva blir forandringen av gassens entropi når maskinen går gjennom én syklus?

c)

Vis at følgende relasjon, $T_1 T_3^\gamma = T_4 T_2^\gamma$, gjelder mellom temperaturene i kretsprosessen.

d)

Beregn ΔW_{23} og ΔQ_{23} , der ΔQ_{23} er varmen gassen mottar.

e)

Beregn ΔW_{41} , ΔE_{41} , og ΔQ_{41} der ΔE_{41} er forandring av gassens energi.

f)

Vis at den ideelle effektiviteten er gitt ved

$$\eta = 1 - \frac{r_e^{-\gamma} - r_k^{-\gamma}}{\gamma [r_e^{-1} - r_k^{-1}]}$$

der $r_k = V_1/V_2$ er kompresjons-forholdet og $r_e = V_1/V_3$ er ekspansjons-forholdet.

Oppgave 4

a)

Vis den termodynamiske relasjonen

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_{p,N}$$

der H er entalpien definert ved $H=E+pV$. S er entropien, T er temperaturen, p er trykket, V står for volum og N for partikkel-antall.

b)

Vis den termodynamiske relasjonen. (Hint : benytt a))

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{S,N} = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \right)_{p,N}$$

c)

Hva er Joule-Thompson effekten og hva kan den brukes til?. Svar kort.

d)

Hva er en termodynamisk likevekts tilstand?. Svar kort.

e)

Skissér hvorledes det kjemiske potensialet vil variere med temperaturen for en én-dimensjonal fermion-gass med konstant partikkel-antall. Merk av null punkt og positiv retning på aksene. Forklar kort.

f)

Finnes det eksempler på prosesser der entropien til et system avtar?. Hvis ikke, gi en begrunnelse! Hvis det finnes, gi et eksempel!

slutt på oppgave-sett

Eks. Fys 119. H91. 5

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i : FYS 114 -Termodynamikk og Statistisk Fysikk
 Eksamensdag : Onsdag 27 maj 1992
 Tid for eksamen : kl. 900-1500
 Opgavesettet er på : 3 sider
 Vedlegg : ingen
 Tillatte hjelpemidler: Godkjente elektroniske regnemaskiner. Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset. Rottman: " Mathematische formelsammlng". Øgrim : " Størrelser og enheter i fysikken". Oliver & Boyd: "Science Data Book".

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

I denne oppgaven antar vi en ideell mono-atomisk gass med spinn lik 0. For angivelse av gassens tilstand (der det er påkrevd) skal du benytte symbolene p , V , N , k og T

a) Beregn hvor mange partikler det er i en gassbeholder som inneholder 1 liter gass med temperatur 300 K og der gassens trykk er en atmosfære (1 atm).

La det være gitt at det kjemiske potensialet av gassen kan skrives som

$$\mu = kT \ln \left(\frac{n}{n_Q} \right) \quad \text{der } n_Q = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

og symbolene har sin vanlige betydning.

b) Bestem Gibb's fri energi, G , og entropien S for gassen

c) Vi kan forestille oss en tenkt inndeling av en gassbeholder i to like store halvdel. Det er fysisk mulig at alle gass partiklene oppholder seg i den ene halvparten. Hva er sannsynligheten for å observere alle partiklene fra oppgave a) i høyre halvdel av beholderen?

d) Blir sannsynligheten for å observere null partikler i høyre halvdel gitt av c)?

Vi tenker oss at vi har gassen i en sylinder som er termisk isolert. I initial tilstanden holdes alle partiklene i venstre halvdel ved en skille-vegg og har volumet V . Skilleveggen fjernes plutselig og gassen ekspanderer til volumet $2V$. (Denne prosess kalles fri ekspansjon)

e) Hvor meget arbeid, ΔW utfører gassen i løpet av ekspansjonen?.

f) Hvor meget forandrer temperaturen seg og hva blir entropiforandringen?

g) Er denne prosessen (ekspansjonen) reversibel?

Oppgave 2

- a) Skriv opp et generelt uttrykk for partisjonsfunksjonen, Z , for et "kanonisk system" (T, V, N gitt) og definér symbolene som inngår.

Anta en enkelt elementærmagnet med magnetisk moment m i et magnetfelt B . Magneten kan enten være orientert motsatt feltet og har da energien mB eller samme vei som feltet og har da energien $-mB$.

- b) Sett opp et uttrykk for énpartikkel partisjonsfunksjonen z_1 for en elementær magnet som beskrevet over.

Betrakt et enkelt spinsystem med N elementære magneter som beskrevet over. Antall magneter som peker henholdsvis med og mot feltet kalles N^\uparrow og N^\downarrow . Overskudds spinnet er gitt ved $2s = N^\uparrow - N^\downarrow$

- c) Vis at partisjonsfunksjonen av systemet er gitt ved.

$$Z = \sum_{2s=-N}^N \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} + s\right)! \left(\frac{N}{2} - s\right)!} \exp\left(\frac{2smB}{kT}\right)$$

- d) Vis utfra den termodynamiske definisjonen av Helmholtz energi $F (=E-TS)$ at generelt gjelder

$$F = -kT \ln Z$$

- e) Vis at for spinsystemet vi betrakter gjelder

$$F = -NkT \ln \left(2 \cosh \left(\frac{mB}{kT} \right) \right)$$

- f) Finn energien, E , av det enkle spinn system og vis at det termiske midlet av

$$\text{overskudds-spinnet er gitt av } \langle 2s \rangle = N \tanh \left(\frac{mB}{kT} \right)$$

- g) Hva blir grenseverdien av $\langle 2s \rangle$ i tilfellene i) $B \rightarrow 0$, ii) $T \rightarrow 0$, iii) $T \rightarrow \infty$?

Vi betrakter et paramagnetisk salt hvor de magnetiske ioner har spinn lik $1/2$. Vi antar vi kan beskrive systemet som et enkelt spinn modell-system. Den eneste esitasjonsformen vi tar eksplisitt hensyn til er spinn uorden. Det paramagnetiske salt har temperaturen 0.6 K ved et magnetfelt på 4 Tesla. Systemet isoleres termisk og magnetfeltet reduseres sakte til 6×10^{-3} Tesla.

- h) Hva blir slutt temperaturen av saltet? (Hint: betrakt demagnetiseringen som adiabatisk d.v.s isentrop)

La oss definere det magnetiske moment M av det magnetiske system ved

$$M \equiv - \left(\frac{\partial E}{\partial B} \right)_S \quad \text{der } S \text{ er entropien}$$

- i) Vis at

$$M = -\frac{E}{B}$$

For et magnetisk system er magnetfeltet B her en ekstern variabel og spiller en rolle tilsvarende den til volumet for en ideell gass. Arbeidet gjort ved en forandring av B blir altså $dW = MdB$ (ved konstant M). Vi kan da danne oss Gibbs fri energi som $G = E - TS + MB$

j) Vis at

$$B = \left(\frac{\partial G}{\partial M} \right)_T$$

k) Vis at

$$\left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_T = - \left(\frac{\partial B}{\partial T} \right)_M$$

Oppgave 3

Delspørsmål i denne oppgaven har ikke nødvendigvis noen innbyrdes sammenheng og kan besvares kort.

- a) Vis at prinsippet om entropiens økning fører til at Gibb's fri energi er minimal for et system der T , p og N er konstant. Her er p trykket, N er antall partikler og T er temperaturen.
- b) Utled massevirkningsloven for elektroner og hull i halvledere.
- c) Hva sier termodynamikkens 3de hovedsetning?. Gi en mikroskopisk interpretasjon av hovedsetningen og forklar kort hva den innebærer.
- d) Hva menes med negativ temperatur?
- e) Angi en rimelig tallverdi, med angitt dimensjon, for varmekapasiteten ved konstant trykk av 1 mol luft ved 300 K og et trykk på 1 atm?
- f) Utled et uttrykk for tilstands tettheten av en to dimensjonal fermion gass.

slutt på oppgave settet

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i :	FYS 114 -Statistisk Fysikk
Eksamensdag :	Torsdag 17de desember 1992
Tid for eksamen :	kl. 900-1500
Opgavesettet er på :	3 sider
Vedlegg :	ingen
Tillatte hjelpemidler:	Regnestav, Godkjente elektroniske regnemaskiner. Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset. Rottman: "Mathematische formelsammlung". Øgrim : " Størrelser og enheter i fysikken". Oliver & Boyd: "Science Data Book".

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

La det være kjent at det indre kjemiske potensial, μ , av partiklene i en ideell gass er gitt ved

$$\mu = kT \ln \left(\frac{n}{n_Q} \right) \quad ; \quad n_Q = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad [1.1]$$

der symbolene har sin vanlige betydning.

- Forklar kort hvilken betydning størrelsen n_Q har og hvilket fortegn μ har.
- Utled et uttrykk for entropien av en ideell gass når det totale kjemiske potensialet er gitt ved uttrykket [1.1] angitt ovenfor.

En eksternt kraft virker på partiklene i gassen. Denne opptrer på samme måte som gravitasjonskraften som virker på atmosfæren rundt jorda. Den kraft som virker på hver partikkel er gitt av et potensial som kan skrives som

$$\Phi(x) = mgx \quad [1.2]$$

der g er gravitasjonskonstanten og x er høyden over havet.

- Skriv opp et uttrykk for det totale kjemiske potensial av en gasspartikkel i høyden x , når vi regner vi har ideell gass og tilnærmet isoterme betingelser
- Utled et uttrykk for hvorledes trykket p vil variere med høyden x .
- Utled et uttrykk for det termiske midlet av den potensielle energien gitt ved [1.2].
- Beregn et uttrykk for gravitasjonskraftens bidrag til atmosfærens varmekapasitet.

Vi har et kalorimeter (=en innretning for å måle varmekapasitet) der vi har 1 liter N_2 - gass i en kubisk lukket beholder. Gassens isokore varmekapasitet ved hav-overflaten måles. Resultat kalles C_{V1} . Gassens tilstands parametre var: $p=0.1$ atm. $T=300$ K, $V=1$ liter. Kalorimeteret blir så plassert i en romferge. Når ferga er 500 km over hav-overflaten måles varmekapasiteten igjen. Temperaturen er også nå 300 K. Vi måler verdien C_{V2} .

- Bestem forskjellen $C_{V2} - C_{V1} = \Delta C_V$.

Ekv Fys 114. H 92. s 1

Oppgave 2

Du skal i denne oppgave regne på en syklisk reversibel maskin som benytter en fotongass som medium. Fotongassen betraktes som hulroms-stråling. Hulroms-strålingens energitetthet er gitt ved

$$\frac{E}{V} = aT^4 \quad \left(\text{der } a = \frac{\pi^2 k^4}{15 \hbar^3 c^3} \right)$$

Ut fra dette uttrykk (+ generelle termodynamiske uttrykk) kan en finne andre termodynamiske variable og funksjoner. Vi antar at maskinens syklus består av 3 delprosesser: en isoterm delprosess (1→2), en isokor ($V=\text{konst}$) prosess (2→3) og en adiabatisk ekspansjon (3→1). Anta at maskinen utfører et positivt arbeid.

Du skal for denne maskinen beregne effektiviteten. Pkt a) b) nedenfor er ment som en hjelp for pkt. c). Benytt tallene 1, 2 og 3 som indikert over for å angi delprosessene og tilstandsvariable.

- Regn ut entropien, S , og trykket, p , av en fotongass uttrykt ved a , V og T .
- Tegn syklusen skjematisk i et p - V diagram og et S - T diagram. Benytt uttrykkene fra pkt. a) for å tegne prosessene skjematisk.
- Beregn effektiviteten av maskinen. Uttrykk svaret kun ved V_1 og V_3 .

Oppgave 3

- Skriv opp et generelt uttrykk for partisjonsfunksjonen, Z , for et "kanonisk system" (T, V, N gitt) og definér symbolene som inngår.

Anta et forenklet system bestående av N like harmoniske oscillatorer. Et energi nivå i systemet karakteriseres med hovedkvantetallet n og energien til nivået er gitt ved.

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{N}{2}\right) \hbar \omega$$

der \hbar er Planks konstant og ω er oscilatorenes sirkelfrekvens. Nullpunkts-energien $\frac{\hbar \omega}{2}$ er medregnet.

- Sett opp et uttrykk for énpartikkel partisjonsfunksjonen, z_1 , for en enkelt oscillator i dette system.
- Hvert energinivå i systemet (med mange osc.) har en degenerasjon. Forklar hvordan du tenker for å finne denne degenerasjonen og vis at partisjonsfunksjonen blir

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(N+n-1)!}{n!(N-1)!} \exp\left(-\left(n + \frac{N}{2}\right) \frac{\hbar \omega}{kT}\right)$$

Hint/opplysning: Du kan kanskje få bruk for flg. matematiske identitet

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+k}{j} x^j = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \quad ; \quad x < 1$$

- d) Vis utfra den termodynamiske definisjonen av Helmholtz energi $F(=E-TS)$ at generellt gjelder

$$F = -kT \ln Z$$

- e) Vis at for oscillator systemet vi betrakter gjelder

$$F = N \left(\frac{\hbar\omega}{2} + kT \ln \left(1 - \exp \left(-\frac{\hbar\omega}{kT} \right) \right) \right)$$

- f) Finn energien, E , av det enkle oscillator system og det termiske midlet av hovedkvantetallet $\langle n \rangle$.
- g) Hva blir grenseverdien av $\langle n \rangle$ for tilfellene i) $T \rightarrow 0$ og ii) $T \rightarrow \infty$?
- h) Bestem den asymptotiske temperatur avhengighet av systemets varmekapasitet når temperaturen går mot det absolutte nullpunkt.

Oppgave 4

Delspørsmål i denne oppgaven har ikke nødvendigvis noen innbyrdes sammenheng.

- a) Anta en Si krystall dopet ved As til en konsentrasjon $1 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. I Si er båndgapet 1.14 eV ved rom-temperatur (300K) og den intrinsiske ladningsbærer konsentrasjonen n_i er $1.5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. Ionisasjonsenergien til As atomene er 0.01 eV. Kvantekonsentrasjonen, n_C , for elektroner er $2.7 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ved 300 K. n_C kalles også effektiv tilstandstetthet for ledningsbåndet.
- Regn ut hvor stor blir hullkonsentrasjonen n_h ved romtemperatur.
 - Regn ut hvor stor blir hullkonsentrasjonen n_h ved 600 °C.
 - Regn ut hva temperaturen er når 1/3 av As atomene er ionisert.
- b) Forklar kvalitativt hvorfor varmekapasiteten til ledningselektronene i metaller bidrar lite til den totale varme-kapasitet av et metall ved rom-temperatur. Svar kort.
- c) Betrakt et paramagnetisk salt som en samling elementære magneter. Hvorledes kan et paramagnetisk salt benyttes ved nedkjøling? Svar kort, men få med prinsippene.
- d) Vis at dersom " Entropien er maksimal for et mikrokanonisk system (E, V, N er konst)" så gjelder at "Gibbs fri energi er minimal for et system der N, T og p er konstant".

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i : FYS 114 -Statistisk Fysikk
 Eksamensdag : Fredag 28de maj 1993
 Tid for eksamen : kl. 900-1500
 Opgavesettet er på : 5 sider
 Vedlegg : ingen
 Tillatte hjelpemidler: Regnestav, Godkjente elektroniske regnemaskiner.
 Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset.
 Rottman: "Mathematische formelsammlung".
 Øgrim : " Størrelser og enheter i fysikken".
 Oliver & Boyd: "Science Data Book".

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Anta vi har et termisk og mekanisk isolert og lukket system. Systemet kan deles i to deler bestående av det samme faste stoff. Se figur nedenfor. Volumet av del A er slik at det er N_A atomer der. I del B er det $N_B=2N_A$. atomer. Tallverdien av N_A velges lik Avogadros tall. Vi betrakter i denne oppgave et såpass lite temperatur-område at vi kan anta at varmekapasitetene er konstante og gitt ved $3Nk$ der k er Boltzmanns konstant og N er antall atomer.. De to delene kan isoleres termisk ved at en skillevegg (masseløs) settes mellom dem, eller kan bringes i kontakt ved at skilleveggen mellom dem erstattes med en ideell varmeledende vegg.

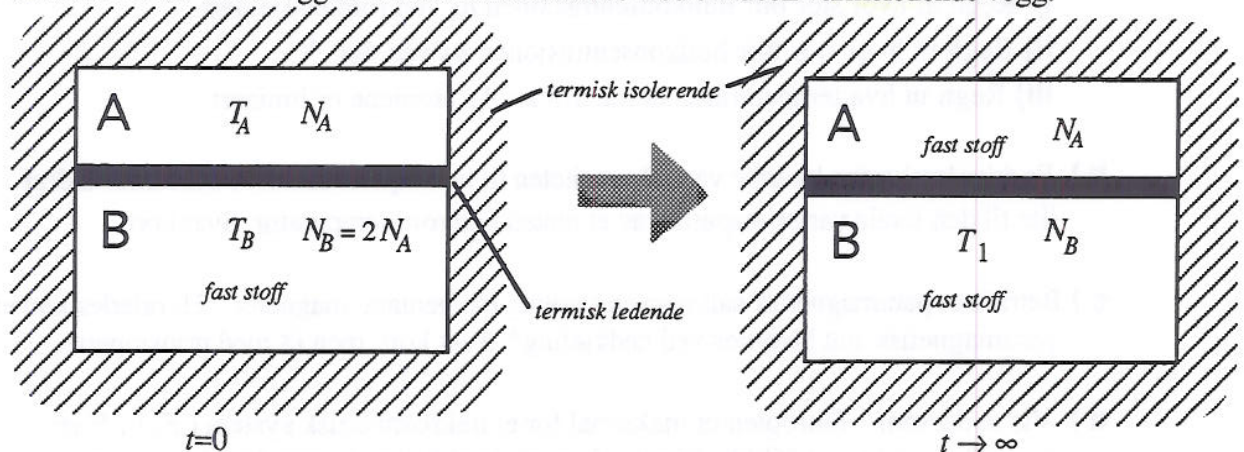


Fig. 1. 1

Vi kan gjøre temperaturen i de to delene forskjellig (med termisk isolering mellom). Vi kan så sette de to delene i termisk kontakt, som vist ved tiden $t=0$ i Fig. 1.1 til venstre. Delene vil så oppnå termisk likevekt og temperaturen antar verdien T_1 som vist til høyre. Sett $T_A=315$ K og $T_B=300$ K.

a) Regn ut hvor stor T_1 blir. Angi svaret med symboler definert over. Regn også ut tallverdien av T_1 .

- b) Regn ut et uttrykk for entropi forandringen, ΔS_1 , for prosessen beskrevet over. Begynnelsestilstanden er skissert til venstre i Fig. 1.1 og slutt tilstanden til høyre. Angi svaret med allerede innførte symboler..

- c) Er prosessen beskrevet over reversibel? Begrunn svaret.

Vi skal i det følgende regne på samme system som angitt innledningsvis. Vi skal nå undersøke om vi kan få utført et arbeid ved hjelp av temperatur-forskjellen mellom de to delene. Hvorledes arbeidet blir utført er egentlig uvesentlig, men vi kan tenke det er slik figur 1.2 antyder.

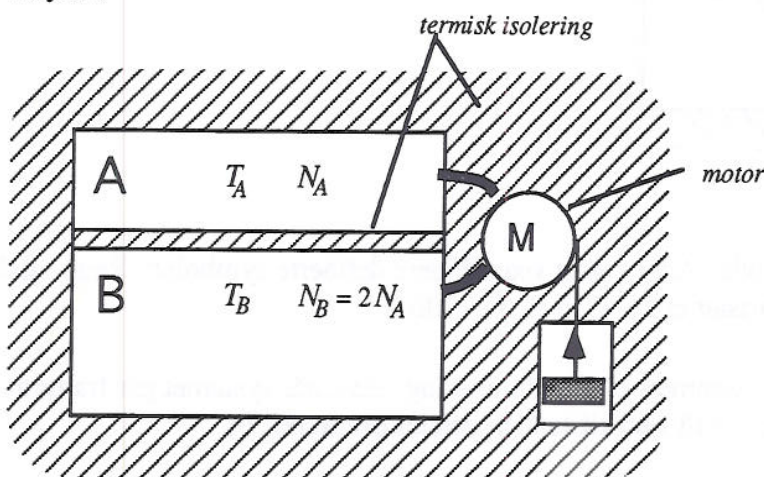


Fig. 1. 2

De to delene er forbundet termisk til en motor. De to delene utveksler varme kun gjennom motoren. (Dette kunne vært en elektro-motor som ble drevet av termo-elektrisk spenning.) Motoren kan utføre et arbeid f.eks. løfte et lodd. Ignorer varmekapasitet til motor og eventuelle lodd. Vi tenker oss prosessen startet når temperaturen i de to deler er T_A og T_B og avsluttet når motoren ikke kan utføre mer arbeid.

- d) Hva blir det maksimale nytte-arbeid ΔW_2 systemet beskrevet over kan utføre? Angi svaret med symboler. Regn også arbeidet i energi-enheter ved å sette inn tallverdi for T_A , T_B , og N_A som benyttet tidligere i oppgaven (315 K, 300 K, Avogadros tall)

Vi skal i det etterfølgende fortsatt anta et todelt system der del B er det samme faste stoff som tidligere i oppgaven men der del A er en mono-atomisk ideell gass, inneholdende N_A atomer.

- e) Utled uttrykk for varmekapasiteten for en ideell mono atomisk gass ved konstant volum C_v og ved konstant trykk C_p . Angi svaret for en gass som inneholder N atomer.

For det todelte system der den ene del er ideell gass, lar vi systemet være i mekanisk likevekt med omgivelsene. Altså er trykket i gassen lik omgivelses-trykket når vi har likevekt.

Anta en initial tilstand som angitt i Fig. 1.3 (Se neste side). De to delene er forbundet med en termisk ledende skillevegg og vil komme til termisk likevekt og ha temperaturen T_3

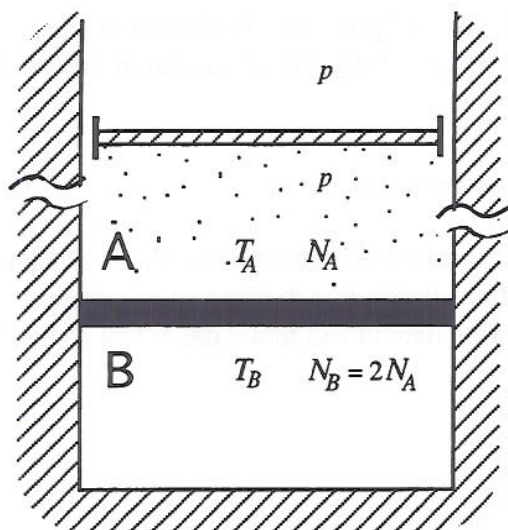


Fig. 1. 3

- f) Regn ut hvor stor T_3 blir. Angi svaret ved tidligere definerte symboler. Regn også ut tallverdien av T_3 . (fortsatt er $T_A=315$ K, $T_B=300$ K)
- g) Regn ut et uttrykk for systemets entropi forandring , ΔS_3 , når systemet går fra initial tilstanden angitt i Fig. 1.3 til slutt-tilstanden ved temperaturen T_3 .

Anta vi lar systemet utføre et nyttig arbeid på helt tilsvarende vis som angitt i Fig. 1.2 men med vekselvirkning til omgivelser som angitt i Fig 1.3.: De to delene - gass og fast stoff-er altså termisk forbundet kun via en motor. Gassen har omgivelses-trykket p ved likevekt.

- h) Regn ut et uttrykk for det største nytte-arbeid (som f.eks.en motor kan utføre) , ΔW_3 , når systemet starter i begynnelses-tilstanden angitt ved fig 1.3. Angi svaret med symboler.

Oppgave 2

Vi vil i denne oppgave betrakte kjemiske reaksjoner mellom molekyler i en ideell gass. Vi kan angi den kjemiske reaksjon ved reaksjons-likningen på følgende form:

$$\sum_j \nu_j A_j = 0 \quad [2.1]$$

der A angir den kjemiske partikkel og ν er reaksjons koeffisienten. Du kan anta som kjent at for en ideell gass er énpartikkel partisjonsfunksjonen for translasjon gitt ved

$$z_1^{(tr)} = n_Q V \text{ der } n_Q = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \text{ og } V \text{ er volumet.} \quad [2.2, 2.3]$$

Videre kan du anta som kjent at det kjemiske potensial for en ideell gass kan skrives som

$$\mu = kT \ln \left(\frac{N}{z_1} \right) \quad [2.4]$$

der z_1 er den totale enpartikkel partisjonsfunksjonen og N er totalt antall partikler.

- a) Utled massevirknings-loven og før den eventuelt over på følgende form.

$$\prod_j (n_j)^{v_j} = \prod_j \left(\frac{z_{1j}}{V} \right)^{v_j} \quad [2.5]$$

der n_j betegner konsentrasjonen av partikkelslag j og z_{1j} er (den totale) énpartikkel funksjonen for molekyl-slag j .

b) Vis at massevirknings-loven også kan skrives på formen

$$\prod_j (p_j)^{v_j} = K_p(T) \quad [2.6]$$

der p_j er partialtrykket av molekyl j . Vis at $K_p(T)$ kun er en funksjon av temperaturen for en gitt reaksjon.

c) Betrakt nå den spesifikke reaksjonen



Vis at likevekts konstanten fra punkt b) kan skrives som.

$$K_p(T) = \frac{\sqrt{27}}{4} \frac{f^2}{1-f^2} p \quad [2.8]$$

der f betegner andelen NH_3 molekyler som har dissosiert (Forklaring: Dersom vi starter med 10 NH_3 molekyler er $f=0.3$ når tre av molekylene har dissosiert)

Oppgave 3

Vi har en halvledende Si krystall dopet med Sb til en konsentrasjon $n_D = 1 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. I Si er båndgapet 1.14 eV ved rom-temperatur (300 K). Anta at båndgapet er uavhengig av temperaturen for utregningene i denne oppgaven. Den intrinsiske ladningsbærer konsentrasjonen, n_i , er gitt ved $n_i = 1.5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ved rom temperatur. Jonisasjonsenergien til Sb atomene er 0.04 eV. Kvantekonsentrasjonen, n_C , for elektroner er $2.7 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ved 300 K. n_C kalles også effektiv tilstandstetthet for ledningsbåndet.

a) Vis at konsentrasjonen, n_D^+ , av joniserte Sb atomer kan skrives som.

$$n_D^+ = \frac{n_D}{1 + 2 \exp\left(\frac{\mu - \epsilon_D}{kT}\right)}$$

her er ϵ_D energien av donor nivået og μ er det kjemiske potensial for elektroner.

b) Regn ut (ved symboler og tallverdi) hvor stor blir hullkonsentrasjonen n_h ved romtemperatur.

c) Regn ut (ved symboler og tallverdi) hvor stor blir hullkonsentrasjonen n_h ved 600 °C.

d) Regn ut (ved metode og estimert tallverdi) hva temperaturen er når 1/3 av Sb atomene er jonisert.

NB oppgavesettet fortsetter.....

Oppgave 4

Delspørsmål i denne oppgaven har ikke nødvendigvis noen innbyrdes sammenheng.

a) Vis den termodynamiske relasjonen:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

der symbolene har sin vanlige betydning.

b) Utled formelen for det termiske middel av antall bosoner, $\langle N(\epsilon) \rangle$, i et kvantenivå med energi ϵ .

c) Skriv opp Clausius-Klapeyrons likning og forklar hvilken situasjon likningen beskriver.

d) Besvar følgende spørsmål og gi en kort begrunnelse: Er det teoretisk mulig at entropien av et system øker? Er det praktisk mulig at entropien av et system øker? .

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskaplige fakultet

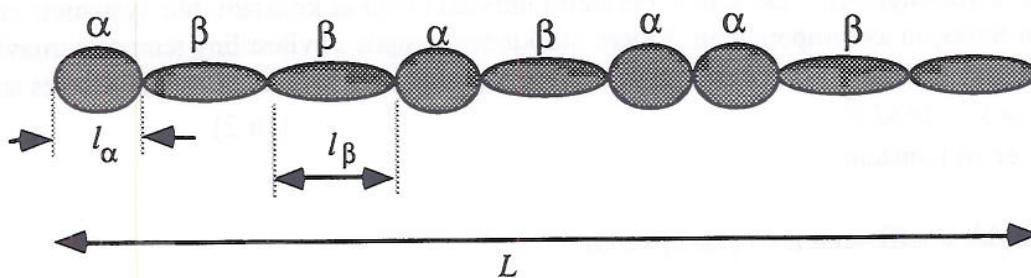
Eksamen i :	FYS 114 -Statistisk Fysikk
Eksamensdag :	Torsdag 16de des. 1993
Tid for eksamen :	kl. 900-1500
Opgavesettet er på :	3 sider
Vedlegg :	ingen
Tillatte hjelpemidler:	Regnestav, Godkjente elektroniske regnemaskiner. Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset. Rottman: "Mathematische formelsammlng". Øgrim : " Størrelser og enheter i fysikken". Oliver & Boyd: "Science Data Book".

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

- a) Vis at dersom Z_A og Z_B er partisjonsfunksjonen for to systemer i termodynamisk likevekt, vil partisjonsfunksjonen Z for det totale system bestående av begge systemene være gitt av
- $$Z = Z_A Z_B \quad [1a-1]$$
- Angi eksplisitt under hvilke forutsetninger denne likning gjelder.
Gi et eksempel der [1a-1] ikke er gyldig.

Vi skal heretter betrakte en forenklet modell som kanskje kan beskrive strekking av muskler. Modell systemet består av en rettlinjert kjede med N enheter/ledd. Enhetene kan enten være i en α -fase og ha lengden l_α eller de kan være i en β -fase og ha lengden l_β . Merk at l_α og l_β regnes som konstanter.



Enhver enhet kan gå fra α -fase til β -fase og tilbake via en kjemisk reaksjon. N_α betegner antall enheter i kjeden som er i α -fasen. Vi antar at mulige kvantenivåer for ledd i α -fase er ulike mulige kvante tilstander for ledd i β -fase. Partisjonsfunksjon for ett enkelt ledd i α -fase betegnes med symbolet z_α , mens z_β brukes for et ledd i β -fase. Ansé z_α og z_β for kjent.

- b) Finn et uttrykk for partisjonsfunksjonen Z av systemet (uttrykket ved N , N_α , z_α og z_β .)

La K være den ytre kraft som skal til for å strekke kjeden til en viss total lengde L .

- c) Vis ved hjelp av enkel termodynamisk argumentasjon at den termodynamiske identitet for systemet kan skrives som.

$$TdS = dE - KdL \quad (dN=0) \quad [1c-1]$$

der S er entropien og E er den indre energi av systemet.

Benytt uttrykket [1c-1] til å uttrykke dS ved E og N_α som tilstandsvariable.

- d) Vis at for systemet har en

$$\left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_{N_\alpha} = -\frac{1}{l_\alpha - l_\beta} \left(\frac{\partial S}{\partial N_\alpha}\right)_T \quad [1d-1]$$

- e) Utled følgende uttrykk

$$\left(\frac{\partial E}{\partial L}\right)_T = K - T \left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_L \quad [1e-1]$$

som gjør en i stand til å måle forandring i indre energi ved å måle K , T og L for systemet.

- f) Vis at tilstands likningen for systemet kan skrives som.

$$\frac{K(l_\alpha - l_\beta)}{kT} = \ln\left(\frac{N_\alpha z_\beta}{N - N_\alpha z_\alpha}\right) \quad [1f-1]$$

Angi hva grenseverien for N_α blir når K går mot uendelig.

Dersom ingen kraft virker på kjeden sier vi den er i hvile stilling

- g) Finn et uttrykk for $N_{\alpha 0}$; antall ledd i α -fase for hvile stillingen. Uttrykk svaret ved tidligere definerte symboler.

For små lengde avvik fra hvilestillingen kan kraften skrives tilnærmet som

$$K = \left(1 + \frac{z_\alpha}{z_\beta}\right) \frac{kT}{N(l_\alpha - l_\beta)^2} \Delta L \quad \equiv aT\Delta L \quad [1h-1]$$

der ΔL er forlengelsen. Dersom a definert i uttrykket over er konstant, blir systemets energi kun en funksjon av temperaturen. Videre blir kjedens lengde i hvilestilling temperaturuavhengig. Dersom en ignorerer entropiens temperatur-avhengighet i hvilestilling kan den skrives som

$$S = S_0 - b(\Delta L)^2 \quad [1h-2]$$

der S_0 er en konstant

- h) Uttrykk koeffisienten b i [1h-2] ved a

Vi tenker oss i det etterfølgende at vi har en syklisk reversibel maskin som benytter modell systemet vårt som medium. Tilstands likningen for systemet antas gitt ved likning [1h-1] der vi antar at a er en konstant. Syklusen består av :

(1->2) en isoterm strekking av kjeden ved lav temperatur, $T_L = T_1 = T_2$

(2->3) en en adiabat

(3->4) en isoterm slakking av kjeden ved høy temperatur, $T_H = T_3 = T_4$,

(4->1) en en adiabat

- i) Tegn skjematisk opp maskinens syklus i et K - L diagram, angi også den funksjonelle sammenheng av prosessene. (forklaring: pV =konst angir en isoterm for en ideell gass)
- j) Beregn arbeidet utført av muskelen i del-prosessene (1->2) og (3->4). Angi størrelsene med symbolene ΔW_{12} og ΔW_{34} og benytt ende-punktene som indeks for tilstandsvariablene. (K_1, L_1, T_1) (K_2, L_2, T_2) osv.
- k) Beregn arbeidet ΔW_{23} og ΔW_{41} i del-prosessene (2->3) og (4->1)
- l) Beregn varmen tilført systemet i alle del prosessene.
- m) Beregn maskinens effektivitet enklest mulig.

Oppgave 2

Delspørsmål i denne oppgaven har ikke nødvendigvis noen innbyrdes sammenheng.

- a) Anta vi har en ideell gass bestående av et mol He atomer inneholdt i en beholder med fast volum på en liter
- Angi tall verdien av atomenes midlere hastighet, $\langle \vec{v} \rangle$, ved 300 K.
 - Regn ut tall verdien av atomenes r.m.s hastighet, $(\langle v^2 \rangle)^{1/2}$, ved 300 K.
 - Anslå hvor mye energi en må tilføre gassen for at temperaturen skal øke med en grad.
- b) i) Skissér hvorledes, μ_e , det kjemiske potensial for elektroner varierer med temperaturen for en n-type halvleder. Merk av ϵ_c , ϵ_v og ϵ_d . på skissen. Innkludér tilfellet $T \rightarrow 0$ i skissen.
ii) Utled også et uttrykk for det kjemiske potensial ved meget høye temperaturer . Anta konsentrasjonen av dope-atomer er n_d , kvante-konsentrasjonen av ledningsbåndet er n_C og kvante-konsentrasjonen av valens båndet er n_V .
- c) Vis at utsagnet " $\Delta S \geq 0$ for et system der E , V og N er konstant" medfører at for et system der entropi, volum og partikkel antall er konstant har en at $\Delta E \leq 0$ ved oppheving av indre føringer i systemet.
- d) Grei kort ut om størrelsesforholdet mellom varmekapasiteten av elektroner i metaller og metallets totale varmekapasitet ved rom-temperatur. Gi en kort fysisk forklaring.
- e) Utled den termodynamiske relasjonen:
- $$\frac{C_p}{C_v} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$
- der symbolene har sin vanlige betydning.
(Tips: Det kan bli litt mye men ikke spesielt vanskelig regning. Start evt. med å vise at
- $$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_S = \frac{T}{C_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$
- samt tilsvarende relasjon med volumet som tilstands variabel istedenfor trykket)

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

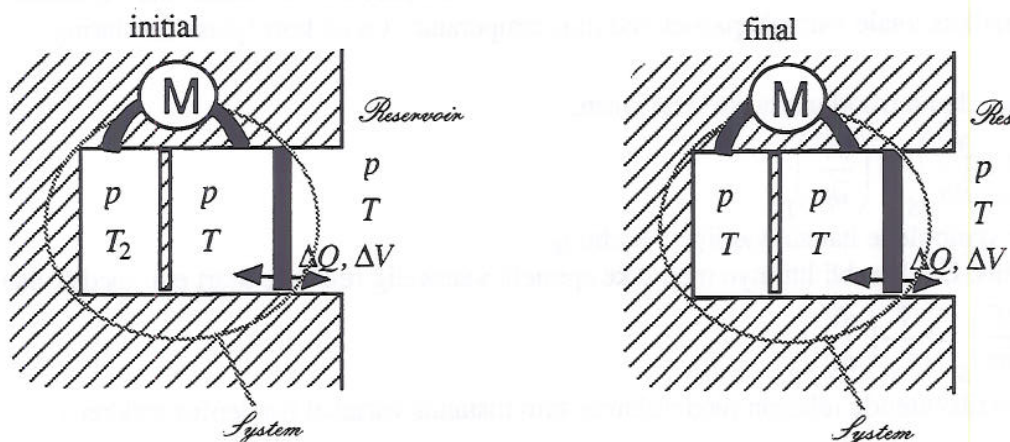
Eksamen i :	FYS 114 -Statistisk Fysikk
Eksamensdag :	Fredag 27de maj 1994
Tid for eksamen :	kl. 900-1500
Opgavesettet er på :	4 sider
Vedlegg :	ingen
Tillatte hjelpemidler:	Regnestav, Godkjente elektroniske regnemaskiner. Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset. Rottman: "Mathematische formelsammlung". Øgrim : " Størrelser og enheter i fysikken". Oliver & Boyd: "Science Data Book".

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

- a) Formuler prinsippet om entropiens økning så presist som mulig. Nevn et eksempel på en prosess der entropien øker samt et eksempel på en prosess der entropien minker.
- b) Vis utfra prinsippet om entropiens økning at for et system der temperatur, trykk og partikkel tall er konstant vil forandringer i indre føringer i systemet føre til at Gibbs fri energi enten blir mindre eller uforandret.
Hint: Gibbs fri energi betegnes med G . Du skal vise at $\Delta G \leq 0$ for enhver forandring av likevekts tilstanden for et system der T , p og N er konstant.

Vi skal betrakte et idealisert system som angitt på figuren under. Til venstre er systemet i initial tilstanden. Systemet er i termisk kontakt med et reservoar med temperatur T . Selve systemet består av to kammer. De er termisk isolert. Temperaturforskjellen mellom de to kammer kan benyttes til å drive en motor M . Dermed trekkes varme ut av det indre kammer og det kan avsettes i det ytre kammer. Trykket p i kamrene kan holdes konstant ("glidende" skillevegger)



Anta for enkelhets skyld at innholdet i de to kamre oppfører seg som monoatomiske ideelle gasser. La det være N partikler i hvert kammer.

- c) Vis at det maksimale arbeid vi kan produsere med motoren når systemet går fra initial til slutt tilstanden er gitt ved

$$\Delta W_{\max} = \frac{5}{2} NkT \left(\frac{T_2}{T} - 1 + \ln \left(\frac{T}{T_2} \right) \right) \quad [1c.1]$$

Hint: Sackur-Tetrode likningen for en ideell gass er gitt ved

$$S = Nk \left(\ln \left(\frac{n_Q}{n} \right) + \frac{5}{2} \right) \text{ hvor } n_Q = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad [1c.2,3]$$

Oppgave 2

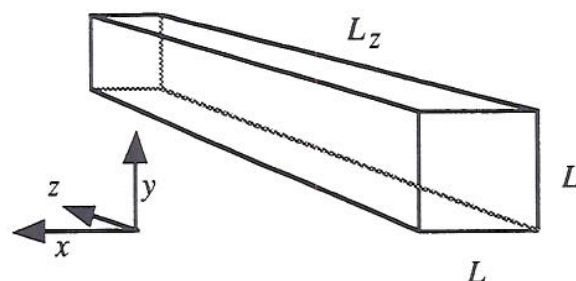
I denne oppgaven vil vi betrakte elektroner i halvledere. Vi betegner konsentrasjonen av lednings elektroner med n_e og konsentrasjonen av hull betegnes med n_h .

- a) Skriv ned massevirknings loven for elektroner og hull i en halvleder og definér symbolene som inngår i uttrykket.

Anta vi har en n-type halvleder. Da er konsentrasjonen av elektroner mye større enn den for hull. Vi antar at halvlederen er dopet med donor atomer som alle er ionisert ved romtemperatur. Elektron konsentrasjonen er da lik dope konsentrasjonen n_d .

- b) Anta at temperaturen synker (litt fra rom temperatur). Vil da hull-konsentrasjonen avta eller øke? Begrunn svaret .

Anta i det etterfølgende at vi kan avgrense halvlederen slik at den har form som en streng med kvadratisk tverrsnitt. Sidekantene i dette kvadratet kaller vi L og vi antar den størrelsen er sammenlignbar med de Broglie bølgelengden av et fritt middel elektron. Lengden av strengen L_z er mye større enn L .



- c) Regn ut tallverdien av den midlere de Broglie bølge-lengden for elektroner i en halvleder ved 300 K. Anta at den effektive masse er lik den for et fritt elektron. Ingen utledning kreves, men begrunn de formler du bruker. Tallmessig presisjon er ikke viktig.

Elektron energien vil være kvantisert. Den kan dekomponeres i bidrag fra bevegelse i tre retninger x, y og z . Vi vet at de tillatte energi nivåene er gitt av

$$E_x = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n_x^2 \equiv \frac{\alpha^2}{L^2} n_x^2 ; \text{ der } n_x = 1, 2, 3, 4, \dots \quad [2d-1]$$

og tilsvarende for E_y . For z -retningen fås

$$E_z = \frac{\alpha^2}{L_z^2} n_z^2 ; \text{ der } n_z = 1, 2, 3, 4, \dots \quad [2d-2]$$

d) Vis at partisjonsfunksjonen for ett elektron i strengen ved relativt lave temperaturer kan skrives som.

$$z_1 = 2 \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}} L_z \exp \left(- \frac{h^2}{4mL^2 k T} \right) \quad [2d-3]$$

og angi hvilke forutsetninger du har gjort.

Hint: Se bort fra tilstander som ikke er besatt.

e) Beregn et uttrykk for partisjonsfunksjonen for en (ikke-degenerert) elektrongass i strengen. Benytt samme lavtemperatur antagelse som under punkt 2-d).

f) Beregn et uttrykk for den termiske middel energi av elektrongassen i halvleder strengen, utfra uttrykket du fikk under pkt.e) eller på annen måte.

g) Beregn et uttrykk for og tegn skjematisk tilstandstettheten som funksjon av energien.

Hint: Det kan være gunstig å skrive svaret på følgende form

$$D(E)dE = \sum_{n_x, n_y=1} D_1(E, n_x, n_y) dE \quad [2g-1]$$

der

$$D_1(E, n_x, n_y) = \begin{cases} 0 & \text{for } E < \alpha^2 \left(\frac{(n_x^2 + n_y^2)}{L^2} + \frac{1}{L_z^2} \right) \equiv \eta \\ \kappa \frac{dE}{\sqrt{E - \sigma(n_x^2 + n_y^2)}} & \text{for } E \geq \eta \end{cases} \quad [2g-2]$$

hvor $\kappa = \frac{2\sqrt{2m}L_z}{h}$, $\sigma = \alpha^2/L^2$ og α er definert ved [2d-1]

[NB oppgave settet er ikke slutt]

Oppgave 3

- a) Vis at følgende termodynamiske relasjon ikke er gyldig.

$$\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,N} \quad [3a-1]$$

- b) Er følgende uttrykk generelt gyldig?

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,N} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{T,N} \quad [3b-c]$$

Dersom du svarer ja eller nei, før også bevis.

- c) Vis at følgende termodynamiske relasjon er gyldig.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\mu,V} = -\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,V} \left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_{\mu,T} \quad [3c-1]$$

Hint: Start evt. med å definere et potensial $\Omega = -pV$ og uttrykk siste ledd på høyre side i [3c-1] ved en "Maxwell relasjon"

Oppgave 4

- a) Gjengi Clausius Clapeirons likning og definer symbolene. Utledning kreves ikke.

- b) Tegn et skjematisk p - T diagram for vann der du viser likevekt mellom fasene is, vann og damp. Forklar kvalitativt om fortegnet på hellningen til linja for likevekt mellom is og vann blir. Det forventes at du benytter i) Clausius Clapeirons likning ii) hva du vet om forholdet mellom tetthetene for is og vann iii) termodynamisk argumentasjon.

Oppgave 5

- a) Forklar kort hva er Joule Thompson effekten er og hva kan den brukes til .
- b) Forklar kort hva termodynamikkens tredje lov sier og hvilken betydning den har for mange termodynamiske parametre.

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i :	FYS 114 -Statistisk Fysikk
Eksamensdag :	Torsdag 15de des 1994
Tid for eksamen :	kl. 900-1500
Opgavesettet er på :	4 sider
Vedlegg :	ingen
Tillatte hjelpemidler:	Regnestav, Godkjente elektroniske regnemaskiner. Matematiske og fysiske tabeller for gymnasiet. Rottman: "Mathematische formelsammlng". Øgrim : " Størrelser og enheter i fysikken". Oliver & Boyd: "Science Data Book".

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

- a) Angi kort hva et fermion og hva et boson er (1-2 linjer tekst). Utled Fermi-Dirac's foredelings funksjon f og vis at den kan skrives som

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) + 1} \quad [1a-1]$$

der symbolene har sin vanlige betydning. Tegn også skjematisk opp hvordan denne funksjonen ser ut (i et ε - f diagram) når $T \approx 0$ og ved høyere temperatur. Merk av μ på tegningen.

Vi vil i det etterfølgende betrakte en to-dimensjonal elektron gass. Vi antar at vi er i kvante-regimet. Uttrykket [1a-1] er gyldig, mens du får neppe direkte bruk for den matematiske form videre i oppgaven. Antallet elektroner i gassen er konstant og lik N . Elektronenes bevegelse antas begrenset til et kvadratisk flak med areal lik A . Energien for et elektron blir kvantisert ved

$$\varepsilon_{i_x i_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mA} (i_x^2 + i_y^2) \quad [1b-1]$$

der i_x og i_y er hele positive tall.

- b) Utled et uttrykk for tilstandstettheten $D(\varepsilon, A) d\varepsilon$ som er antall tilstander med energi mellom ε og $\varepsilon+d\varepsilon$ for elektron gassen.

- c) Vis at det kjemiske potensial av elektrongassen ved det absolutte null punkt ($T = 0$) kan skrives som

$$\mu(T = 0) = \frac{N}{Ab} \quad [1c-1]$$

der b er en konstant for elektroner .

Når en regner ut varmekapasiteten av den to-dimensjonale elektron gassen kommer en fram til:

$$C_{el} = \frac{\pi^2}{3} k^2 bAT \quad [1d-1]$$

De forutsetningene en da har benyttet er noen av de samme som for tilsvarende uttrykk for bidraget til varmekapasiteten fra elektronene i et metall. Vi har forutsatt at $kT \ll \mu$.

- d) Sammenlikn varmekapasiteten pr. elektron for den to-dimensjonale kvante gassen med den for en ideell gass. Kommentér og gi en fysisk forklaring på resultatet. Nøyaktige utregninger forventes ikke.

Det er naturlig å beskrive det to-dimensjonale tilfellet ved tilstands variablene N (her konstant), A , T og σ . Her er σ overflate-spenningen og har dimensjon [N/m]. I likevekt utøver systemet en kraft lik σ pr lengde enhet på sidelinja i kvadratet A . Den termodynamiske identitet kan da skrives som

$$TdS = dE + \sigma dA - \mu dN. \quad [1e-1]$$

- e) Vis at vi kan skrive σ på følgende måter

$$\sigma = - \left(\frac{\partial E}{\partial A} \right)_S \quad [1e-2]$$

$$\text{og } \sigma = - \int_{\epsilon=0}^{\infty} \left(f(\epsilon) D(\epsilon, A) \frac{\partial \epsilon}{\partial A} \right) d\epsilon \quad [1e-3]$$

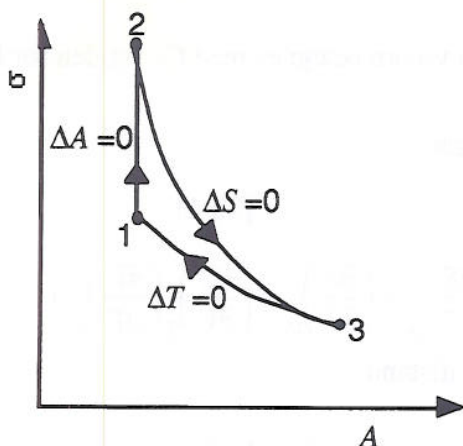
Finn også σ uttrykket ved Helmholtz fri energi, F

- f) Vis at entropien kan skrives som MAT der $M(b)$ er en konstant for elektron gassen.

- g) Finn et uttrykk for den totale energi, E , av elektron gassen .

- h) Beregn et uttrykk for σ der A , N , T og eventuelt M og b inngår. (Tilstands funksjonen)

Vi antar så at den todimensjonale elektrongassen utfører en syklisk prosess som angitt i figuren nedenfor.



1-2 foregår ved konstant areal, 2-3 er en adiabatisk ekspansjon tilbake til begynnelses temperaturen T_1 . Vi benytter tall indekser fra figuren for å betegne tilstands variablene. T_1 , σ_1 ,

A_1 og T_2 anses som kjent, de andre som ukjente som kan regnes ut. Forandringer betegnes med Δ og en sammensatt tall indeks. F.eks er ΔW_{12} arbeidet systemet utfører i prosessen 1-2. Angi utregnede størrelser ved A_1, T_1 og T_2

- i) Finn et uttrykk for varme tilført systemet i prosess 1-2, ΔQ_{12}
 j) Finn et uttrykk for A_3
 k) Finn et uttrykk for ΔQ_{31}
 l) Hvis syklusen var for en maskin, vis at dens effektivitet er gitt av

$$\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1}$$

- m) Vi antar at når systemet er i pkt. 2 i kretsløpet finnes det en bestemt tilstand med energi ε_2 . Kall sannsynligheten for at denne tilstanden er besatt for $P(\varepsilon_2)$. Når systemet er i pkt 3 antar vi det finnes en spesiell tilstand med energi ε_3 gitt ved

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \frac{T_1}{T_2}$$

Beregn sannsynligheten $P(\varepsilon_3)$ for at denne tilstand er besatt.

(Hint: Dette kan løses uten å ha løst noe tidligere i oppgaven. Du kan få bruk for [1b-1], begrunnelsen for [1e-3] og noe fra 1d))

Oppgave 2

Den termiske utvidelses koeffisienten, α , og den isoterme kompressibiliteten, κ_T , er gitt av

$$\alpha \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad \text{og} \quad \kappa_T \equiv - \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \frac{1}{V} \quad [2-1, 2-2]$$

der V er volumet som blir komprimert og symbolene forøvrig har sin vanlige betydning.

- a) Vis at

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_T = -\alpha V \quad \text{der } S \text{ er entropien.} \quad [2a-1]$$

Varmekapasiteten av et system målt ved konstant volum betegnes med C_V , og den for konstant trykk betegnes med C_p .

- b) Vis at varmekapasitetene er relatert via likningen

$$C_p = C_V + \frac{\alpha^2 TV}{\kappa_T} \quad [2b-1]$$

(Hint: Det kan være gunstig å først vise $\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$)

- c) Forklar hvorfor $C_p > C_V$ for enhver likevekts tilstand.

- d) Likn 2b-1 ansees som praktisk for måling av varmekapasitet. Forklar kort (noen få setninger) hvorfor. Kall forholdet C_p/C_V for γ . Hvilket system forventer du har størst γ , bly ved rom temperatur eller en ideell gass ved romtemperatur? Begrunn svaret kort.

Eks FYS1141794 side 3

Oppgave 3

- a) Gjengi Clausius Clapeirons likning og definer symbolene. Utleddning kreves ikke. Angi hvilken situasjon likningen beskriver.
- b) i) Regn ut i SI enheter omtrentlig hvor mange molekyler det er i 1 cl vann. La oss blande vann-molekylene med like mange etanol-molekyler. ii) Regn ut tallverdien av blandings entropien. iii) Dersom blandingen foregår ved 37 °C, hvor mye vil da Helmholtz fri energi synke p.g.a blandings entropien?

Oppgave 4

- a) Forklar kort hva som menes med en kvasi-statisk prosess.
- b) Forklar kort hva termonynamisk likevekt er.
- c) Grei kort ut om det er noen sammenheng mellom begrepene i a) og b) .
- d) Gi et eksempel på en ikke reversibel prosess og forklar hvorfor den ikke er reversibel.

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i :	FYS 114 -Statistisk Fysikk
Eksamensdag :	Fredag 26te maj 1995
Tid for eksamen :	kl. 900-1500
Opgavesettet er på :	4 sider
Vedlegg :	ingen
Tillatte hjelpemidler:	Regnestav, Godkjente elektroniske regnemaskiner. Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset. Rottman: "Mathematische formelsammlung". Øgrim : " Størrelser og enheter i fysikken". Oliver & Boyd: "Science Data Book".

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Vis at følgende termodynamiske relasjoner er generelt gyldige.

a) $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$

b) $\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S$

c) $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$

Her har symbolene sin vanlige betydning.

Oppgave 2

a) Skriv opp et formelt uttrykk for Gibbs sum. Angi også hva symbolene i uttrykket står for.

Anta vi har et system som består av hemoglobin molekyler (mange atomer) i en væske (f.eks. blod). I væsken er også oppløst O_2 . Et hemoglobin molekyl kan oppta oksygen fra væsken ved at det kan binde opptil fire O_2 molekyler. Anta at de fire adsorbsjons-stedene på hemoglobin er ekvivalente og uadadskillbare. Bindings-energien for hvert O_2 molekyl er ϵ målt i forhold til et O_2 molekyl løst i væsken i uendelig avstand fra hemoglobin. Anta at at hvert oksygen molekyl kun har en orientering i hver posisjon.

b) Hva er sannsynligheten, $P(1)$, for at ett og bare ett O_2 mylekyl er adsorbent på et hemoglobin molekyl? Angi svaret ved temperatur, bindingsenergi og kjemisk potensial eller ekvivalente størrelser.

c) Hva er sannsynligheten, $P(4)$, for at fire og ingen andre antall O_2 mylekyler er adsorbent på et hemoglobin molekyl?

- d) i) Skissér kvalitativt hvorledes sannsynlighetene $P(1)$ og $P(4)$ varierer med den absolutte aktivitet $\lambda (= \exp(\mu/kT))$. Velg gjerne koordinater du finner hensiktsmessig. ii) Spesifiser hva grenseverdiene blir når λ går mot henholdsvis null og sin største verdi. iii) Hvilken sannsynlighet blir størst ved høye temperaturer (i forhold til relevante størrelser) Anta gjerne en ideell løsning for O_2 i væsken.

Oppgave 3

Vi har en mono atomisk ikke-ideell gass. Vi antar at Helmholtz fri energi, F , for gassen er gitt ved

$$F = -NkT \left(\ln \left(\frac{n_Q(V - Nb)}{N} \right) + 1 \right) - \frac{N^2 a}{V} \quad \text{der} \quad n_Q = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

der a og b er positive konstanter spesifikke for gassen og ellers har symbolene sin vanlige betydning. Likningen gjelder for en såkalt van der Waal gass.

a) Finn et uttrykk for gassens tilstands likning.

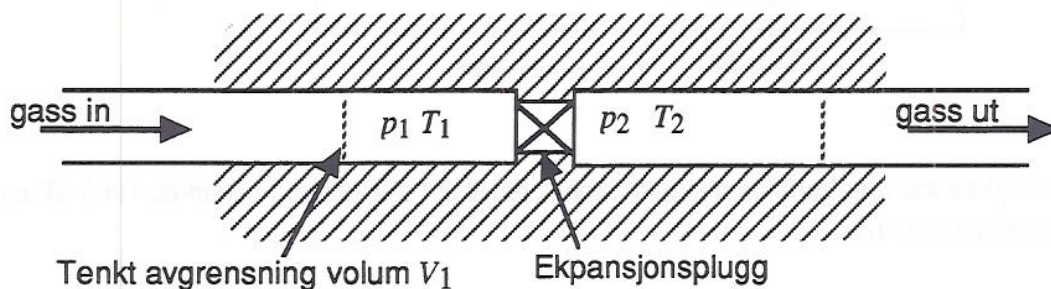
b) Vis at gassens entropi kan skrives som

$$S = Nk \left(\ln \left(\frac{n_Q(V - Nb)}{N} \right) + \frac{5}{2} \right)$$

c) Vis at gassens entalpi, $H \equiv E + pV$, er gitt ved

$$H(T, V) = \frac{5}{2} NkT + \frac{N^2 b kT}{V - Nb} - \frac{2N^2 a}{V}$$

Vi vil i det etterfølgende betrakte en Joule Thompson kjøler der vi benytter gassen. Vi lar gassen strømme gjennom en ekspansjons-ventil/plugg som angitt på figuren.



Vi regner at gassen er i to forskjellige likevekts-tilstander på hver side av pluggen (Selv om systemet som helhet er ute av likevekt siden vi har en strømning) Vi kan tenke oss at nedkjølingen skjer ved at N molekyler ved temperaturen T_1 kommer inn fra venstre og vil ekspandere til volumet V_2 på høyre side av pluggen ved temperaturen T_2 og trykket p_2 . Ikke noe varme går tapt til omgivelser via ekspansjonsventilen.

d) Forklar at prosessen som beskrevet foregår ved konstant entalpi.

Prosessen karakteriseres ved Joule Thompson koeffisienten, μ_{JT} , gitt ved

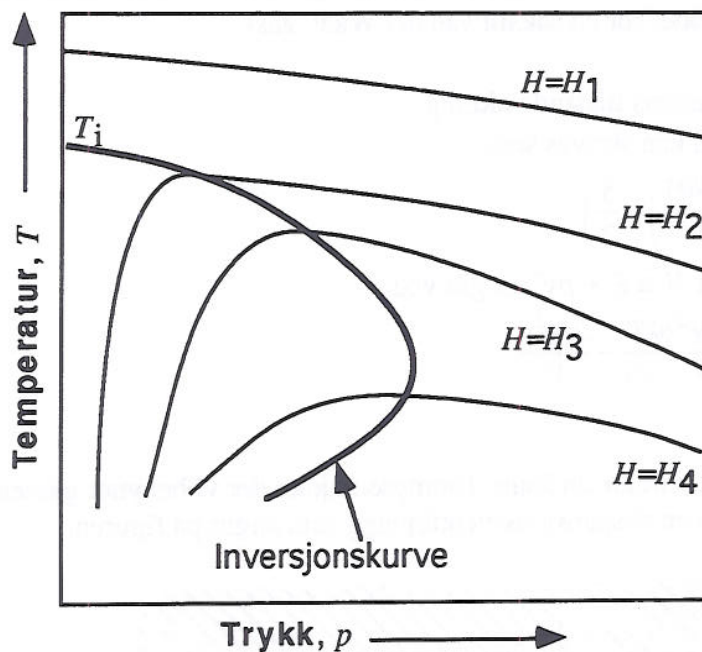
$$\mu_{JT} \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H$$

e) Vis at μ_{JT} for gassen kan skrives som

$$\mu_{JT} = \frac{V\kappa_T}{C_p} \left(\frac{\partial H}{\partial V} \right)_T \quad \text{hvor} \quad \kappa_T \equiv -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

κ_T er isoterm kompressibilitet og C_p er isobar varmekapasitet.

Joule Thompson koeffisienten, kan være positiv eller negativ. Dersom en tegner opp isentalper i et p - T digram vil det kunne se ut som figuren nedenfor.



Den tykke kurven, kalt "inversjons kurve", deler inn p - T planet i tilstander for hvilke μ_{JT} er positiv og negativ.

f) Finn et uttrykk for inversjons-temperaturen, T_i , som er høyeste temperatur på inversjonskurven. Uttrykk svaret ved konstantene a og b . Du kan anta at inversjons kurven for van der Waal gassen kvalitativt ser ut som skissert ovenfor. Kan en få oppvarming i en Joule Thompson kjøler når temperaturen er høyere enn T_i ?

g) Vis at Joule Thompson koeffisienten for en ideell gas er lik null.

h) Hvilket fortegn har κ_T for en virkelig gass? Begrunn svaret med en fysisk forklaring.

Oppgave 4

De enkelte spørsmål her har ikke nødvendigvis innbyrdes sammenheng.

- a) Angi hvilke av de tre følgende prosesser som er eller kan gjøres tilnærmet reversibel. Angi også hvorfor.
- Pumpe opp sykkeldekk
 - Punktere sykkeldekk
 - Fryse vann til isterninger i en fryseboks ved $-10\text{ }^\circ\text{C}$.
- b) Angi hva er en ekstensiv tilstands variabel og hva er en intensiv tilstands variabel og nevnt et par typiske eksempler fra hver kategori.
- c) Et system der E , V og N er konstant kalles i FYS114 mikrokanonisk og entropien er definert via multiplisiteten ved $S = k \ln W(E, V, N)$.
Et system der T , V og N er konstant kalles kanonisk og entropien er gitt ved

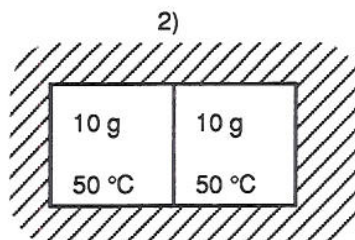
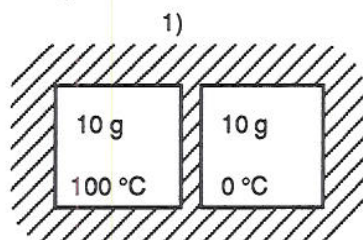
$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V, N}$$

Vis at begge disse uttrykk kan avledes fra et mer generelt statistisk uttrykk for entropien :

$$S \equiv -k \sum_{\text{tilstand } j} P_j \ln P_j$$

der P_j er sannsynlighet for at systemet er i tilstand j .

- d) Angi hvilket av følgende systemer som har størst entropi og kvalitativt hvorfor: 1) Et system bestående av to delsystem hver bestående av 10 g gull. Den ene delen har temperatur $100\text{ }^\circ\text{C}$ og den andre er ved $0\text{ }^\circ\text{C}$. 2) 20 g gull ved $50\text{ }^\circ\text{C}$. Du kan tenke på systemene som angitt nedenfor



(Hint: Oppgaven er enkel)

