

Løsninger
til
eksamensoppgaver i Fys 114
1998 - 2002

(Tilrettelagt for web-publisering av Magne Guttormsen)

2002
Fysisk institutt
Universitetet i Oslo

Løsninger: Eksamen Fys114, vår 1998

Oppgave 1

a) Siden prosessen er reversibel, er $dQ = TdS$. Dette gir $dE = TdS - MdB$. Helmholtz fri energi er $F = E - TS$, som gir $dF = dE - TdS - SdT$. Setter inn den termodynamiske identitet $TdS = dE + MdB$, og vi får $dF = -SdT - MdB$.

b) Fra a) har vi:

$$S = \text{konst.} \Rightarrow dS = 0 \Rightarrow dE = -MdB \Rightarrow M = -\left(\frac{\partial E}{\partial B}\right)_S$$

$$T = \text{konst.} \Rightarrow dT = 0 \Rightarrow dF = -MdB \Rightarrow M = -\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_T$$

c)

$$-T^2 \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right) \right)_B = -T^2 \left(\frac{F}{-T^2} + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_B \right) = F - T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_B = F + TS = E$$

d)

$$\left[\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right) \right]_{B,S} = \left(\frac{\partial}{\partial B} T \right)_S = \left[\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial E}{\partial B} \right) \right]_{B,S} = -\left(\frac{\partial}{\partial S} M \right)_B$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right) \right]_{B,T} = \left(\frac{\partial}{\partial B} (-S) \right)_T = \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial F}{\partial B} \right) \right]_{B,T} = -\left(\frac{\partial}{\partial T} M \right)_B$$

Oppgave 2

a) Gibbs sum er gitt ved:

$$\Xi = \sum_{ASN} e^{(N\mu - \epsilon_s) / kT}$$

Vi har 2 muligheter: $(N, \epsilon_s) = (0, 0)$ og $(1, \epsilon)$, som gir $\Xi = 1 + e^{(\mu - \epsilon) / kT}$

Sannsynlighet for besetning blir

$$f(\epsilon, \mu, T) = \langle N \rangle = \frac{1}{\Xi} \sum_{ASN} N e^{(N\mu - \epsilon_s) / kT} = \frac{1}{\Xi} [0 + 1 e^{(\mu - \epsilon) / kT}] = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu) / kT} + 1}$$

b)

$$f(\mu + \Delta\epsilon, \mu, T) = \frac{1}{e^{(\mu + \Delta\epsilon - \mu) / kT} + 1} = \frac{1}{e^{\Delta\epsilon / kT} + 1} = \frac{e^{-\Delta\epsilon / kT}}{1 + e^{-\Delta\epsilon / kT}}$$

$$= 1 - \frac{1}{1 + e^{-\Delta\epsilon / kT}} = 1 - f(\mu - \Delta\epsilon, \mu, T)$$

c) Vi definerer a og n slik at:

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \equiv an^2, \text{ der vi setter } L \equiv L_x = L_y = L_z$$

Vi finner antall elektroner opp til verdien n (eller ε) ved:

$$N = 2 \frac{1}{8} \int 4\pi n^2 dn = \pi \int n^2 dn = \frac{\pi}{3} \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^{3/2},$$

der første faktor skyldes spinn opp/ned og andre faktor at n_x, n_y og $n_z > 0$.

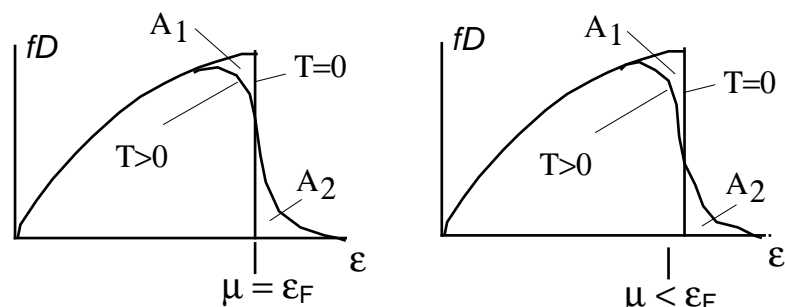
$$\frac{dN}{d\varepsilon} = \frac{\pi \varepsilon^{1/2}}{2a^{3/2}}, \text{ der vi innsetter } a^{3/2} = \left(\frac{\pi}{2m} \right)^{3/2} \frac{\hbar^3}{V} \text{ og får :}$$

$$\frac{dN}{d\varepsilon} d\varepsilon = D(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon$$

d) Vi antar et kjemiske potensial $\mu = \varepsilon_F$ ved temperatur $T=0$. Da er antall elektroner

$$\text{gitt ved } N = \int_0^{\infty} f(\varepsilon, \varepsilon_F, T=0) D(\varepsilon) d\varepsilon$$

Det er ingen partikkelfordeling over $\mu = \varepsilon_F$ ettersom fordelingsfunksjonen $f=0$ i dette området. Dette er vist i figuren.



Når temperaturen stiger, vil f ha en symmetrisk fordeling rundt det kjemiske potensial. Siden nivåtettheten D er en jamnt stigende funksjon, vil produktet fD ikke være symmetrisk, men med ekstra vekt på halen til høyere for det kjemiske potensial. Dermed vil vi regne ut en for stor N i uttrykket

$$N = \int_0^{\infty} f(\varepsilon, \mu, T > 0) D(\varepsilon) d\varepsilon$$

hvis vi beholder $\mu = \varepsilon_F$. Ved å justere til lavere verdi hvor $\mu < \varepsilon_F$, kan vi oppnå korrekt partikkeltall N . I venstre figur er det illustrert at partikkeltallet blir for stort hvis vi beholder $\mu = \varepsilon_F$, ettersom arealet $A_2 > A_1$. I høyere figur er $\mu < \varepsilon_F$ slik at N er bevart.

e) Vi modifierer 3D uttrykket til 1D ved at:

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \varepsilon_{xy} + an_z^2, \text{ der } \varepsilon_{xy} \text{ er en konstant.}$$

Dette gir:

$$dn_z = \frac{d\varepsilon}{2a^{1/2}} (\varepsilon - \varepsilon_{xy})^{-1/2}$$

Vi finner antall elektroner opp til verdien n ved:

$$N = 2 \int dn_z = \frac{1}{a^{1/2}} \int_{\varepsilon_{xy}}^{\varepsilon_{xy} + \varepsilon} (\varepsilon - \varepsilon_{xy})^{-1/2} d\varepsilon = 2 \left(\frac{\varepsilon}{a} \right)^{1/2},$$

der faktoren 2 skyldes spinn opp/ned.

$$\frac{dN}{d\varepsilon} = \frac{1}{a^{1/2} \varepsilon^{1/2}}, \text{ der vi innsetter } a^{1/2} = \left(\frac{\pi}{2m} \right)^{1/2} \frac{h}{L_z} \text{ og får :}$$

$$\frac{dN}{d\varepsilon} d\varepsilon = D_{1D}(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{L_z}{h} \left(\frac{2m}{\pi} \right)^{1/2} \varepsilon^{-1/2} d\varepsilon$$

f) Svar: Det kjemiske potensial vil stige.

Argumentasjonen følger som under punkt d), men med motsatt «fortegn». Når temperaturen stiger, vil f (som før) ha en symmetrisk fordeling rundt det kjemiske potensial. Siden nivåtettheten D_{1D} er en jamnt avtagende funksjon, vil produktet fD gi liten vekt på halen til høyere for det kjemiske potensial. Dermed vil vi regne ut en for lav N . Vi må derfor kompensere for at totalarealet under fD kurven blir for lite. Dette kan gjøres ved å justere $\mu > \varepsilon_F$, slik at fD kurven ikke går så raskt mot 0 for høyere energier. Dermed øker arealet under fD kurven, og vi kan reproducere verdien for N .

Oppgave 3

a) Antall måter å arrangere n vakanser på N gitterplasser er:

$$W_n = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

b) Partisjonsfunksjonen til systemet er gitt ved:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_s e^{-\varepsilon_s / kT} = \sum_n \sum_{\substack{\text{Antall} \\ \text{konfig}}} e^{-n\varepsilon / kT} = \sum_n W_n e^{-n\varepsilon / kT} = \sum_n \frac{N!}{n!(N-n)!} e^{-n\varepsilon / kT} \\ &= \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} (e^{-\varepsilon / kT})^n (1)^{N-n} = (1 + e^{-\varepsilon / kT})^N \end{aligned}$$

c) Hemholtz fri energi er gitt ved:

$$F = -kT \ln Z = -NkT \ln(1 + e^{-\varepsilon / kT})$$

d) Entropien blir:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{N,V} = Nk \ln(1 + e^{-\varepsilon/kT}) + NkT e^{-\varepsilon/kT} \left(\frac{\varepsilon}{kT^2}\right) / (1 + e^{-\varepsilon/kT})$$

$$= Nk \left[\ln(1 + e^{-\varepsilon/kT}) + e^{-\varepsilon/kT} \left(\frac{\varepsilon}{kT}\right) / (1 + e^{-\varepsilon/kT}) \right]$$

e) Energien blir:

$$E = F + TS = -NkT \ln(1 + e^{-\varepsilon/kT}) + NkT \ln(1 + e^{-\varepsilon/kT}) + N\varepsilon e^{-\varepsilon/kT} / (1 + e^{-\varepsilon/kT})$$

$$= N\varepsilon e^{-\varepsilon/kT} / (1 + e^{-\varepsilon/kT}), \text{ som ogs\aa kan finnes ved } E = -kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}$$

f) Middelerdien av antall vakanser blir:

$$\langle n \rangle = \langle E \rangle / \varepsilon = N e^{-\varepsilon/kT} / (1 + e^{-\varepsilon/kT})$$

Oppgave 4

a) Multiplisiteten er $W_{\text{mix}} = \frac{N!}{N_A! N_B!}$ som gir:

$$S_{\text{mix}} = k \ln W_{\text{mix}} = k(N \ln N - N_A \ln N_A - N_B \ln N_B)$$

$$= k(N_A \ln \frac{N}{N_A} + N_B \ln \frac{N}{N_B})$$

Vi lar $N_B / N = x$ og $N_A / N = 1 - x$ og får dermed:

$$S_{\text{mix}} = -kN[(1-x) \ln(1-x) + x \ln x]$$

Utleiingen bygger på Stirlings formel der det antas at N , N_A og N_B er store tall.

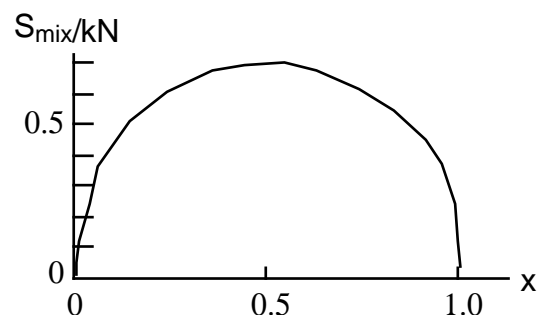
b) Ekstremalpunkt finnes når:

$$\frac{\partial S_{\text{mix}}}{\partial x} = -kN(\ln x - \ln(1-x)) = 0, \text{ som gir } x = 1/2.$$

$$\frac{\partial^2 S_{\text{mix}}}{\partial x^2} = -kN \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) = -4kN \text{ for } x = 1/2.$$

Altså har vi maksimal blandingsentropi for $x=1/2$, og innsatt får vi:

$$S_{\text{mix}}^{\text{max}} = -kN[1/2 \ln(1/2) + 1/2 \ln(1/2)] = kN \ln 2$$



c) Tilstandslikningen for ideell gass gir $pV_A = N_A kT$ og $pV_B = N_B kT$. Altså $\frac{N_A}{N_B} = \frac{V_A}{V_B}$.

d) Vi tilfører ikke varme eller arbeid. Energien E til en ideell gass avhenger ikke av volumet V . Altså er E konstant og dermed T , siden $E=E(T)$.

Anta at trykket endres fra p til p' . Da er:

$$p' = \frac{N_A + N_B}{V_A + V_B} kT = \frac{N_B}{V_B} \frac{1 + N_A/N_B}{1 + V_A/V_B} kT = \frac{N_B}{V_B} \frac{1 + N_A/N_B}{1 + N_A/N_B} kT = \frac{N_B}{V_B} kT = p$$

Trykket forblir altså uendret.

e) $V_A = 2V_B$ gir

$$x = \frac{N_B}{N_A + N_B} = \frac{1}{2+1} = 1/3. \text{ Altså } S_{mix} = -kN \left(\frac{2}{3} \ln \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \ln \frac{1}{3} \right) = 0.6365kN$$

f) Nei, vi får $\Delta S > 0$, p.g.a. entropiblanding.

Løsninger: Eksamen Fys114, høst 1998

Oppgave 1

a) Partisjonsfunksjonen er gitt ved $Z = \sum_i \exp(-\epsilon_i / kT)$. Vi får:

$$\frac{d}{dT} Z = \sum_i \frac{d}{dT} \exp(-\epsilon_i / kT) = \sum_i (\epsilon_i / kT^2) \exp(-\epsilon_i / kT) = (1/kT^2) \sum_i \epsilon_i \exp(-\epsilon_i / kT)$$

Det termiske energimiddel er:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_i \epsilon_i \exp(-\epsilon_i / kT)}{\sum_i \exp(-\epsilon_i / kT)} = \frac{kT^2 \frac{d}{dT} Z}{Z} = kT^2 \frac{d}{dT} \ln Z,$$

der de to summene i brøken for $\langle E \rangle$ er byttet ut med uttrykkene over.

b) Vi setter $\alpha^2 = h^2 \pi^2 / 2mL^2 kT$ og $u = \alpha t$ og får:

$$\begin{aligned} Z_1^{trans} &= \sum_{n_x, n_y, n_z} \exp(-\epsilon_n^{trans} / kT) = \sum_{n_x, n_y, n_z} \exp(-\alpha^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)) \\ &= \iiint \exp(-\alpha^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)) dn_x dn_y dn_z = \left(\int_0^\infty \exp(-\alpha^2 t^2) dt \right)^3 \\ &= (1/\alpha)^3 \left(\int_0^\infty \exp(-u^2) du \right)^3 = \pi^{3/2} / 8\alpha^3 = (\pi / (4\alpha^2))^{3/2} \\ &= (\pi / (4h^2 \pi^2 / 2mL^2 kT))^{3/2} = L^3 / (2h^2 \pi / mkT)^{3/2} = V \left(\frac{mkT}{2\pi h^2} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

der vi benytter integralet oppgitt i oppgaveteksten og at $V=L^3$.

c) For N partikler gjelder:

$$\begin{aligned} Z^{trans} &= \frac{1}{N!} (Z_1^{trans})^N \\ \langle E \rangle &= kT^2 \frac{d}{dT} (N \ln Z_1^{trans} - \ln N!) = kT^2 \frac{d}{dT} (N \ln T^{3/2} + C) = \frac{3}{2} NkT \end{aligned}$$

$$\mathbf{d)} \quad Z_1^{rot} = \sum_{l=0}^{\infty} W_l \exp(-\epsilon_l^{rot} / kT) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp[-l(l+1)\theta_{rot} / T]$$

e) Ved høy temperatur deltar mange rotasjonsnivåer. Avstanden mellom nivåene er da liten i forhold til den termiske energien. Vi kan da overføre summen i d) til integral med substitusjonen $u = l(l+1)$ og $du = (2l+1)d l$:

$$Z_1^{rot} = \int_0^\infty (2l+1) \exp[-l(l+1)\theta_{rot} / T] d l = \int_0^\infty \exp[-u\theta_{rot} / T] du = -\frac{T}{\theta_{rot}} [\exp(-u\theta_{rot} / T)]_0^\infty = \frac{T}{\theta_{rot}}$$

f) For N molekyler blir $\langle E_{rot} \rangle = kT^2 \frac{d}{dT} \ln(Z_1^{rot})^N = NkT^2 \frac{d}{dT} (\ln T - \ln \theta_{rot}) = NkT$.

g) Énpartikkel vibrasjons-partisjonsfunksjon for diatomisk molekyl blir:

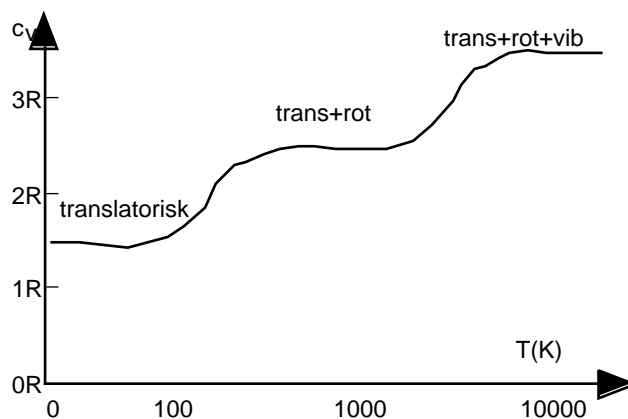
$$Z_1^{vib} = \sum_{v=0}^{\infty} \exp(-\epsilon_v^{vib} / kT) = \sum_{v=0}^{\infty} \exp(-v h \omega / kT) = \sum_{v=0}^{\infty} \exp(-v \theta_{vib} / T)$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} [\exp(-\theta_{vib} / T)]^v = \frac{1}{1 - \exp(-\theta_{vib} / T)}$$

I grensen for store T kan vi sette $Z_1^{vib} = \frac{1}{1 - (1 - \theta_{vib} / T)} = \frac{T}{\theta_{vib}}$ som gir for N molekyler

$$\langle E_{vib} \rangle = kT^2 \frac{d}{dT} \ln(Z_1^{vib})^N = NkT^2 \frac{d}{dT} (\ln T + \ln \theta_{vib}) = NkT.$$

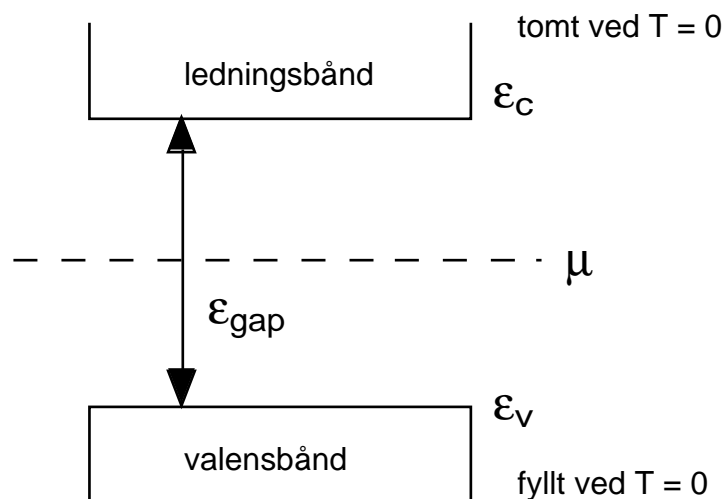
h) Varmekapasiteten avhenger av translasjon, rotasjon og vibrasjon. De to siste frihetsgrader blir først anslått for temperaturer over de karakteristiske temperatuene. Siden vi har 1 mol gass, blir $N=N_A$. Her er det hensiktsmessig og bruke gasskonstanten



$R = N_A k$. Bidragene fra de respektive energier til varmekapasiteten regnes ut ved dE/dT , som gir $3R/2$, R og R for h.h.v. translasjon, rotasjon og vibrasjon (se figur).

Oppgave 2

a)



b) En halvleder oppfører seg som en mellomting mellom isolator og leder: Den har et båndgap $\epsilon_{\text{gap}} \gg kT$, der T er ved romtemperatur (R.T.). Vi finner halvledere blandt stoffer med like antall elektroner. Vanligvis er $\epsilon_{\text{gap}} = 0.1 - 2.5$ eV. Eksempler på halvledere: Si, Ge, GaAs, InP, InSb. Halvlederen kan dopes med atomer med ett mer valenselektron, slik at vi får overskudd på elektroner. Det kjemiske pot. øker, og vi har n-type. Tilsvarende (men omvendt) for p-type.

$$\text{c) } f = \frac{1}{\exp[(\epsilon - \mu)/kT] + 1}$$

Anta klassisk regime der $f = e^{-(\epsilon - \mu)/kT}$.

$$N_e = \sum_{CB} f = \sum_{CB} e^{-(\epsilon - \mu)/kT} = \sum_{CB} e^{-(\epsilon + \epsilon_c - e_c - \mu)/kT} = \sum_{CB} e^{-(\epsilon - e_c)/kT} e^{-(e_c - \mu)/kT} = \left(\sum_{CB} e^{-(\epsilon - e_c)/kT} \right) e^{-(e_c - \mu)/kT}$$

d) Vi identifiserer den siste summen i uttrykket over som en partisjonsfunksjon. Vi antar at summen kan gjøres om til integral og utregnes som for ideell gass. Dette gir da en slags effektiv kvantekonsentrasjon n_C i ledningsbåndet med en tilhørende partisjonsfunksjon som kan skrives som $n_C V$. Vi har:

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{1}{V} (n_C V) e^{-(e_c - \mu)/kT} = n_C e^{-(e_c - \mu)/kT}$$

Ettersom kvantekonsentrasjonen i praksis ikke stemmer helt med det som beregnes for ideell gass, er det nødvendig med en modifisering av uttrykket. Dette består i å sette inn en tilstandstetthets effektiv masse (m_e^*) i stedet for den sanne elektron masse (m_e) i uttrykket for kvantekonsentrasjonen n_C .

e) For en intrinsikk halvleder har vi $n_e = n_h$, som gir:

$$n_c \exp[-(\epsilon_c - \mu)/kT] = n_v \exp[-(\mu - \epsilon_v)/kT] \Rightarrow$$

$$\exp[-(\epsilon_c - \mu - \mu + \epsilon_v)/kT] = n_v / n_c \Rightarrow$$

$$(2\mu - \epsilon_c - \epsilon_v)/kT = \ln(n_v / n_c) \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{1}{2}(\epsilon_c + \epsilon_v) + \frac{1}{2}kT \ln(n_v / n_c)$$

f) Massevirkningsloven er gitt ved:

$$n_e n_h = n_c n_v \exp[-(\epsilon_c - \epsilon_v)/kT] = n_c n_v \exp(-\epsilon_g / kT),$$

som gir at produktet er uavhengig av det kjemiske potensial. Spesielt har vi $n_e n_h = n_i^2$, der n_i er konsentrasjonen av elektroner (eller hull) i en intrinsikk halvleder.

g) Vi har at $n_i = n_e = n_h$ og $n_i(T_{RT}) = 1.5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$.

Massevirkningsloven gir $n_i(T) \propto T^{3/2} \exp(-\epsilon_g / 2kT)$, som gir for $T = T_{RT} = 1/40$ eV:

$$\frac{n_i(T)}{n_i(T/2)} = \left(\frac{T}{T/2}\right)^{3/2} \exp(\epsilon_g / 2kT) = 2^{3/2} e^{20} = 1.37 \cdot 10^9 \Rightarrow$$

$$n_i(T/2) = n_i(T) / 1.37 \cdot 10^9 = 11 \text{ cm}^{-3}.$$

Oppgave 3

- a) Et boson er en partikkel med heltallig spinn 0, 1, 2, ... Med partikkel menes her både sammensatte partikler (${}^4\text{He}$), elementærpartikler (γ , π) og abstrakte objekter (fononer). Bosoner følger ikke Pauli prinsippet, og flere bosoner kan være i samme kvantetilstand.

$$\Xi = \sum_{ASN} \exp[(N\mu - N\varepsilon)/kT] = \sum_{ASN} \{\exp[(\mu - \varepsilon)/kT]\}^N = \frac{1}{1 - \exp[(\mu - \varepsilon)/kT]}$$

Videre er:

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= f = \frac{kT}{\Xi} \frac{d\Xi}{d\mu} = kT \frac{d}{d\mu} \ln \Xi = -kT \frac{d}{d\mu} \ln(1 - \exp[(\mu - \varepsilon)/kT]) \\ &= -kT \frac{-(1/kT) \exp[(\mu - \varepsilon)/kT]}{1 - \exp[(\mu - \varepsilon)/kT]} = \frac{1}{\exp[(\varepsilon - \mu)/kT] - 1} \end{aligned}$$

(kan også bruke absolutt aktivitet i utledningen, slik som i K&K s.158)

- b) Antall partikler finnes ved arealet som n dekker:

$$\begin{aligned} N(\varepsilon) &= \sum_{n_x n_y} 1 = \frac{1}{4} \int 2\pi n dn = \frac{1}{4} \pi n^2 = \frac{1}{4} \pi \left(\frac{\varepsilon 2mL}{\pi^2 \hbar^2} \right)^2 = \frac{Am}{2\hbar^2 \pi} \varepsilon \\ D(\varepsilon) &= dN(\varepsilon)/d\varepsilon = \frac{Am}{2\hbar^2 \pi} \end{aligned}$$

- c) Totalt antall partikler er:

$$N = \int_0^\infty D(\varepsilon) f d\varepsilon = \frac{Am}{2\hbar^2 \pi} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\exp[(\varepsilon - \mu)/kT] - 1}$$

Vi setter $x = (\varepsilon - \mu)/kT$ og $dx = d\varepsilon/kT$:

$$N = \frac{Am}{2\hbar^2 \pi} kT \int_{-\mu/kT}^\infty \frac{dx}{\exp(x) - 1} = \frac{A}{\Lambda^2} [\ln(1 - e^{-x})]_{-\mu/kT}^\infty = -\frac{A}{\Lambda^2} \ln(1 - e^{\mu/kT}) \Rightarrow$$

$$\ln(1 - e^{\mu/kT}) = -\Lambda^2 \rho \Rightarrow 1 - e^{\mu/kT} = e^{-\Lambda^2 \rho} \Rightarrow e^{\mu/kT} = 1 - e^{-\Lambda^2 \rho} \Rightarrow \mu = kT \ln(1 - e^{-\Lambda^2 \rho})$$

- d) Befolkning i laveste tilstand er:

$$N_0 = f(\varepsilon = 0) = \frac{1}{e^{-\mu/kT} - 1} = \frac{1}{\exp[-\ln(1 - e^{-\rho \Lambda^2})] - 1} = \frac{1}{\frac{1}{1 - e^{-\rho \Lambda^2}} - 1} = e^{\rho \Lambda^2} - 1$$

- e) Vi ser på hva det kjemiske potensial $\mu = kT \ln[1 - \exp(-\rho \Lambda^2)]$ blir for laveste tilstand med energi 0. Dersom dette uttrykket skal gå mot 0, vil T måtte gå mot 0, medmindre logaritmen skulle gå mot uendelig. Det gjør den ikke fordi:

$\ln[1 - \exp(-\rho \Lambda^2)] = \ln[1 - \exp(-konst/T)] \xrightarrow{T \rightarrow 0} \ln(1 - 0) = 0$. Altså $T_E = 0$, og vi har ikke Bose-Einstein kondensering ved endelig temperatur i dette spesielle 2-dimensjonale tilfellet.

Oppgave 4

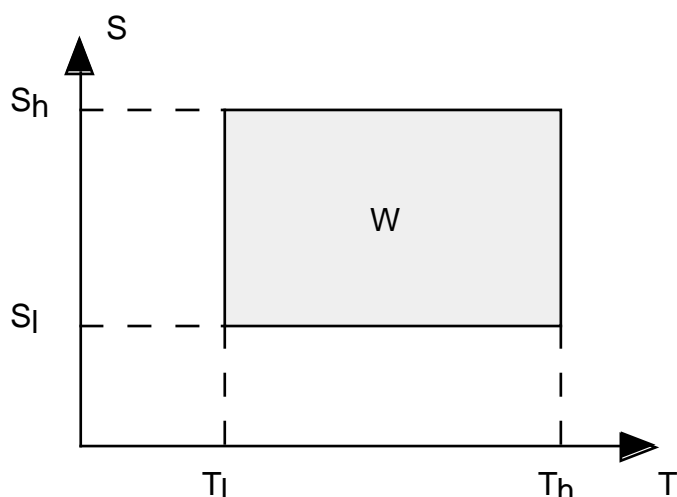
a) En tilstandsfunksjon er en funksjon som avhenger av tilstandsvariable, for eksempel $E=3/2NkT$ (ideell gass). En tilstandslikning bestemmer entydig systemets tilstand, for eksempel $pV=NkT$ (ideell gass).

b) En intensive variabel f for et system A, forblir det samme når n like system A settes sammen: $f(nA) = f(A)$. For eksempel trykk p og temperatur T .

En ekstensiv variabel F for et system A er proporsjonal med antall (n) system A som settes sammen: $F(nA) = nF(A)$. For eksempel volum V og energi E .

c) Carnot syklusen er beskrevet i figuren under. Den består av to isentrope og to isoterme prosesser. Gassens arbeid på omgivelsene er $W = (T_h - T_l)(S_h - S_l)$ i løpet av en syklus. Tilført varme er $Q_h = T_h(S_h - S_l)$, som gir Carnot virkningsgraden

$$\eta_c = \frac{W}{Q_h} = \frac{T_h - T_l}{T_h}.$$



d) $dF = d(E-TS) = dE - TdS - SdT$ og $TdS = dE + pdV$ gir $dF = -pdV - SdT$. Altså blir:

$$\left[\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \right]_T = - \left(\frac{\partial}{\partial V} S \right)_T$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \right]_V = - \left(\frac{\partial}{\partial T} p \right)_V$$

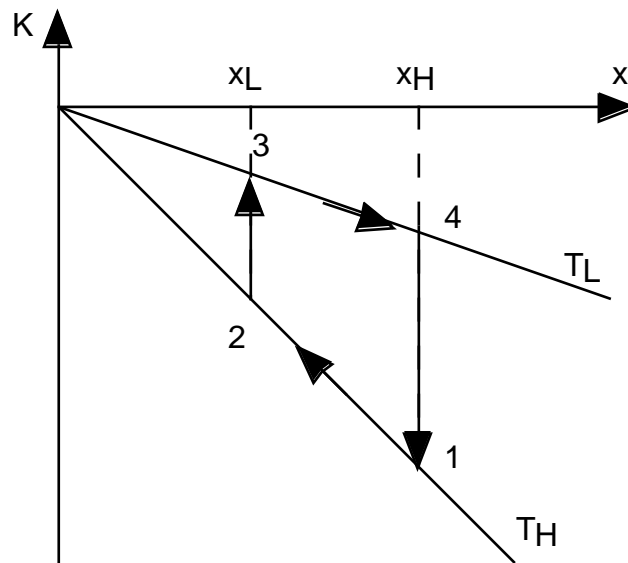
Da disse to uttrykk er lik hverandre, blir $\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$.

Løsninger: Eksamen Fys114, vår 1999

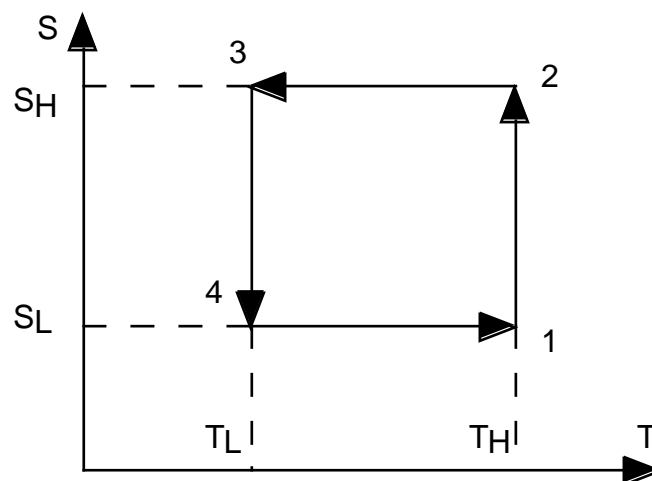
Oppgave 1

a) En Carnot maskin utfører en såkalt Carnot syklus, med følgende 4 prosesser i kretsløpet: isoterm \rightarrow isentrop \rightarrow isoterm \rightarrow isentrop. Virningsgraden er maksimal, og lik Carnot virkningsgraden.

b) K - x diagrammet blir:



c) Entropien S er gitt ved $S_L = A - Bx_H^2$ og $S_H = A - Bx_L^2$, som gir S - T diagrammet:



Omløpsretningen er mot klokka. Det er 2 isoterme prosesser (1-2 og 3-4) og 2 isentrope prosesser (4-1 og 2-3).

d) Det utføres arbeid når strikken strammes/slakkes. Dette skjer i prosessene 1-2 og 3-4:

$$\Delta W_{1-2} = \int_1^2 K dx = -2BT_H \int_{x_L}^{x_H} x dx = BT_H(x_H^2 - x_L^2) > 0$$

$$\Delta W_{3-4} = \int_3^4 K dx = -2BT_L \int_{x_L}^{x_H} x dx = -BT_L(x_H^2 - x_L^2) < 0$$

$$\Delta W = \Delta W_{1-2} + \Delta W_{3-4} = B(T_H - T_L)(x_H^2 - x_L^2) > 0,$$

som er det totale arbeidet utført på omgivelsene i ett kretsløp.

e) Det utveksles varme ved $\Delta Q = T\Delta S$, altså når det ikke er isentrop prosess, dvs. i prosessene 1-2 og 3-4:

$$\Delta Q_{1-2} = \int_1^2 T dS = -2BT_H \int_{x_L}^{x_H} x dx = BT_H(x_H^2 - x_L^2) > 0$$

$$\Delta Q_{3-4} = \int_3^4 T dS = -2BT_L \int_{x_L}^{x_H} x dx = -BT_L(x_H^2 - x_L^2) < 0$$

$$\Delta Q = \Delta Q_{1-2} + \Delta Q_{3-4} = B(T_H - T_L)(x_H^2 - x_L^2) > 0$$

f) Virningsgraden blir:

$$\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_{inn}} = \frac{\Delta W_{1-2} + \Delta W_{3-4}}{\Delta Q_{1-2}} = \frac{B(T_H - T_L)(x_H^2 - x_L^2)}{BT_H(x_H^2 - x_L^2)} = 1 - \frac{T_L}{T_H}.$$

Dette er den maksimalt mulige virkningsgrad (Carnot virkningsgraden).

Siden vi har to isentrope og to isoterme prosesser i kretsløpet, er dette en Carnot maskin.

g)

Tilfelle 1: Dette er ingen Carnot maskin siden entropien avhenger av temperaturen.

Tilfelle 2: Dette er en Carnot maskin, med to isentrope og to isoterme prosesser i kretsløpet.

(Strengt tatt bør man også sjekke at S er realistisk: $\left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_x = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T$, funnet ved

$TdS = dE + Kdx$ og $F = E - TS$, men dette forventes ikke utfra oppgavens spørsmålsstilling.)

Oppgave 2

a) $F = E - TS \Rightarrow dF = dE - TdS - SdT.$

Den termodynamiske identitet er $TdS = dE + pdV,$

som innsatt gir $dF = -SdT - pdV \Rightarrow S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V.$

Videre er:

$$F = E - TS \Rightarrow E = F + TS = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

Vet at : $T^2 \frac{\partial\left(\frac{F}{T}\right)}{\partial T} = T^2 \frac{T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right) - F\left(\frac{\partial T}{\partial T}\right)}{T^2} = T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right) - F = -E. \quad \text{QED}$

b) Partisjonsfunksjonen er gitt ved

$$Z = \sum_i e^{-\varepsilon_i/kT} = 1 + e^{-\varepsilon/kT} + e^{-2\varepsilon/kT}.$$

c) Lar $kT = \varepsilon,$ og får:

$$p_0 = e^{-0} / Z = 1 / (1 + e^{-1} + e^{-2}) = 0.665$$

$$p_1 = e^{-1} / Z = e^{-1} / (1 + e^{-1} + e^{-2}) = 0.245$$

$$p_2 = e^{-2} / Z = e^{-2} / (1 + e^{-1} + e^{-2}) = 0.090$$

(som gir totalt 1.000 med tre siffrers nøyaktighet, teoretisk = 1)

Med $T = 0$ er $p_0 = 1$ og $p_1 = p_2 = 0.$

Med $T = \infty$ er $p_0 = p_1 = p_2 = 1/3.$

Altså gjelder: $1/3 < p_0 < 1, 0 < p_1 < 1/3$ og $0 < p_2 < 1/3.$

d) $\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_i \varepsilon_i e^{-\varepsilon_i/kT} = \varepsilon e^{-\varepsilon/kT} \frac{1 + 2e^{-\varepsilon/kT}}{1 + e^{-\varepsilon/kT} + e^{-2\varepsilon/kT}}.$

e) $F = -kT \ln Z = -kT \ln(1 + e^{-\varepsilon/kT} + e^{-2\varepsilon/kT}).$

f) $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = k \ln(1 + e^{-\varepsilon/kT} + e^{-2\varepsilon/kT}) + \frac{\varepsilon}{T} \frac{e^{-\varepsilon/kT} + 2e^{-2\varepsilon/kT}}{1 + e^{-\varepsilon/kT} + e^{-2\varepsilon/kT}}.$

(Vi ser at $S = -F/T + \langle E \rangle / T,$ som forventet).

g)

$$kT \rightarrow 0 \Rightarrow \langle E \rangle \rightarrow \varepsilon \cdot 0 \frac{1 + 2 \cdot 0}{1 + 0 + 0} = 0$$

$$kT \rightarrow 0 \Rightarrow S \rightarrow k \ln(1 + 0 + 0) + \left(\frac{\varepsilon}{T}\right) e^{-\varepsilon/kT} \frac{1 + 2 \cdot 0}{1 + 0 + 0} \rightarrow k[\ln(1) + 0] = 0$$

Denne grense gir at partikkelen befinner seg i grunntilstanden med energi 0. Det er bare 1 tilstand (eller mulighet) dette gjelder, slik at $S = k \ln W = k \ln 1 = 0.$

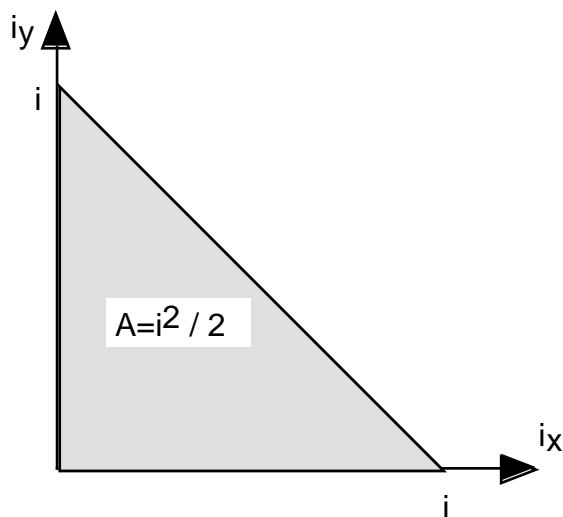
$$kT \rightarrow \infty \Rightarrow \langle E \rangle \rightarrow \epsilon \cdot \frac{1+2 \cdot 1}{1+1+1} = \epsilon$$

$$kT \rightarrow \infty \Rightarrow S \rightarrow k[\ln(1+1+1) + 0 \frac{1+2 \cdot 1}{1+1+1}] \rightarrow k[\ln(3) + 0] = k \ln 3$$

Denne grense gir at partikkelen har så stor termisk energi at den har like stor sannsynlighet for å være i alle tre nivåer. I middel blir dermed energien $\langle E \rangle = 1/3(0 \cdot \epsilon + 1 \cdot \epsilon + 2 \cdot \epsilon) = \epsilon$. Det er tre mulige tilstander for systemet, som gir $S = k \ln W = k \ln 3$.

Oppgave 3

b) En bestemt energi betyr at $i_x + i_y = i$ er en konstant, tilsvarende energi $\hbar\omega i$. Antall bosoner med denne energi eller lavere er gitt ved arealet vist i figuren under:



Antall bosoner med energi mindre enn ϵ er dermed $N(\epsilon) = i^2 / 2 = (\frac{\epsilon}{\hbar\omega})^2 / 2 = \frac{\epsilon^2}{2(\hbar\omega)^2}$.

Dette gir tilstandstettheten $D(\epsilon) = \frac{dN}{d\epsilon} = \frac{\epsilon}{(\hbar\omega)^2}$.

b) Nivåtettheten funnet over, gir at det ikke er noe nivå med energi 0. Dette er ikke riktig, og det er spesielt viktig å inkludere grunntilstanden ved lav temperatur. Vi deler derfor opp N i antall bosoner i énpartikkel grunntilstanden (N_0) og de bosoner som er eksitert (N_e):

$$N = N_0 + N_e.$$

Antall bosoner i grunntilstanden er:

$$N_0 = f(\epsilon = 0, \mu, T) = \frac{1}{\exp[-\mu/kT] - 1}.$$

Antall eksiterte bosoner (ikke i grunntilstanden) er:

$$N_e = \int_0^{\infty} d\epsilon D(\epsilon) f(\epsilon, \mu, T) = \frac{1}{(h\omega)^2} \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{\epsilon}{\exp[(\epsilon - \mu)/kT] - 1}.$$

c) Antall eksiterte bosoner for neglisjerbart kjemisk potensial er:

$$N_e(\mu = 0) = \frac{1}{(h\omega)^2} \int_0^{\infty} d\epsilon \frac{\epsilon}{\exp(\epsilon/kT) - 1}.$$

Vi setter $x = \epsilon/kT$ og $dx = d\epsilon/kT$:

$$N_e = \frac{1}{(h\omega)^2} \int_0^{\infty} \frac{(kT)^2 x dx}{e^x - 1} = \left(\frac{kT}{h\omega}\right)^2 \frac{\pi^2}{6}.$$

Ved å justere T kan vi få dette uttrykket lik N . Den T som gir $N = N_e$ kalles Einstein temperaturen T_E :

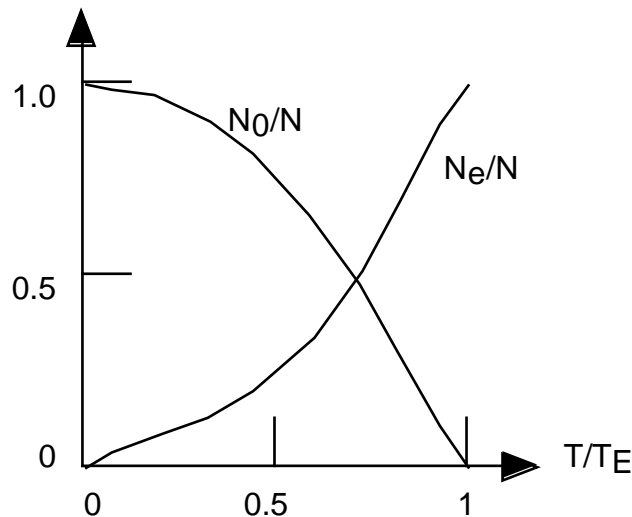
$$N = \left(\frac{kT_E}{h\omega}\right)^2 \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow T_E = \frac{h\omega}{\pi k} \sqrt{6N}.$$

d) Vi tar utgangspunkt i:

$$N_e = \left(\frac{kT}{h\omega}\right)^2 \frac{\pi^2}{6} = \left(\frac{T}{T_E}\right)^2 \left(\frac{kT_E}{h\omega}\right)^2 \frac{\pi^2}{6} = \left(\frac{T}{T_E}\right)^2 N.$$

$$N_e = N - N_0 = \left(\frac{T}{T_E}\right)^2 N \Rightarrow N_0 = N - \left(\frac{T}{T_E}\right)^2 N \Rightarrow \frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_E}\right)^2.$$

e) Våre regninger er eksempel på Bose-Einstein kondensering ved endelig temperatur:



f) Innsetter i likningen for Einstein temperaturen:

$$T_E = \frac{h\omega}{\pi k} \sqrt{6N} = \frac{6.6261 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 600 \text{ s}^{-1}}{3.1416 \cdot 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}} \sqrt{6 \cdot 10^6} = 2244.6 \cdot 10^{-8} \text{ K} = 22.4 \mu\text{K}$$

Oppgave 4

a) I termodynamisk likevekt er det ingen netto transport av energi eller partikler. Man har en stasjonær tilstand der ingen variable endres i gjennomsnitt med tiden.

b) Fermionene nede i potensialbrønnen er "låst" fordi Pauli prinsippet hindrer befolkning av allerede besatte tilstander. Det er bare fermionene ved Fermi nivået som har mulighet til å eksiteteres - og dermed være med på å gi varmekapasitet til systemet. Grovt sett er det T/T_F deler av antall fermioner N som deltar, altså $N(T/T_F)$. I en ideell gass deltar alle, som gir $3/2N$.

c) Det gjøres ikke noe arbeid W på omgivelsene. Det tilføres heller ikke varme Q . Siden E er konstant og $E=E(T)$ for en ideell gass, blir temperaturen T også konstant. Entropien S avhenger av volumet V , og det blir en økning i entropi ($\Delta S = k \ln(V_2/V_1)$).

d) Gibbs sum er gitt ved:

$$\Xi = \sum_{ASN} \exp[(N\mu - \epsilon_s)/kT] = \sum_{ASN} \exp[\beta(N\mu - \epsilon_s)], \text{ der } \beta \equiv 1/kT$$

Vi finner følgende termiske middel:

$$\langle N\mu - \epsilon \rangle = \langle N \rangle \mu - \langle E \rangle = \frac{1}{\Xi} \frac{\partial \Xi}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Xi$$

der midlere antall partikler er :

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\beta \Xi} \frac{\partial}{\partial \mu} \Xi = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Xi$$

som gir for midlere energi :

$$\langle E \rangle = \mu \langle N \rangle - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \Xi = \left(\frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \ln \Xi$$

Løsninger: Eksamen Fys114, høst 1999

Oppgave 1

a) $N = N_- + N_+$ og $M = N_+ - N_-$ gir $N_- = \frac{1}{2}(N - M)$ og $N_+ = \frac{1}{2}(N + M)$.

Videre er totalenergien gitt ved $E = N_- \cdot (-\epsilon_0) + N_+ \cdot (\epsilon_0) = M\epsilon_0$.

b) Multiplisiteten blir $W_M = \frac{N!}{N_-!N_+!} = \frac{N!}{\left[\frac{1}{2}(N - M)\right]!\left[\frac{1}{2}(N + M)\right]!}$

c) Entropien S er gitt ved

$$S(M) = k \ln W_M$$

$$\approx k \left\{ N \ln N - N - \left[\frac{1}{2}(N - M) \ln \frac{1}{2}(N - M) - \frac{1}{2}(N - M) + \frac{1}{2}(N + M) \ln \frac{1}{2}(N + M) - \frac{1}{2}(N + M) \right] \right\}$$

$$= k \left[N \ln N - \frac{1}{2}(N - M) \ln \frac{1}{2}(N - M) - \frac{1}{2}(N + M) \ln \frac{1}{2}(N + M) \right],$$

hvor Sterlings tilnærmselse $\ln x! = x \ln x - x$ er anvendt for store x .

d) Vi finner den inverse temperatur ved:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S(M)}{\partial M \epsilon_0} = \frac{\partial S(M)}{\epsilon_0 \partial M} = \frac{k \partial \left[-\frac{1}{2}(N - M) \ln \frac{1}{2}(N - M) - \frac{1}{2}(N + M) \ln \frac{1}{2}(N + M) \right]}{2 \epsilon_0 \partial M}$$

$$= \frac{k}{2 \epsilon_0} \left[\ln \frac{1}{2}(N - M) + 1 - \ln \frac{1}{2}(N + M) - 1 \right] = \frac{k}{2 \epsilon_0} \left[\ln \frac{1}{2}(N - M) - \ln \frac{1}{2}(N + M) \right] = \frac{k}{2 \epsilon_0} \ln \frac{N - M}{N + M}.$$

e) Omskriver resultatet fra d):

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{2 \epsilon_0} \ln \frac{N_-}{N_+} = \frac{k}{2 \epsilon_0} \ln \frac{N_-}{N - N_-} \Rightarrow$$

$$\frac{N - N_-}{N_-} = \exp\left(-\frac{2 \epsilon_0}{kT}\right) \Rightarrow \frac{N}{N_-} - 1 = \exp\left(-\frac{2 \epsilon_0}{kT}\right) \Rightarrow \frac{N}{N_-} = \exp\left(-\frac{2 \epsilon_0}{kT}\right) + 1 = \frac{\exp\left(-\frac{\epsilon_0}{kT}\right) + \exp\left(\frac{\epsilon_0}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{\epsilon_0}{kT}\right)},$$

og vi får $\frac{N_-}{N} = \frac{\exp\left(\frac{\epsilon_0}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{\epsilon_0}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{\epsilon_0}{kT}\right)}$, og $\frac{N_+}{N} = 1 - \frac{N_-}{N} = \frac{\exp\left(-\frac{\epsilon_0}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{\epsilon_0}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{\epsilon_0}{kT}\right)}$.

f) Energien blir:

$$E = N_- \cdot (-\epsilon_0) + N_+ \cdot (\epsilon_0) = -N \epsilon_0 \left(\frac{N_-}{N} - \frac{N_+}{N} \right) = -N \epsilon_0 \frac{\exp\left(\frac{\epsilon_0}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\epsilon_0}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{\epsilon_0}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{\epsilon_0}{kT}\right)} = -N \epsilon_0 \tanh(\epsilon_0 / kT).$$

g) Ved $kT \ll \epsilon_0$ er det ikke nok termisk energi til å populere øvre nivå. Systemet er ikke i stand til å motta ΔE ved en økning i temperaturen på ΔT , som gir lav $C = \Delta E / \Delta T$. Ved $kT \gg \epsilon_0$ er både nedre og øvre nivå populert med 50%. Systemet er ikke i stand til å motta mer ΔE ved økning i temperaturen på ΔT , som gir lav $C = \Delta E / \Delta T$. Ved $kT \approx \epsilon_0$ er

det øvre nivå generelt maksimalt i stand til å absorbere en partikkel. Systemet gir derfor maksimal $C = \Delta E / \Delta T$.

h) Partisjonsfunksjonen i det kanoniske ensemble er en sum av Boltzmann's faktorer

$$Z = \sum_s \exp(-\epsilon_s / kT) = \exp(-\epsilon_0 / kT) + \exp(\epsilon_0 / kT),$$

Sannsynligheten for en tilstand s er:

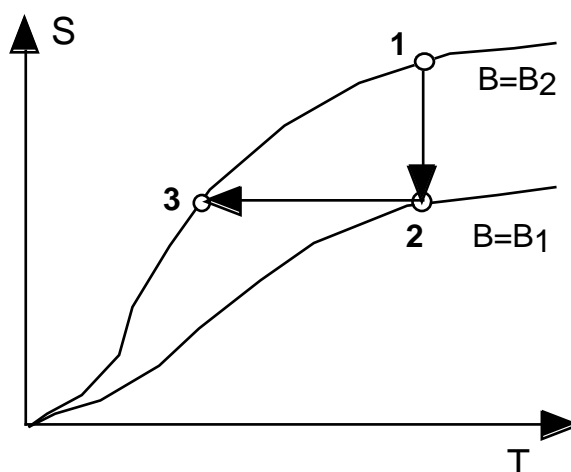
$$p_s = \frac{\exp(-\epsilon_s / kT)}{Z}$$

som gir:

$$p_- = \frac{N_-}{N} = \frac{\exp(\frac{\epsilon_0}{kT})}{\exp(\frac{\epsilon_0}{kT}) + \exp(-\frac{\epsilon_0}{kT})} \quad \text{og} \quad p_+ = \frac{N_+}{N} = \frac{\exp(-\frac{\epsilon_0}{kT})}{\exp(\frac{\epsilon_0}{kT}) + \exp(-\frac{\epsilon_0}{kT})}.$$

Oppgave 2

a) 1 -> 2 er isoterm magnetisering og 2 -> 3 er isentrop demagnetisering.



b) Det totale differensiale av S er: $dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_B dT + \left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_T dB$.

c) Den termodynamiske identitet og differensialet av Helmholtz fri energi gir:

$$dE = TdS - MdB \text{ innsatt i } dF = dE - TdS - SdT \text{ gir } dF = -SdT - MdB.$$

Den siste likningen gir forholdene

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_B \quad \text{og} \quad M = -\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_T.$$

Vi deriverer F en gang til og får Maxwell relasjonen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_T = -\left(\frac{\partial}{\partial B}\right)_T \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_B = -\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_B \left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_T = \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_B.$$

$$\text{d)} \quad \frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_B = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_B \left(\frac{\partial T}{\partial E} \right)_B = \frac{1}{C_B(T, B)} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_B.$$

e) For den isentrope prosessen er $dS=0$. Differensialet i b) gir

$$\left(\frac{\partial T}{\partial B} \right)_S = - \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial B} \right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_B}.$$

Fra $M = V\chi B$ får vi $\left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_B = VB \left(\frac{\partial \chi}{\partial T} \right)_B$, og med c) og d) får vi:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial B} \right)_S = - \frac{VTB}{C_B(T, B)} \left(\frac{\partial \chi}{\partial T} \right)_B.$$

f) Setter vi inn de oppgitte uttrykkene for C_B og χ , får vi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial B} \right)_S = \frac{aBT}{b + aB^2} \Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{aB \cdot dB}{b + aB^2}.$$

Integrering gir nå

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = \int_{B_1}^{B_2} \frac{aB \cdot dB}{b + aB^2} = \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b + aB_2^2}{b + aB_1^2} \right) \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{b + aB_2^2}{b + aB_1^2}}.$$

$$\text{g)} \quad \left(\frac{\partial C_B}{\partial B} \right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial B} \right)_T \left[T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_B \right] = T \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)_B \left(\frac{\partial S}{\partial B} \right)_T = T \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)_B \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_B = VTB \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial T^2} \right)_B.$$

Integrerer vi denne likningen med hensyn på B , får vi

$$C_B(T, B) = C_B(T, 0) + VT \int_0^B \left(\frac{\partial^2 \chi(T, B')}{\partial T^2} \right)_{B'} B' dB'.$$

h) Setter vi inn uttrykkene fra f), finner vi

$$C_B(T, B) = \frac{Vb}{T^2} + VT \int_0^B \frac{2a}{T^3} B' dB' = \frac{V}{T^2} (b + aB^2).$$

Oppgave 3

a) Gibbs sum er gitt ved:

$$\Xi = \sum_{ASN} e^{(N\mu - \epsilon_s) / kT}$$

Vi har 2 muligheter: $(N, \epsilon_s) = (0, 0)$ og $(1, \epsilon)$, som gir $\Xi = 1 + e^{(\mu - \epsilon) / kT}$

Sannsynlighet for besetning blir

$$f(\epsilon, \mu, T) = \langle N \rangle = \frac{1}{\Xi} \sum_{ASN} N e^{(N\mu - \epsilon_s) / kT} = \frac{1}{\Xi} [0 + 1e^{(\mu - \epsilon) / kT}] = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu) / kT} + 1}.$$

T er temperatur, k er Boltzmann's konstant,

ϵ er energien til et enkelt - partikkelnivå og μ er kjemisk potensial.

b) Når T blir liten, vil eksponenten i uttrykket for f anta verdier alt ettersom tilstanden er under eller over det kjemiske potensial. Vi får følgende step-funksjon:

$$\epsilon < \mu \Rightarrow f(\epsilon) \rightarrow \frac{1}{\infty + 1} = 0$$

$$\epsilon > \mu \Rightarrow f(\epsilon) \rightarrow \frac{1}{0 + 1} = 1$$

Systemet som helhet oppfører seg som om $T=0$, hvis $kT \ll \mu(T=0) = \epsilon_F$.

(Følgende svar godtas også: Vi kan benytte tilnærmelsen dersom temperaturen er tilstrekkelig lav $kT \ll |\epsilon - \mu|$.)

c) Vi definerer a og n slik at:

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \equiv an^2, \text{ der vi setter } L^3 = V.$$

Vi finner antall elektroner opp til indeks-tallet n ($\epsilon = an^2 \Rightarrow d\epsilon = 2a \cdot dn$) ved:

$$N = 2 \frac{1}{8} \int 4\pi n^2 dn = \pi \int n^2 dn = \frac{\pi}{3} \left(\frac{\epsilon}{a} \right)^{3/2},$$

der første faktor skyldes spinn opp/ned og andre faktor at n_x, n_y og $n_z > 0$.

$$\frac{dN}{d\epsilon} = \frac{\pi \epsilon^{1/2}}{2a^{3/2}}, \text{ der vi innsetter } a^{3/2} = \left(\frac{\pi}{2m} \right)^{3/2} \frac{\hbar^3}{V}, \text{ som gir:}$$

$$\frac{dN}{d\epsilon} = D(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon^{1/2}$$

d) Vi har at alle orbitaler er fylt opp til n_F

$$N = 2 \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} n_F^3 = \frac{\pi}{3} n_F^3.$$

Innsetter dette

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n_F}{L} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi \left(\frac{3N}{\pi} \right)^{1/3}}{L} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}.$$

Her er $n = N/V$ partikkelkonsentrasjon.

e)

Setter $p_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\hbar \pi}{L} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2} = \frac{\hbar \pi}{L} n = an$. Da blir:

$$\epsilon^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = a^2 c^2 n^2 + m^2 c^4 \Rightarrow \epsilon d\epsilon = a^2 c^2 n \cdot dn \text{ og } n = \frac{1}{ac} (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{1/2},$$

dermed er antall partikler inkludert for indekstallet n gitt ved:

$$\begin{aligned} N &= 2 \frac{1}{8} \int 4\pi n^2 dn = \pi \int n^2 dn = \pi \int n(n \cdot dn) \\ &= \pi \frac{1}{a^3 c^3} \int (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{1/2} \epsilon \cdot d\epsilon. \end{aligned}$$

Vi setter nå $u = \epsilon^2 - m^2 c^4 \Rightarrow du = 2\epsilon \cdot d\epsilon$, og får

$$N = \pi \frac{1}{2a^3 c^3} \int (u)^{1/2} \cdot du = \pi \frac{1}{2a^3 c^3} \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^{\epsilon^2 - m^2 c^4} = \frac{\pi}{3a^3 c^3} (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{3/2}.$$

Tilstandstettheten blir

$$D(\epsilon) = \frac{dN}{d\epsilon} = \frac{d \frac{\pi}{3a^3 c^3} (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{3/2}}{d\epsilon} = \frac{\pi \epsilon}{a^3 c^3} (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{1/2} = \frac{V}{\pi^2} \frac{\epsilon}{(hc)^3} (\epsilon^2 - m^2 c^4)^{1/2}.$$

f) Vi har at alle orbitaler er fylt opp til n_F

$$N = 2 \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} n_F^3 = \frac{\pi}{3} n_F^3.$$

Innsetter dette

$$\begin{aligned} \epsilon_F &= \sqrt{p_F^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{a^2 \cdot n_F^2 c^2 + m^2 c^4} \\ &= \sqrt{\left(\frac{h\pi}{L}\right)^2 n_F^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{h^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^{\frac{32}{3}} \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{h^2 c^2 (3\pi^2 n)^{2/3} + m^2 c^4}. \end{aligned}$$

Her er $n = N/V$ partikkelkonsentrasjon.

g) Ved kjemisk eller diffusiv likevekt har vi

$$\sum_j \nu_j \mu_j = 1\mu_e + 1\mu_p - 1\mu_n = 0,$$

der vi bytter ut kjemiske potensialer med fermienergier siden $T=0$. Protoner har ladning $+e$, elektroner har ladning $-e$ og nøytroner har ingen ladning. Ladningsnøytralitet gir at det må være like mange protoner som elektroner i systemet – og dermed like store konsentrasjoner, $n_e = n_p$.

h)

$$\epsilon_F^e = \epsilon_F^n - \epsilon_F^p \Rightarrow \sqrt{h^2 c^2 (3\pi^2 n_e)^{2/3} + m_e^2 c^4} = m_n c^2 - m_p c^2 \Rightarrow$$

$$n_e = \frac{1}{3\pi^2} \left[\frac{(m_n c^2 - m_p c^2)^2 - m_e^2 c^4}{h^2 c^2} \right]^{3/2} = \frac{1}{3\pi^2} \left[\frac{(939.5656 - 938.2723)^2 - 0.511^2}{197.327^2 \cdot 10^{-30} m^2} \right]^{3/2}$$

$$= 7.37127 \cdot 10^{36} m^{-3}.$$

$$\rho = (m_p + m_e) n_e = (938.273 + 0.511) \frac{\text{MeV}}{c^2} n_e$$

$$= 938.784 \cdot 1.783 \cdot 10^{-30} \cdot 7.37127 \cdot 10^{36} \text{ kg} \cdot m^{-3} = 1.23 \cdot 10^{10} \text{ kg} \cdot m^{-3}.$$

Løsninger: Eksamen Fys114, vår 2000

Oppgave 1

- a) Gassen har varmekapasitet $C_v = (\frac{3}{2} + 1)Nk$ fordi hvert molekyl har, i tillegg til translatorisk bevegelse, indre frihetsgrader. I dette tilfellet er det bare rotasjonen av de indre frihetsgrader som bidrar med Nk . Vibrasjon blir ikke eksitert ved den aktuelle temperatur.

- b) Uttrykket for energien E finnes ved

$$C_v = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_v = \left(\frac{dE + pdV}{dT} \right)_v = \frac{dE}{dT} \Rightarrow E = \int_0^T C_v dT = \frac{5}{2} NkT$$

Energien av en en ideel gass avhenger hverken av trykk eller volum, siden hvert molekyl pr. definisjon ikke vekselvirker med andre molekyler i gassen. Avstanden til neste molekyl er alltid så stor at den ikke påvirker energien av gassen. Energien er bare gitt av molekylets egen kinetiske bevegelse, som bestemmes av temperaturen.

- c) Vi antar at antall molekyler N er konstant, og får for en isentropisk prosess $TdS = dE + pdV = 0$.

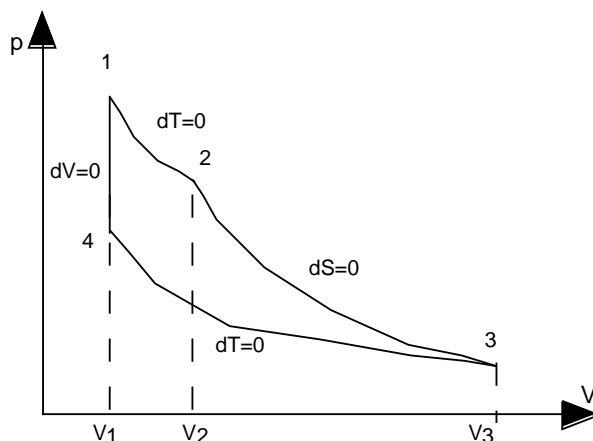
Dermed blir

$$C_v dT + \frac{NkT}{V} dV = 0 \Rightarrow \frac{5}{2} Nk \frac{dT}{T} + Nk \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{5}{2} \int \frac{dT}{T} + \int \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \frac{5}{2} \ln T + \ln V = \text{konstant} \Rightarrow$$

$$VT^{5/2} = \text{konstant.}$$

- d)



- e) Adiabatligningen løst i oppgave c) gir at for punktene 2 og 3 gjelder

$$V_2 T_2^{5/2} = V_3 T_3^{5/2} \Rightarrow \frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{5/2} = \left(\frac{T_1}{T_3}\right)^{5/2} = \left(\frac{2T_3}{T_3}\right)^{5/2} = 2^{5/2}.$$

Ettersom $V_2 = 2V_1$, blir

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_3}{2V_1} = 2^{5/2} \Rightarrow V_3 = 2^{7/2} V_1.$$

- f) Arbeidet W utført av systemet på omgivelsene i delprosessene (1 → 2), (2 → 3) og (3 → 4) blir (det er ikke noe arbeid i den isokore prosess):

$$W_{12} = \int_1^2 p dV = NkT_1 \int_1^2 \frac{dV}{V} = NkT_0 \ln \frac{V_2}{V_1} = NkT_0 \ln 2,$$

$$W_{23} = \int_2^3 p dV = - \int_2^3 dE = - \int_2^3 C_V dT = - \frac{5}{2} Nk(T_3 - T_2) = \frac{5}{4} NkT_0,$$

$$W_{34} = \int_3^4 p dV = NkT_3 \int_3^4 \frac{dV}{V} = Nk \frac{T_0}{2} \ln \frac{V_4}{V_3} = Nk \frac{T_0}{2} \ln \frac{V_1}{V_3} = - NkT_0 \frac{7}{4} \ln 2.$$

- g) Tilført varmemengde til systemet i delprosessene (1 → 2) og (4 → 1) er

$$Q_{12} = W_{12} + E_{12} = W_{12} = NkT_0 \ln 2,$$

$$Q_{41} = W_{41} + E_{41} = E_{41} = E(T_0) - E(T_0/2) = \frac{5}{4} NkT_0.$$

- h) Kretsløpets vkningsgrad η blir

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{inn}}} = \frac{W_{12} + W_{23} + W_{34}}{Q_{12} + Q_{41}} = \frac{5 - 3 \ln 2}{5 + 4 \ln 2} = 0.376.$$

For en Carnot maskin får vi

$$\eta_C = \frac{W}{Q_{\text{inn}}} = 1 - \frac{T_3}{T_1} = 0.5$$

som er den maksimalt oppnåelige virkningsgrad.

Oppgave 2

- a) Helmholtz fri energi for en ideell gass er gitt ved

$$F = -kT \ln \frac{(n_Q V)^N}{N!} \approx -kTN(\ln V + \ln n_Q - \ln N + 1)$$

der vi har brukt Stirlings formell og innsatt enkeltpartikkel partisjonsfunksjonen $Z_1 = n_Q V$. Det kjemiske potensial blir

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = -kT(\ln V + \ln n_Q - \ln N + 1) + kT = kT \ln \frac{N/V}{n_Q} = kT \ln \frac{n}{n_Q}.$$

Videre bruker vi definisjonen for den absolutte aktivitet

$$\lambda = \exp(\mu/kT) = \exp\left[\frac{kT \ln(n/n_Q)}{kT} \right] = n/n_Q.$$

b) Gibbs sum blir

$$\Xi = \sum_{ASN} \exp[(N\mu - \epsilon_s)/kT] = \exp[(0\mu - 0)/kT] + \exp[(1\mu - (-\epsilon_0))/kT]$$

Bruker så definisjonen for den absolutte aktivitet (se over), og får

$$\Xi = 1 + \lambda \exp(\epsilon_0/kT).$$

c) Andelen f av Mb molekyler som har bundet til seg et O₂ molekyl i diffusiv likevekt blir

$$f = \frac{[\text{MbO}_2]}{[\text{Mb}] + [\text{MbO}_2]} = \frac{1}{\Xi} \lambda \exp(\epsilon_0/kT) = \frac{1}{\lambda^{-1} \exp(-\epsilon_0/kT) + 1}.$$

d) Andelen kan uttrykkes ved hjelp av trykket for ideel gass $p = \frac{NkT}{V}$:

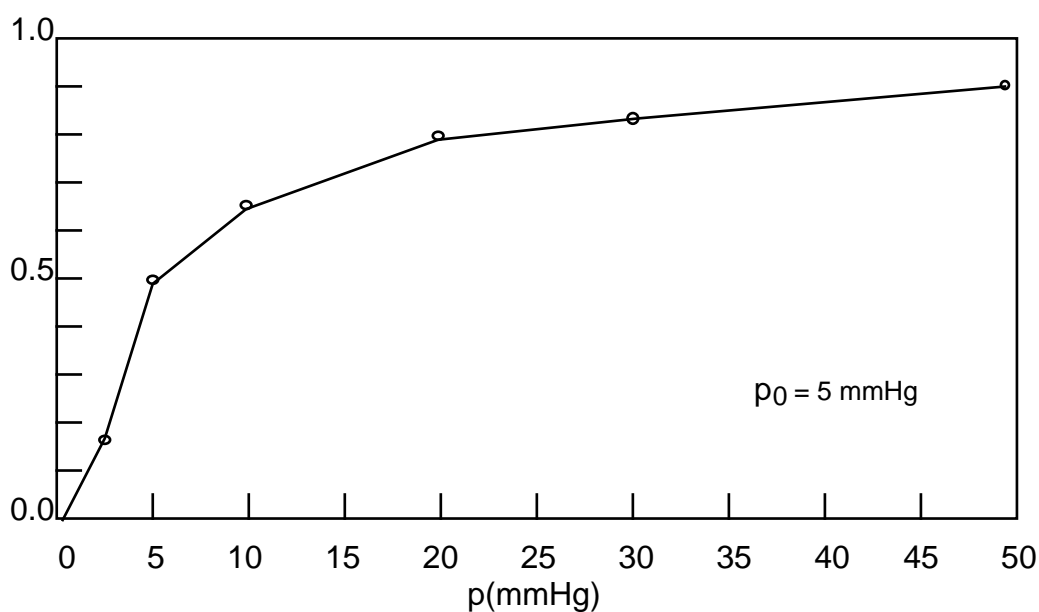
$$f = \left(\frac{1}{\lambda^{-1} \exp(-\epsilon_0/kT) + 1} \right) \frac{p}{p} = \frac{p}{p_0 + p}$$

der

$$p_0 = \lambda^{-1} \exp(-\epsilon_0/kT) p = \frac{n_0}{n} \exp(-\epsilon_0/kT) \frac{NkT}{V} = n_0 kT \exp(-\epsilon_0/kT).$$

e) Vi antar $p_0 = 5 \text{ mmHg}$. Da blir andelen

$f = \frac{0}{5+0}, \frac{5}{5+5}, \frac{10}{5+10}, \frac{15}{5+15}, \frac{25}{5+25}, \dots$ etc. for $p = 0, 5, 10, 15, 25, \dots$ mmHg, som gir følgende graf



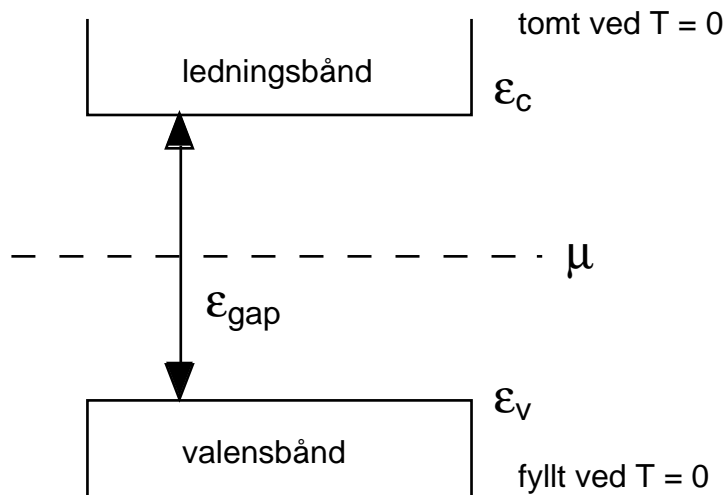
Oppgave 3

- a) Gassen kalles kvantegass dersom partiklene kommer så nær hverandre at tettheten $n=N/V$ er lik eller større enn kvantekonsentrasjonen n_Q . Dette betyr i praksis at de Broglie bølge-lengden for en partikkel er sammenliknbar med midlere avstand mellom partiklene.

Fermi gass: Består av fermioner. Dette er partikler med halvtallig spinn, f.eks. elektroner, nøytroner og helium-3. Pauliprinsippet gjelder for denne type partikler: bare én partikkel kan befolke en og samme tilstand karakterisert med et sett kvantetall.

Boson gass: Består av bosoner. Dette er partikler med heltallig spinn, f.eks. pioner, helium-4, fononer og fotoner. Det kan være flere bosoner i én tilstand. Ved lave temperaturer kan man f.eks danne Bose-Einstein kondensat, der (nesten) alle bosoner befolker laveste tilstand.

- b)



I en intrinsikk halvleder er elektron og hull konsentrasjonen lik, $n_e = n_h$. Dette gir et kjemisk potensial omtrent midt mellom lednings- og valensbånd. Vi har nemlig (forventes ikke utregnet i denne oppgaven):

$$\begin{aligned} n_c \exp[-(\epsilon_c - \mu)/kT] &= n_v \exp[-(\mu - \epsilon_v)/kT] \Rightarrow \\ \exp[-(\epsilon_c - \mu - \mu + \epsilon_v)/kT] &= n_v / n_c \Rightarrow \\ (2\mu - \epsilon_c - \epsilon_v)/kT &= \ln(n_v / n_c) \Rightarrow \\ \mu &= \frac{1}{2}(\epsilon_c + \epsilon_v) + \frac{1}{2}kT \ln(n_v / n_c) \end{aligned}$$

- c) En intensive variabel f for et system A, forblir det samme når n like system A settes sammen: $f(nA) = f(A)$, f.eks trykk p og temperatur T .
En ekstensiv variabel F for et system A er proporsjonal med antall system som settes sammen: $F(nA) = nF(A)$, f.eks. volum V og energi E .

d) Mikrokanonisk ensemble:

Systemet er totalt isolert fra omgivelsene, og karakteriseres av gitt energi E og partikkeltall N . Temperaturen $\langle T \rangle$ kan da regnes ut, og blir uskarp.

Kanonisk ensemble:

Systemet står i termisk kontakt med et uendelig stort varmereservoir (varmebad). Dette gir skarp temperatur, mens energien fluktuerer.

Systemet er lukket, dvs. ingen utveksling av partikler med omgivelsene.

Stor kanonisk ensemble:

Systemet er åpent og i kontakt med et varmebad. Det er partikkelutveksling med omgivelsene. Vi har skarp temperatur, men fluktuasjoner i både energi og partikkeltall.

Oppgave 4

a) Vi får følgende generelle differensialer

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT$$

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T dV + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dT$$

der vi har antatt h.h.v. $V = V(p, T)$ og $p = p(T, V)$. Ved å sammenlikne med de oppgitte uttrykkene, kan vi identifisere:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p, \quad \kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad \text{og} \quad \beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V.$$

b) Innsetter overstående i likningen $\alpha = \beta \kappa p$, som gir

$$\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T p$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p = -1$$

som er i overenstemmelse med kjederegelen, og hvor vi har brukt at $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p^{-1} = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p$.

c) Det er oppgitt at følgende to uttrykk er like (dette er egentlig de såkalte første og andre TdS likninger satt lik hverandre)

$$C_p dT - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dp = C_v dT + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV$$

$$dT = \frac{T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dp + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dV}{C_p - C_v}$$

Differensialet for T gir

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V dp + \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p dV,$$

som betyr at $\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_V = \frac{T}{C_p - C_v} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ eller $C_p - C_v = T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$.

d) Fra oppgave b) og c) har vi at: $C_p - C_v = T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \alpha \beta p T V = \frac{\alpha^2}{\kappa} T V$.

e) Med tilstandslikningen for ideell gass $pV = NkT$ blir

$$V(p, T) = \frac{NkT}{p} \text{ og } p(V, T) = \frac{NkT}{V}$$

som gir $C_p - C_v = T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = T \left(\frac{Nk}{p} \right) \left(\frac{Nk}{V} \right) = T \left(\frac{Nk}{NkT} \right) Nk = Nk$

for en ideell gass.

f) Siden vannets tetthet er maksimal ved 4°C vil

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = 0,$$

som gir at $C_p = C_v$. Generelt kan aldri $C_p - C_v$ være negativ (bare null eller større) fordi

$\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$ er negativ for alle kjente substanser. Dermed blir

$$C_p - C_v = \frac{\alpha^2}{\kappa} T V > 0, \text{ siden } \kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T > 0.$$

Løsninger: Eksamen Fys114, høst 2000

Oppgave 1

a) Mikrokanonisk ensemble:

Systemet er totalt isolert fra omgivelsene, og karakteriseres av gitt energi E og partikkeltall N . Temperaturen $\langle T \rangle$ kan da regnes ut, og blir uskarp.

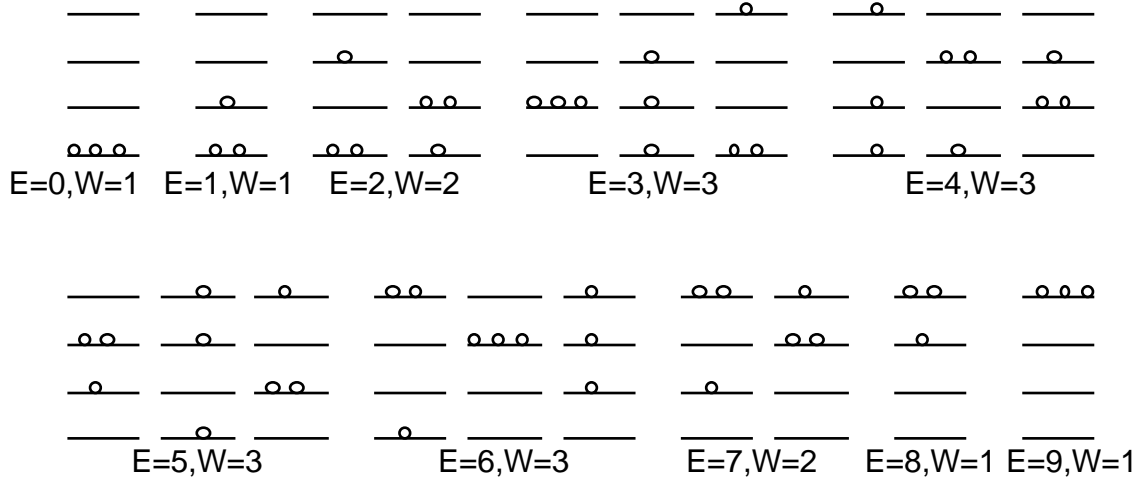
Kanonisk ensemble:

Systemet står i termisk kontakt med et uendelig stort varme-reservoir (varmebad). Dette gir skarp temperatur, mens energien fluktuierer.

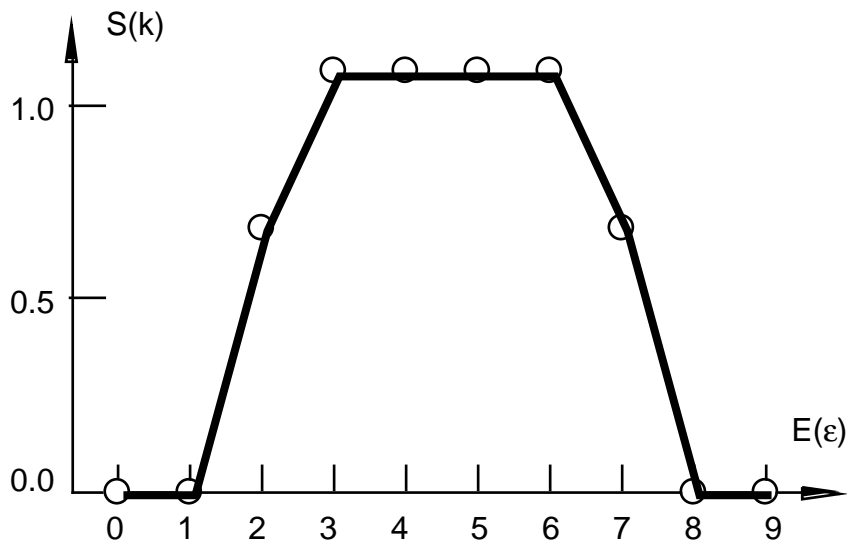
Systemet er lukket, dvs. ingen utveksling av partikler med omgivelsene.

b)

Vi teller opp antall realisasjonsmuligheter:



c)



- d)** Vi finner den statistiske temperaturen T ved $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$. Her er det noe spillerom hvorledes man deriverer i tilfellet $E = 2\varepsilon$, og 3 like gode verdier kan finnes. Her bruker vi middelverdien. Videre kan man filosofere over + og/eller – i uttrykkene under - hvis man vil.

$$E = 0\varepsilon \text{ gir } T = \pm\infty$$

$$E = 2\varepsilon \text{ gir } \frac{1}{T} = \frac{\Delta S}{\Delta E} = \frac{k \ln 3}{2\varepsilon} \Rightarrow T = 1.82\varepsilon / k .$$

$$E = 9\varepsilon \text{ gir } T = \pm\infty$$

- e)** Antall partikler i gjennomsnitt:

$$E = 0\varepsilon \text{ gir } 3 \text{ i laveste nivå og ellers } 0$$

$$E = 2\varepsilon \text{ gir } 1.5 \text{ i laveste, } 1.0 \text{ i andre og } 0.5 \text{ i tredje nivå}$$

$$E = 9\varepsilon \text{ gir } 3 \text{ i høyeste nivå og ellers } 0$$

- f)** Partisjonsfunksjonen blir

$$Z = 1 + 1e^{-\varepsilon/kT} + 2e^{-2\varepsilon/kT} + 3e^{-3\varepsilon/kT} + 3e^{-4\varepsilon/kT} + 3e^{-5\varepsilon/kT} \\ + 3e^{-6\varepsilon/kT} + 2e^{-7\varepsilon/kT} + 1e^{-8\varepsilon/kT} + 1e^{-9\varepsilon/kT}$$

- g)**

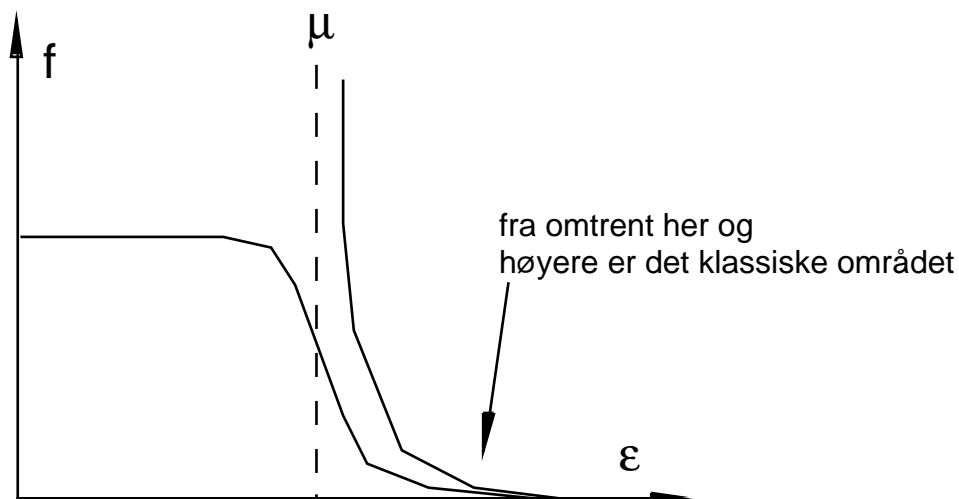
$T \rightarrow 0$ gir $e^{-\varepsilon/kT} = 0$, og ingen mulighet for termiske eksitasjoner, altså 3 partikler i laveste nivå.

$T \rightarrow \infty$ gir $e^{-\varepsilon/kT} = 1$. De fire nivåer ligger i praksis ved samme energi når temperaturen er uendelig, dvs. $kT \gg \varepsilon$. Antall partikler blir da jamnt fordelt på alle fire nivåer, dvs. 3/4 partikkel i hvert nivå.

- h)** Nei, det er tydelig forskjellig besetningstall for forskjellige temperaturer (eller totalenergier). Spesielt kan nevnes at uendelig temperatur i kanonisk system gir 0.75 partikler i øverste nivå, mens for mikrokanonisk system har vi 3 partikler i øverste nivå. Vi har et altfor lite system, de to ensemble teorier gir tilnærmet like svar når antall partikler og antall nivåer vokser, kalles termodynamiske grense.

Oppgave 2

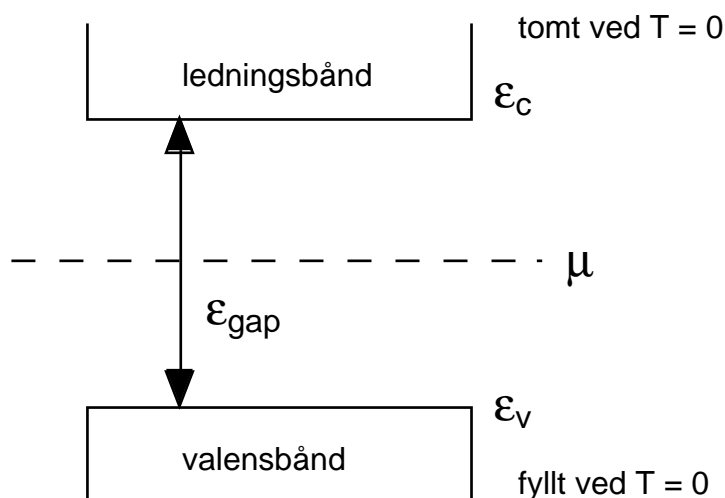
- a) Fermioner er partikler med halvtallig spinn, f.eks. elektroner, nøytroner og helium-3. Pauliprinsippet gjelder for denne type partikler: bare én partikkel kan befolke en og samme tilstand karakterisert med et sett kvantetall. Bosoner er partikler med heltallig spinn, f.eks. pioner, helium-4, fononer og fotoner. Det kan være flere bosoner i én tilstand. Ved lave temperaturer kan man f. eks danne Bose-Einstein kondensat, der (nesten) alle bosoner befolker laveste tilstand.



Når $\exp[(\epsilon - \mu)/kT] \gg 1$ blir for begge to tilfellene:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\exp[(\epsilon - \mu)/kT]} = \exp[(\mu - \epsilon)/kT] = \lambda \exp(-\epsilon/kT).$$

- b)



Eksempler på halvledere: Si, Ge, GaAs, InP, InSb. Halvlederen kan dopes med atomer med ett mer valenselektron, slik at vi får overskudd på elektroner. Det kjemiske potensial øker, og vi har n-type. Tilsvarende (men omvendt) for p-type.

- c) Fra uttrykket for Gibbs fri energi $G = E - TS + pV$, får vi

$$dG = dE - TdS - SdT + Vdp + pdV$$

og innsatt den termodynamiske identitet $TdS = dE + pdV$ for et lukket system, får vi

$$dG = -SdT + Vdp = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T dp.$$

Sammenlikner og ser at $S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p$ og $V = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$ som gir Maxwellrelasjonen

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\frac{\partial}{\partial p} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p \right]_T = -\frac{\partial}{\partial T} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T \right]_p = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Oppgave 3

- a)

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial [kT \ln(Z_1^N / N!)]}{\partial T} \\ &= Nk(\ln Z_1 - \ln N + 1) + NkT \frac{\partial}{\partial T} (\ln T^{3/2} + konst.) \\ &= Nk(\ln n_Q V - \ln N + 1) + \frac{3}{2} NkT \frac{\partial}{\partial T} \ln T \\ &= Nk[\ln(n_Q / n) + 5/2] \end{aligned}$$

- b) Fra oppgave a) får vi $S = Nk \left[\ln \left(\frac{T^{3/2}}{N/V} \right) + konst \right]$, der N er konstant. Dermed

avhenger entropien bare av $VT^{3/2}$. For konstant entropi må derfor $VT^{3/2}$ og dermed $TV^{2/3}$ være konstant.

- c) Her er $\Delta W = 0$, slik at $\Delta Q = \Delta E = C_V \Delta T$.

$$\Delta Q_{23} = C_V (T_3 - T_2)$$

$$\Delta Q_{41} = C_V (T_1 - T_4)$$

- d) $\oint dE = 0 \Rightarrow \Delta W = \Delta Q = \Delta Q_{23} + \Delta Q_{41} = C_V (T_3 - T_2 + T_1 - T_4)$.

- e) $\eta = \frac{\Delta W}{\Delta Q_{inn}} = \frac{\Delta Q_{23} + \Delta Q_{41}}{\Delta Q_{23}} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$

- f) De to adiabater gir oss to likninger som kan subtraheres fra hverandre:

$$T_1 V_1^{2/3} = T_2 V_2^{2/3}$$

$$T_4 V_1^{2/3} = T_3 V_2^{2/3}$$

$$(T_1 - T_4) V_1^{2/3} = (T_2 - T_3) V_2^{2/3}$$

$$\frac{T_1 - T_4}{T_2 - T_3} = \frac{V_2^{2/3}}{V_1^{2/3}}$$

$$\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{2/3} = 1 - r^{-2/3}.$$

Med $r = 10$ får vi $\eta = 1 - 10^{-2/3} = 0.78$

Oppgave 4

- a) Det termiske middel for antall partikler i et storkanonisk ensemble er

$$\langle N \rangle = \Xi^{-1} \sum_{ASN} N \exp[(N\mu - \epsilon_s)/kT] = \Xi^{-1} \sum_{ASN} N [\exp(\mu/kT)]^N \exp[-\epsilon_s/kT] =$$

$$\Xi^{-1} \sum_{ASN} N \lambda^N \exp[-\epsilon_s/kT] = \Xi^{-1} \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \Xi = \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \Xi.$$

Her er:

Ξ = stor - kanoniske partisjonsfunksjon

μ = kjemisk potensial

λ = absolutt aktivitet

k = Boltzmanns konstant

ANS = alle partikler og tilstander

- b) Den storkanoniske partisjonsfunksjonen blir produkt av alle adsorpsjonssentre

$$\Xi = \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \exp[(1\mu - \epsilon_i)/kT] \right]^{N_0} = \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda \exp(-\epsilon_i/kT) \right]^{N_0} = (1 + \lambda a)^{N_0}.$$

Her er $a = \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-\epsilon_i/kT)$.

- c) Midlere antall partikler adsorbent til adsorpsjonssentre blir

$$\langle N \rangle = \lambda \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \lambda} = \lambda \frac{\partial \ln(1 + \lambda a)^{N_0}}{\partial \lambda} = N_0 \frac{\lambda a}{1 + \lambda a}.$$

d) Det kjemisk potensial μ for systemet finnes ved at vi har fra forrige oppgave at

$$\lambda a = \frac{\langle N \rangle}{N_0 - \langle N \rangle}. \text{ Vi har}$$

$$\lambda = \exp(\mu/kT) = a^{-1} \frac{\langle N \rangle}{N_0 - \langle N \rangle} \Rightarrow \mu = kT \left(\ln \frac{\langle N \rangle}{N_0 - \langle N \rangle} - \ln a \right).$$

e) Vi husker at uttrykk av formen $(A + B)^{N_0}$ kan skrives som en binomial rekke (se Karl Rottmann), og gjenkjenner da at

$$\Xi = (1 + \lambda a)^{N_0} = \sum_{N=0}^{N_0} \frac{N_0!}{N!(N_0 - N)!} (\lambda a)^N = \sum_{N=0}^{N_0} C_N \lambda^N,$$

der $C_N = \frac{N_0!}{N!(N_0 - N)!} a^N$ for $N \leq N_0$.

f) Det kjemiske potensial blir:

$$\begin{aligned} \mu &= -kT \frac{\partial}{\partial N} \ln C_N = -kT \frac{\partial}{\partial N} \left[\ln \frac{N_0!}{N!(N_0 - N)!} + N \ln a \right] \\ &= -kT \frac{\partial}{\partial N} \left[\ln \frac{N_0!}{N!(N_0 - N)!} \right] - kT \ln a \\ &= -kT \frac{\partial}{\partial N} [N_0 \ln N_0 - N \ln N - (N_0 - N) \ln(N_0 - N)] - kT \ln a \\ &= -kT [-\ln N - 1 + \ln(N_0 - N) + 1] - kT \ln a \\ &= kT \left[\ln \frac{N}{N_0 - N} - \ln a \right] \end{aligned}$$

hvor vi har brukt Stirlings tilnærmedelse.

Vi får samme uttrykk som i oppgave d) - bare at vi her har skarpt partikkeltall.

Løsninger: Eksamen Fys114, vår 2001

Oppgave 1

a) Partisjonsfunksjonen er $Z = \sum_i \exp(-\epsilon_i/kT) = 1 + e^{-\epsilon/kT}$.

b) Helmholtz fri energi blir $F(T) = -kT \ln(1 + e^{-\epsilon/kT})$.

c) Entropien finnes som $S(T) = -\frac{\partial F}{\partial T} = k \ln(1 + e^{-\epsilon/kT}) + \frac{\epsilon}{T} \frac{e^{-\epsilon/kT}}{1 + e^{-\epsilon/kT}}$.

d) Energien blir $\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_i \epsilon_i e^{-\epsilon_i/kT} = \frac{0 + \epsilon e^{-\epsilon/kT}}{1 + e^{-\epsilon/kT}} = \epsilon \frac{e^{-\epsilon/kT}}{1 + e^{-\epsilon/kT}}$, eller vi kan skrive

$$\langle E \rangle = F + TS = -kT \ln(1 + e^{-\epsilon/kT}) + T \left[k \ln(1 + e^{-\epsilon/kT}) + \frac{\epsilon}{T} \frac{e^{-\epsilon/kT}}{1 + e^{-\epsilon/kT}} \right] = \epsilon \frac{e^{-\epsilon/kT}}{1 + e^{-\epsilon/kT}}.$$

(Også andre måter finnes).

e) Matematisk har vi følgende grenser når $T \rightarrow \infty$:

$$e^{-\epsilon/kT} \rightarrow 1$$

$$S \rightarrow k \ln(1 + 1) + \frac{\epsilon}{kT} \frac{k}{1 + 1} \rightarrow k \ln(2)$$

$$\langle E \rangle \rightarrow \epsilon \frac{1}{1 + 1} = \epsilon/2.$$

Entropien går mot $S = k \ln 2$, som betyr at multiplisiteten er $W = 2$. Dette betyr at de 2 nivåene opptrer likeverdige. Vi får da at det er lik sannsynlighet (50%) for at hver av dem er befolket. Da blir også middelverdien av energien lik $\epsilon/2$, som funnet over. Siden $\langle E \rangle$ går mot en konstant verdi, vil $C_V = \partial \langle E \rangle / \partial T \rightarrow 0$ (eller vi ser at siden S går mot en konstant verdi, vil $C_V = T \partial S / \partial T \rightarrow 0$).

f) Den nye partisjonsfunksjonen blir $Z = \sum_i W_i \exp(-\epsilon_i/kT) = 1 + W e^{-\epsilon/kT}$.

Hvis siste leddet er mye større enn det første (som er lik 1), blir $W \gg \exp(\epsilon/kT)$, og vi får forenklet at $Z = W e^{-\epsilon/kT}$.

g) Entropien i tilfellet $W \gg \exp(\epsilon/kT)$ finnes ved

$$S(T) = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial [-kT \ln(W e^{-\epsilon/kT})]}{\partial T} = k \ln(W e^{-\epsilon/kT}) + \frac{\epsilon}{T} = k \ln(W).$$

- h)** For $T = 0$ har vi bare en mulig tilstand, som gir $S(T = 0) = 0$. Videre vet vi at $S(T = \epsilon/kT) = 4.7$. Da blir $\Delta S = 4.7k = k \ln(W) \Rightarrow W = e^{4.7} = 110$. Vi sjekker betingelsen for det forenklete uttrykket i g) ved at følgende er oppfylt: $\exp(\epsilon/kT) = \exp(1) = 2.7 \ll W = 110$.

Oppgave 2

Delspørsmålene i denne oppgaven har ikke nødvendigvis noen innbyrdes sammenheng og kan besvares kort.

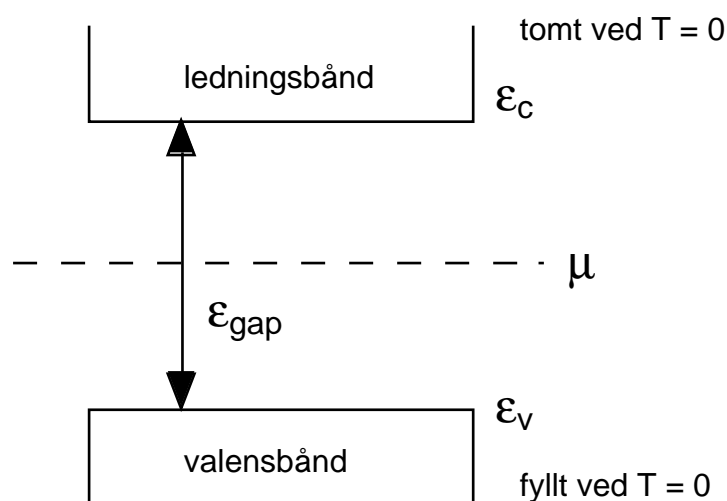
- a)** Betingelsen for at en gass og en væske er i termodynamisk likevekt er

$$T(\text{gass}) = T(\text{væske})$$

$$p(\text{gass}) = p(\text{væske})$$

$$\mu(\text{gass}) = \mu(\text{væske})$$

- b)** Skisse av en halvleder:



En donor er en urenhet som kan lett avgi et elektron til krystallen, og donoren blir dermed selv positivt ladet. En akseptor tar lett til seg et elektron, og blir dermed selv negativ (man kan i stedet si at akseptoren avgir et hull til krystallen). Donor nivåene ligger like under ledningsbåndet, og akseptor nivåene ligger like over valensbåndet. En n-type halvleder har flere ledningselektroner enn hull. For en p-type halvleder er det omvendt.

- c)** Fermioner er partikler med halvtallig spinn, f.eks. elektroner, nøytroner og helium-3. Pauliprinsippet gjelder for denne type partikler: bare én partikkel kan befolke en og samme tilstand karakterisert med et sett kvantetall.

Bosoner er partikler med heltallig spinn, f.eks. pioner, helium-4, fononer og fotoner. Det kan være flere bosoner i én tilstand. Ved lave temperaturer kan man f. eks. danne Bose-Einstein kondensat, der (nesten) alle bosoner befolker laveste tilstand.

- d) Fermi-Diracs fordelingsfunksjon gjelder for fermioner. Gibbs sum er gitt ved:

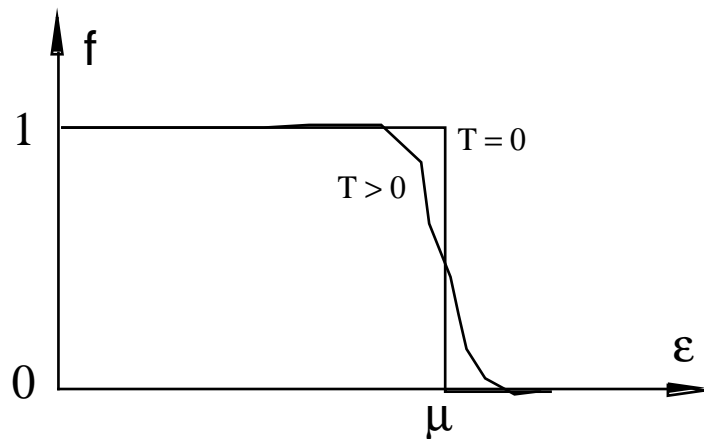
$$\Xi = \sum_{ASN} e^{(N\mu - \epsilon_s)/kT}$$

Et nivå kan enten være befolket eller ikke. Vi har altså 2 muligheter:

$$(N, \epsilon_s) = (0, 0) \text{ og } (1, \epsilon), \text{ som gir } \Xi = 1 + e^{(\mu - \epsilon)/kT}$$

Sannsynlighet for besetning blir:

$$f(\epsilon, \mu, T) = \langle N \rangle = \frac{1}{\Xi} \sum_{ASN} N e^{(N\mu - \epsilon_s)/kT} = \frac{1}{\Xi} [0 + 1e^{(\mu - \epsilon)/kT}] = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1}.$$



Oppgave 3

- a) Entropien finnes ved $S = -\frac{\partial}{\partial T} F = \frac{\partial}{\partial T} \frac{a}{3} VT^4 = \frac{4a}{3} VT^3.$

$$\text{Trykket av gassen er } p = -\frac{\partial}{\partial V} \left(-\frac{a}{3} VT^4 \right) = \frac{a}{3} T^4.$$

- b) $E = F + TS = -\frac{a}{3} VT^4 + T \frac{4a}{3} VT^3 = aVT^4 = 3pV$ kalles tilstandslikningen for foton gassen (kan også uttrykkes på andre måter).

- c) Gassens kjemiske potensial er $\mu = \frac{\partial}{\partial N} \left(-\frac{a}{3} VT^4 \right) = 0.$ Dette betyr at det ikke koster energi og danne et foton: Fotonene absorberes og emitteres fritt fra veggene i hulrommet.

- d) Adiabatisk prosess gir: $0 = TdS = dE + pdV \Rightarrow pdV = -dE.$

Tilstandslikningen i b) gir: $dE = 3pdV + 3Vdp$.

Kombinerer de to siste likningene og får:

$$4pdV + 3Vdp = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0$$

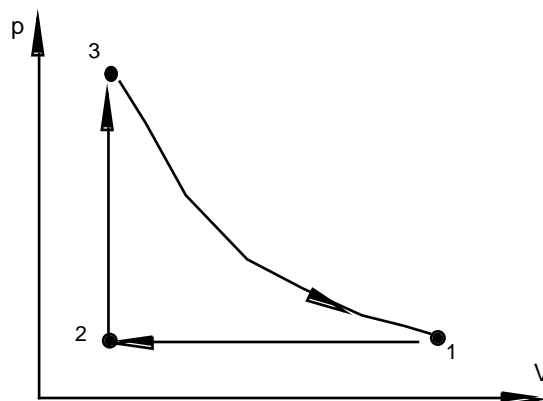
$$\Rightarrow \frac{4}{3} \ln V + \ln p = \text{konstant} \Rightarrow pV^{3/4} = \text{konstant}.$$

e) Fotongassen består av 3 prosesser:

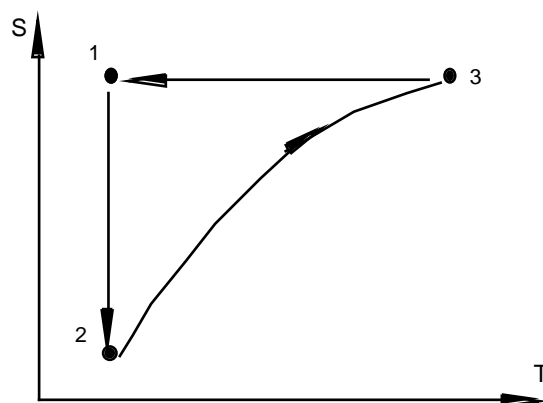
1 \rightarrow 2 : Isobar kompresjon

2 \rightarrow 3 : Isokor trykkøkning

3 \rightarrow 1 : Adiabatisk ekspansjon.



f) Samme prosesser i et S-T diagram blir:



Oppgave 4

- a) Vet at $TdS = dE - KdL$, hvor E er uavhengig av L . Dette gir

$$\frac{\partial}{\partial L}(TdS)_T = \frac{\partial}{\partial L}(dE - KdL)_T \Rightarrow$$

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = 0 - K \Rightarrow$$

$$K = -T\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T$$

Helmholtz fri energi er $F = E - TS \Rightarrow dF = dE - TdS - SdT$. Innsetter den temodynamiske identitet og får ved konstant temperaturen ($dT = 0$):

$$dF = KdL - SdT = KdL \Rightarrow K = \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_T.$$

- b) Oppgaveteksten gir at

$$n = n_+ + n_- \text{ og } L = (n_+ - n_-)a$$

som gir

$$n_+ = \frac{na + L}{2a} \text{ og } n_- = \frac{na - L}{2a}.$$

- c) Antall kombinasjonsmuligheter er: $W = \frac{n!}{n_+!n_-!}$.

- d)

$$\begin{aligned} S &= k \ln W = k \ln \frac{n!}{n_+!n_-!} \\ &\approx k(n \ln n - n - n_+ \ln n_+ + n_+ - n_- \ln n_- + n_-) \\ &= k(n \ln n - n_+ \ln n_+ - n_- \ln n_-) \\ &= k[(n_+ + n_-) \ln(n_+ + n_-) - n_+ \ln n_+ - n_- \ln n_-] \\ &= -k \left[n_+ \ln \left(\frac{n_+}{n_+ + n_-} \right) + n_- \ln \left(\frac{n_-}{n_+ + n_-} \right) \right] \\ &= -k \left[n_+ \ln \left(\frac{na + L}{2na} \right) + n_- \ln \left(\frac{na - L}{2na} \right) \right] \\ &= -nk \left[\left(\frac{n_+}{n} \right) \ln \left(\frac{na + L}{2na} \right) + \left(\frac{n_-}{n} \right) \ln \left(\frac{na - L}{2na} \right) \right] \\ &= -nk \left[-\ln 2 + \left(\frac{n_+}{n} \right) \ln \left(\frac{na + L}{na} \right) + \left(\frac{n_-}{n} \right) \ln \left(\frac{na - L}{na} \right) \right] \\ &= -nk \left[-\ln 2 + \left(\frac{n_+}{n} \right) \ln \left(1 + \frac{L}{na} \right) + \left(\frac{n_-}{n} \right) \ln \left(1 - \frac{L}{na} \right) \right] \\ &= nk \left[\ln 2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{L}{na} \right) \ln \left(1 + \frac{L}{na} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{L}{na} \right) \ln \left(1 - \frac{L}{na} \right) \right]. \end{aligned}$$

e) Vi finner kraften ved å bruke uttrykkene fra oppgave a) og d):

$$\begin{aligned}
 K &= nkT \left\{ \frac{\partial}{\partial L} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{L}{na} \right) \ln \left(1 + \frac{L}{na} \right) \frac{1}{2} \left(1 - \frac{L}{na} \right) \ln \left(1 - \frac{L}{na} \right) \right] \right\}_T \\
 &= \frac{nkT}{2} \left[\left(\frac{1}{na} \right) \ln \left(1 + \frac{L}{na} \right) + \left(\frac{-1}{na} \right) \ln \left(1 - \frac{L}{na} \right) + \left(1 + \frac{L}{na} \right) \left(1 + \frac{L}{na} \right)^{-1} \left(\frac{1}{na} \right) + \left(1 - \frac{L}{na} \right) \left(1 - \frac{L}{na} \right)^{-1} \left(\frac{1}{-na} \right) \right] \\
 &= \frac{kT}{2a} \left[\ln \left(1 + \frac{L}{na} \right) - \ln \left(1 - \frac{L}{na} \right) + \left(\frac{1}{na} \right) + \left(\frac{1}{-na} \right) \right] \\
 &= \frac{kT}{2a} \ln \left(\frac{1 + L/na}{1 - L/na} \right)
 \end{aligned}$$

f) For $L = na$ blir kraften uendelig stor. Det er da ikke mulig og strekke strikken ytterligere. Dette er en rimelig oppførsel av strikken.

En strikk under normale forhold har mindre lengde enn maksimalt oppnåelig, dvs. at $L \ll na$. Bruker uttrykket i e) og foretar en rekkeutvikling av den naturlige

logaritme $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$ for $x \ll 1$:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{kT}{2a} \ln \left(\frac{1 + L/na}{1 - L/na} \right) = \frac{kT}{2a} [\ln(1 + L/na) - \ln(1 - L/na)] \\
 &\approx \frac{kT}{2a} [(L/na) - (L/na)^2 + (L/na) + (L/na)^2] \\
 &= \frac{kT}{na^2} L.
 \end{aligned}$$

Likningen gir at kraften er proporsjonal med lengden av strikken, som gir en god magesfølelse siden dette tilsvarer Hooke's lov.

Løsninger: Eksamen Fys114, høst 2001

Oppgave 1

a) Vi setter $\alpha^2 = h^2 \pi^2 / 2ML^2 kT$ og $u = \alpha t$ og får:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_{n_x, n_y, n_z} \exp(-\epsilon/kT) = \sum_{n_x, n_y, n_z} \exp(-\alpha^2(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)) \\ &= \iiint \exp(-\alpha^2(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)) dn_x dn_y dn_z = \left(\int_0^\infty \exp(-\alpha^2 t^2) dt \right)^3 \\ &= (1/\alpha)^3 \left(\int_0^\infty \exp(-u^2) du \right)^3 = \pi^{3/2} / 8\alpha^3 = (\pi / (4\alpha^2))^{3/2} \\ &= (\pi / (4h^2 \pi^2 / 2ML^2 kT))^{3/2} = L^3 / (2h^2 \pi / MkT)^{3/2} = V \left(\frac{MkT}{2\pi h^2} \right)^{3/2} = n_Q V, \end{aligned}$$

der vi benytter integralet oppgitt i oppgaveteksten og at $V=L^3$.

b) Partisjonsfunksjonen for en ideel gass med N partikler er $Z_N = \frac{Z_1^N}{N!} = \frac{(n_Q V)^N}{N!}$,

og Helmholtz fri energi er $F = -kT \ln Z_N = -kT \ln \frac{(n_Q V)^N}{N!}$.

c) Det indre kjemiske potensial kan uttrykkes ved Stirlings tilnærmelse ved

$$\begin{aligned} \mu_{\text{int}} &= \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = -kT \left(\ln Z_1 - \frac{d}{dN} \ln N! \right) \\ &\approx -kT \left(\ln Z_1 - \frac{d}{dN} (N \ln N - N) \right) = -kT (\ln Z_1 - \ln N) \\ &= -kT \ln \left(\frac{Z_1/V}{N/V} \right) = kT \ln \left(\frac{n}{n_Q} \right) \end{aligned}$$

d) Betingelsen for diffusiv likevekt er $\mu_{\text{int}}(\uparrow) + \mu_{\text{ext}}(\uparrow) = \mu_{\text{int}}(\downarrow) + \mu_{\text{ext}}(\downarrow)$ eller

$$kT \ln \left(\frac{n_\uparrow}{n_Q} \right) - mB = kT \ln \left(\frac{n_\downarrow}{n_Q} \right) + mB$$

e) Likningen over gir relativ konsentrasjon lik

$$n_\uparrow(B) / n_\downarrow(B) = \exp(2mB/kT) .$$

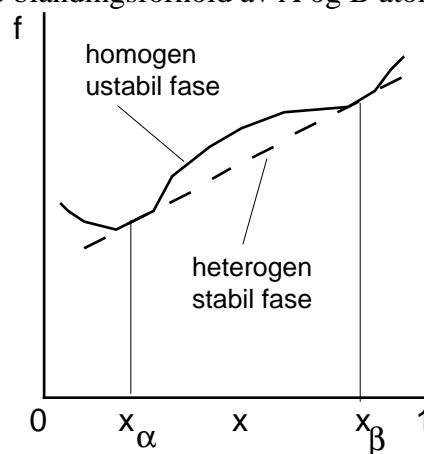
f) Vi tenker oss at partikler med spinn opp og ned kalles henholdsvis 1 og 2, og setter den kjemiske reaksjonen på formen $\nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 = 0$, som gir $\nu_1 = 1, \nu_2 = -1$. Videre er likevektskonstanten gitt ved partikkel 1 og 2's energinivåer: $F_1 = -mB$ og $F_2 = mB$, som gir:

$$\begin{aligned}
K(T) &= n_{Q_1}^{v_1} \exp(-v_1 F_1 / kT) n_{Q_2}^{v_2} \exp(-v_2 F_2 / kT) \\
&= \frac{n_{Q_1}}{n_{Q_2}} \exp(-F_1 / kT) \exp(F_2 / kT) \\
&= \exp(2mB / kT)
\end{aligned}$$

Altså blir $\prod_j n_j^{v_j} = n_1 / n_2 = K(T) = \exp(2mB / kT)$, som er samme svar som i oppgave e).

Oppgave 2

a) Løslighetsgapet er energigapet mellom stiplet og heltrukken kurve. (Det kan forsvinne ved tilstrekkelig høy temperatur.) I den heterogene fase består blandingen av 2 faser α og β , som hver har sitt typiske blandingsforhold av A og B atomer.



b) Det gjøres ikke noe arbeid W på omgivelsene. Det tilføres heller ikke varme Q . Siden E er konstant og $E = E(T)$ for en ideell gass, blir temperaturen T også konstant. Entropien S avhenger av volumet V , og det blir en økning i entropi på $\Delta S = kN \ln 2$.

For reele gasser vil molekylene vekselvirke og energien avhenge som $E = E(T, V)$.

(Sml. van der Waal gass: Temperaturen etter ekspansjonen, T_2 , er da gitt ved at energien skal være konstant $E(T, V) = E(T_2, 2V)$. Om det blir kjøling eller oppvarming avhenger av initialtemperaturen (Joule-Thomson effekten).)

Oppgave 3

a) Fermioner er partikler med halvtallig spinn, f.eks. elektroner, nøytroner og ^3He atomer. Pauliprinsippet for denne type partikler gir at bare én partikkel kan befolke én og samme tilstand karakterisert med ett sett kvantetall.

Bosoner er partikler med heltallig spinn, f.eks. pioner, ^4He atomer, fononer og fotoner. Det kan være flere bosoner i én tilstand. (Ved lave temperaturer kan man f. eks. danne Bose-Einstein kondensat, der (nesten) alle bosoner befolker laveste tilstand.)

b) Fermi-Diracs fordelingsfunksjon gjelder for fermioner. Gibbs sum er gitt ved:

$$\Xi = \sum_{ASN} e^{(N\mu - \epsilon_s)/kT}$$

Et nivå kan enten være befolket eller ikke, og vi har altså 2 muligheter:

$$(N, \epsilon_s) = (0, 0) \text{ og } (1, \epsilon), \text{ som gir } \Xi = 1 + e^{(\mu - \epsilon)/kT}$$

Her er μ det kjemiske potensialet.

c) Midlere antall fermioner i tilstanden blir:

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\Xi} \sum_{ASN} N e^{(N\mu - \epsilon_s)/kT} = \frac{1}{\Xi} [0 + 1e^{(\mu - \epsilon)/kT}] = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1}.$$

d) Vi får:

$$\langle N^2 \rangle = \frac{1}{\Xi} \sum_{ASN} N^2 e^{(N\mu - \epsilon_s)/kT} = \frac{1}{\Xi} [0 + 1^2 e^{(\mu - \epsilon)/kT}] = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1} = \langle N \rangle.$$

e) Standardavviket for midlere antall fermioner i tilstanden blir

$$\sigma_N = \sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2} = \sqrt{\langle N \rangle - \langle N \rangle^2} = \sqrt{\langle N \rangle (1 - \langle N \rangle)}.$$

f) Partikkelfluktuasjonene for fermioner og bosoner er som følger:

$kT \ll \mu - \epsilon$: Dette er langt under det kjemiske potensial. For fermioner blir $\langle N \rangle \approx 1$, og orbitalene er nesten 100% fylt, og har små fluktuasjoner $\sigma_N = \sqrt{\langle N \rangle (1 - \langle N \rangle)} \approx 0$. Ikke mulig for bosoner.

$kT \ll \epsilon - \mu$: For både fermioner og bosoner blir $\langle N \rangle \approx e^{-\frac{\epsilon - \mu}{kT}} \ll 1$, og vi får de samme fluktuasjonene $\sigma_N \approx \sqrt{\langle N \rangle}$.

$\epsilon \approx \mu + \Delta\epsilon$, og $kT \approx 10\Delta\epsilon$: For fermioner blir $\langle N \rangle \approx 1/2$ og $\sigma_N \approx 1/2$. For bosoner blir $\langle N \rangle \gg 1$ med fluktuasjoner $\sigma_N \approx \langle N \rangle$. Man sier derfor ofte at bosoner går i flokk.

g) For fermioner blir den relative fluktuasjonen

$$r = \frac{\sigma_N}{\langle N \rangle} = \sqrt{\frac{1 - \langle N \rangle}{\langle N \rangle}} = \sqrt{\frac{1}{\langle N \rangle} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1}} - 1} = \sqrt{e^{(\epsilon - \mu)/kT}}$$

For bosoner blir den relative fluktuasjonen

$$r = \frac{\sigma_N}{\langle N \rangle} = \sqrt{\frac{1 + \langle N \rangle}{\langle N \rangle}} = \sqrt{\frac{1}{\langle N \rangle} + 1} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} - 1}} + 1} = \sqrt{e^{(\epsilon - \mu)/kT}}$$

De relative fluktuasjoner for fermioner og bosoner er altså like. I det klassiske området er

$\langle N \rangle \ll 1$, og vi får det kjente uttrykket $r = \frac{\sigma_N}{\langle N \rangle} = \sqrt{\frac{1}{\langle N \rangle}}$. Altså har vi meget store

relative fluktuasjoner i det klassiske området.

Oppgave 4

a) Arbeidet som gassen utfører på omgivelsene fra 1 til 2, er

$$W_{12} = \int_1^2 p dV = \int_1^2 \frac{NkT_h}{V} dV = NkT_h \int_1^2 \frac{dV}{V} = NkT_h \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Da $Q_{12} = E_{12} + W_{12}$ og $E_{12} = E_2 - E_1 = E(T_h) - E(T_h) = 0$, blir $Q_{12} = W_{12}$.

Dette bryter ikke med noen fysisk lov; all varme kan gjerne gå over til arbeid. (Men i en syklisk varmemaskin går ikke dette da entropien vil øke hele tiden, og må fjernes i hvert omløp.)

b) Fra 3 til 4 blir det samme utregning som over, men med negativt arbeid:

$$W_{34} = \int_3^4 p dV = NkT_l \int_2^4 \frac{dV}{V} = -NkT_l \ln \frac{V_2}{V_1} \text{ og } Q_{34} = W_{34}.$$

Fra 2 til 3 utføres ikke noe arbeid, $W_{23} = 0$. Andre hovedsetning gir

$$Q_{23} = E_{23} = \frac{3}{2} Nk(T_l - T_h).$$

Tilsvarende, men med motsatt fortegn, blir

$$Q_{41} = -\frac{3}{2} Nk(T_l - T_h) \text{ og } W_{41} = 0.$$

Energien ender opp med samme verdi i punktet 1 etter en syklus, og er dermed en tilstandsvariabel, fordi

$$\Delta E = E_{12} + E_{23} + E_{34} + E_{41} = 0 + \frac{3}{2} Nk(T_l - T_h) + 0 - \frac{3}{2} Nk(T_l - T_h) = 0$$

c) Vi får:

$$\frac{Q_{12}}{Q_{34}} = \frac{W_{12}}{W_{34}} = \frac{NkT_h \ln \frac{V_2}{V_1}}{-NkT_l \ln \frac{V_2}{V_1}} = -\frac{T_h}{T_l}$$

Alternativ I: I praksis forsøker man, ved å bruke to sylindere, å gjøre slik at avgitt varme Q_{23} benyttes til oppvarming Q_{41} , der $Q_{41} = -Q_{23}$. Vi får da Carnot virkningsgraden

$$\eta = \frac{\sum W}{Q_{\text{inn}}} = \frac{W_{12} + W_{34}}{Q_{12}} = \frac{Q_{12} + Q_{34}}{Q_{12}} = 1 + \frac{Q_{34}}{Q_{12}} = 1 - \frac{T_l}{T_h} (= \eta_C).$$

Alternativ II: Vi ser bare på en sylinder, og får lavere virkningsgrad:

$$\eta = \frac{\sum W}{Q_{\text{inn}}} = \frac{W_{12} + W_{34}}{Q_{12} + Q_{41}} = \frac{Q_{12} + Q_{34}}{Q_{12} + Q_{41}} = \frac{(T_h - T_l) \ln \frac{V_2}{V_1}}{\frac{3}{2}(T_h - T_l) + T_h \ln \frac{V_2}{V_1}}$$

d) En tilsvarende kjølemaskin vil ha omvendt syklus (pilene byttes). Arbeidet på omgivelsene av gassen blir negativt, hvilket betyr at man må bruke arbeid på systemet for at maskinen kan kjøle. Kjøleytelsesfaktoren kan uttrykkes ved de "gamle" verdiene, der vi igjen godtar to alternative løsninger:

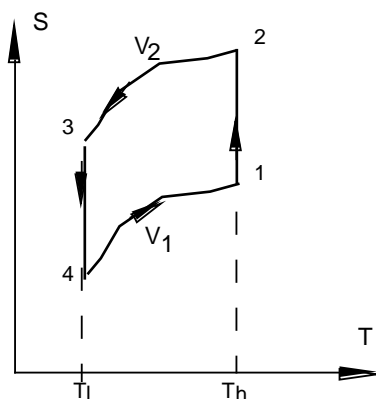
Alternativ I:

$$\gamma = \frac{Q_{\text{inn}}}{W_{\text{p\aa gass}}} = -\frac{Q_{34}}{Q_{12} + Q_{34}} = -\frac{1}{1 - \frac{T_h}{T_l}} = \frac{T_l}{T_h - T_l} (= \gamma_c).$$

Alternativ II:

$$\gamma = \frac{Q_{\text{inn}}}{W_{\text{p\aa gass}}} = \frac{Q_{32} + Q_{43}}{Q_{12} + Q_{34}} = \frac{\frac{3}{2}(T_h - T_l) + T_l \ln \frac{V_2}{V_1}}{(T_h - T_l) \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

e) Når V er konstant, går S som $\ln T$. S - T diagram for varmemaskinen blir derfor:



f) Helmholtz fri energi og den termodynamiske identitet gir, når vi vet at F er en tilstandsvariabel, at

$$\oint dF = 0 = -\oint SdT - \oint pdV = -\oint SdT - W.$$

g) I følge oppgave f) er arbeidet lik arealet mellom lav og høy entropi i S - T diagrammet. Fordi vi har negativt fortegn, må vi integrere motsatt av pilene på figuren :

$$\begin{aligned} W &= -\oint SdT = \int_{T_l}^{T_h} S(T, V_2) dT + 0 + \int_{T_h}^{T_l} S(T, V_1) dT + 0 \\ &= \int_{T_l}^{T_h} (S(T, V_2) - S(T, V_1)) dT \\ &= Nk \int_{T_l}^{T_h} \left(\left(\frac{3}{2} \ln T + \ln V_2 + \dots \right) - \left(\frac{3}{2} \ln T + \ln V_1 + \dots \right) \right) dT \\ &= Nk \int_{T_l}^{T_h} (\ln V_2 - \ln V_1) dT \\ &= Nk(T_h - T_l) \ln \frac{V_2}{V_1}, \end{aligned}$$

som er det samme arbeidet som vi fikk i oppgave a) og b).

Løsninger: Eksamen Fys114, vår 2002

Oppgave 1

- a) Partisjonsfunksjonen og Helmholtz fri energi for en ideell gass med N identiske partikler er h.h.v.

$$Z_N = \frac{(Z_1)^N}{N!} \text{ og } F = -kT \ln Z_N.$$

- b) Trykket er gitt ved

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} \approx \left[kTN \frac{\partial}{\partial V} (\ln V + \ln n_Q - \ln N + 1) \right]_{T,N} = \frac{NkT}{V}$$

som gir oss tilstandslikningen, og hvor vi har brukt Stirlings tilnærming (men trenger ikke det). Vi ser at for ideell gass blir $p = \frac{NkT}{V} = 0$ for $T = 0$.

- c) Gibbs sum er generelt gitt ved

$$\Xi = \sum_{ASN} e^{(N\mu - \epsilon_s)/kT}.$$

Vi har her to muligheter: $(N, \epsilon_s) = (0, 0)$ og $(1, \epsilon)$, som gir

$$\Xi = 1 + e^{(\mu - \epsilon)/kT}, \text{ der}$$

T er temperatur,

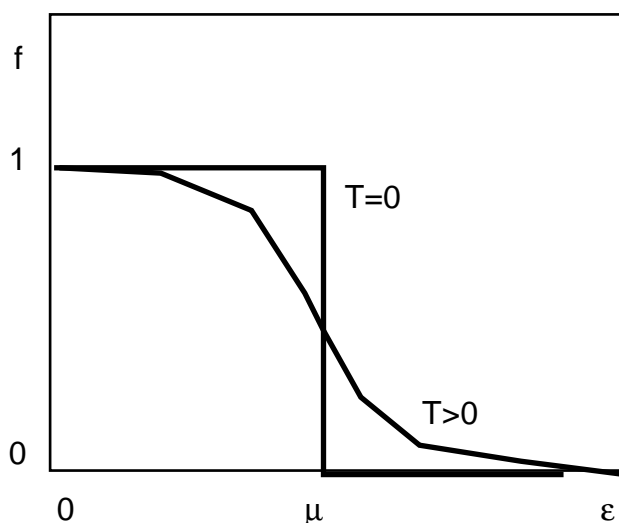
k er Boltzmann's konstant,

ϵ er energien til et enkelt - partikkelnivå og μ er kjemisk potensial.

- d) Fermi Diracs fordelingsfunksjon blir

$$f(\epsilon, \mu, T) = \langle N \rangle = \frac{1}{\Xi} \sum_{ASN} N e^{(N\mu - \epsilon_s)/kT} = \frac{1}{\Xi} [0 + 1e^{(\mu - \epsilon)/kT}] = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1}.$$

Funksjonen f er skissert under.



e) Antall elektroner i gassen er

$$\begin{aligned} N &= \int_0^\infty f(\epsilon) D(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\epsilon_F} 1 \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{1/2} d\epsilon = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \epsilon_F^{3/2}. \end{aligned}$$

f) Gassens midlere energi er

$$\begin{aligned} E &= \langle \epsilon \rangle = \int_0^\infty \epsilon f(\epsilon) D(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon 1 \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon \\ &= \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{3/2} d\epsilon = \frac{V}{5\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \epsilon_F^{5/2}. \end{aligned}$$

Sammenlikner med oppgave e) og ser at $E = \frac{3}{5} N \epsilon_F$.

g) Siden $T = 0$, så blir $F = E - TS = E$. Her er E oppgitt, og vi får

$$F = E = \frac{\hbar^2}{10\pi^2 m} V^{-2/3} (3\pi^2 N)^{5/3}.$$

Videre blir trykket lik

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{N,T} = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{5/3}.$$

h) Her gjelder det å si noe fornuftig, men ikke nødvendigvis det som er oppgitt her: Ideell gass gir $p = 0$, som svarer til vår naive oppfatning om at molekylene stanser opp og ligger i ro når $T = 0$. Men dette gjelder ikke i kvantemekanikken! Og vi ser at fermiongassen har et betydelig trykk selv ved temperatur $T = 0$. Videre ser vi at trykket øker som funksjon av fermiontettheten. Trykket forklares ikke først og fremst av Heisenbergs uskarphetsrelasjon, men av Pauliprinsippet. Hvite dverger og nøytronstjerner slipper den tragiske skjebne med gravitasjonskollaps inn i et sort hull siden fermiontrykket presser utover. Dette er vi alle glade for.

Oppgave 2

- a) En ren halvleder har lik elektron og hull konsentrasjon: $n_e = n_h$. En donor (f.eks. fosfor, P) er en urenhet som kan lett avgi et elektron til krystallen, og donoren blir dermed selv positivt ladet. En akseptor (f.eks. aluminium, Al) tar lett til seg et elektron, og blir dermed selv negativ. Donor nivåene ligger like under ledningsbåndet, og akseptor nivåene ligger like over valensbåndet. Massevirkningsloven for halvledere er $n_e n_h = n_i^2$, der n_e er elektron konsentrasjonen, n_h er hull konsentrasjonen, og n_i er intrinsikk konsentrasjonen.

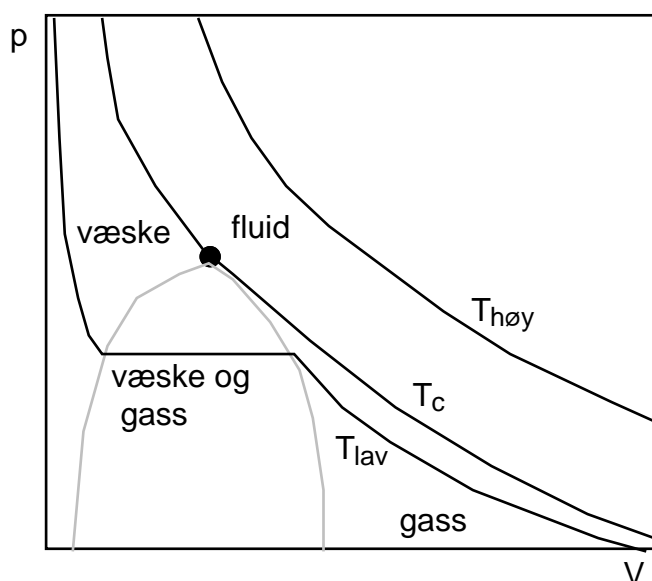
- b) Betingelsen for likevekt er

$$T(\text{gass}) = T(\text{væske})$$

$$p(\text{gass}) = p(\text{væske})$$

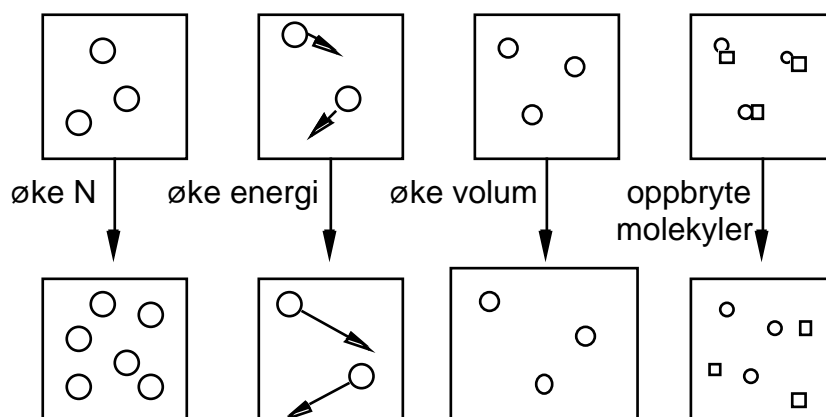
$$\mu(\text{gass}) = \mu(\text{væske}).$$

Under er det vist pV -diagrammet for gass/væske.



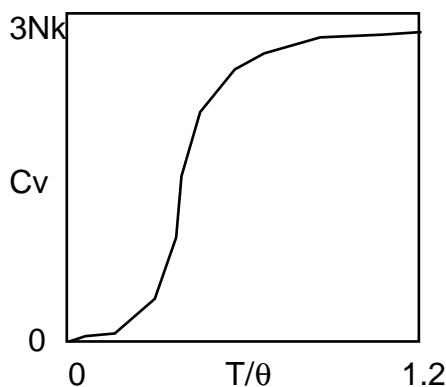
Ved den kritiske temperatur T_c er det ingen overgang lenger mellom væske og gass, og fasen for $T > T_c$ kalles fluid.

c) Noen måter å øke entropien på er:



d) Varmekapasiteten for en ideell monoatomisk gass er gitt ved $C_V = \frac{3}{2}Nk$. Her bidrar alle atomer i gassen til en høy varmekapasitet. Dette er ikke tilfellet for elektroner i metall, som oppfører seg som en fermiongass. Her er det bare elektronene i nærheten av det kjemiske potensial som bidrar, nemlig $N_{aktiv} \approx \frac{T}{T_F} N$, hvor $kT_F = \epsilon_F$. (Vi har her også $\frac{\pi^2}{2}k$ i stedet for $\frac{3}{2}k$, men denne faktor gir ingen reduksjon.)

e) Tegningen under viser Debye varmekapasiteten $C_V(T)$ for en krystall:



For lave T går varmekapasiteten som T^3 . For høye T (større enn Debye-temperaturen θ) går varmekapasiteten asymptotisk mot $3Nk$. Denne grense skyldes den endelige avstand vi har mellom atomene i et krystallgitter. Dette gir at fononene bare kan ha $3N$ antall elastiske moder. (En fotongass har her uendelig mange moder.)

Oppgave 3

- a) Differensiale av $E = E(S, x)$ blir

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_x dS + \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_S dx,$$

som gir ved å dele på dx

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_x \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T + \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_S.$$

- b) Arbeidet som filmen utøver på omgivelsene når stangen beveger seg fra x til $x + dx$ ved konstant temperatur, er gitt ved

$$dW = -Kdx,$$

og dermed blir termodynamikkens annen hovedsetning for systemet lik

$$dQ = dE - Kdx = dE - 2\sigma b dx.$$

- c) Likningen i b) kan skrives som

$$dE = dQ + 2\sigma b dx = TdS + 2\sigma b dx$$

og fra dE i oppgave a) ser vi at

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_x = T \text{ og } \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_S = 2\sigma b.$$

- d) Helmholtz fri energi gir differensiale

$$dF = (dE - TdS) - SdT = (2\sigma b dx) - SdT.$$

Dermed blir

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_x = -S \text{ og } \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_T = 2\sigma b, \text{ som gir likhetene}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_x\right]_T = -\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T = \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_T\right]_x = 2b \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_x.$$

- e) Fra oppgave a), c) og d) får vi

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_x \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T + \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_S = T \left[-2b \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_x \right] + 2\sigma b,$$

som gir $dE = -2bT \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_x dx + 2b\sigma dx$

ved konstant temperatur.

f) Varmekapasiteten ved konstant utstrekning x er gitt ved

$$C_x = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_x = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial T} \right)_x = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_x \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_x = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_x.$$

g) Vi har

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_x}{\partial x} \right)_T &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial S}{\partial T} \right)_x \right]_T = T \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial T} \\ &= T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_T = -T \frac{\partial}{\partial T} \left(2b \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_x = 2Tbd \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial T} \right)_x = 0. \end{aligned}$$

h) Setter $S = S(T, x)$ og får

$$\begin{aligned} dS &= \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_x dT + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_T dx, \text{ som ved en liten multiplikasjon med } T \text{ blir} \\ TdS &= T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_x dT + T \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_T dx \\ &= T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_x dT - T2b \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_x dx \\ &= C_x dT + 2a\sigma_0 T b dx. \end{aligned}$$

i) Setter $dS = 0$ og får

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T} &= -\frac{2a\sigma_0 b}{C_x} dx = -\gamma dx \Rightarrow \ln T = -\gamma x + \text{const.} \\ \Rightarrow T &= T_0 \exp[-\gamma(x - x_0)], \\ \text{hvor } \gamma &= \frac{2a\sigma_0 b}{C_x} \text{ og } T_0 = T(x = x_0). \end{aligned}$$