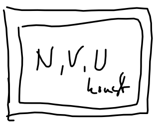


Isolert

Mikrokanonisk (N, V, U)

Multiplisitet Ω

Entropi $\boxed{S = k \ln \Omega}$

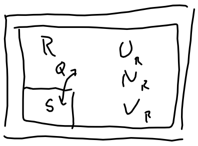
Kanoniske (N, V, T)

R+S

U_s

N_s

V_s



$N = N_R + N_S$: konst

$\boxed{U = U_R + U_s}$

N_s, V_s konst $\qquad U_R$ & U_s kan endres

$\Rightarrow T_s = T_R$ i likevekt

Utveksling av varme med reservoir

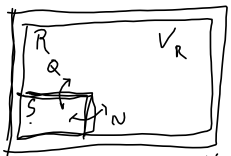
Tilstandssum $Z = \sum_i e^{-\beta \varepsilon_i}$ $\qquad \beta = \frac{1}{kT}$

Sannsynlighet $P(i) = \frac{1}{Z} \cdot e^{-\beta \varepsilon_i}$

Midlere energi $\bar{E} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta}$

Helmholtz fri energi $\boxed{F = -kT \ln Z}$

$e^{-\beta \varepsilon_i}$ = Boltzmann faktor



U

N

$\boxed{V_s}$

T, μ er i likevekt

$T_s = T_R$, $\mu_s = \mu_R$

Store kanoniske ensemble (μ, V, T)

Gibbs summen $Z_G = \sum_s e^{-\beta(E(s) - \mu N(s))}$

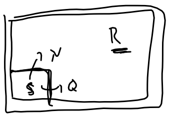
Gibbs faktoren $e^{-\beta(E(s) - \mu N(s))}$

Midlere partikkelantall $\boxed{\bar{N} = \frac{kT}{Z_G} \frac{\partial Z}{\partial \mu}}$

Store potensial $\boxed{\Phi_G = U - TS - \mu N = -kT \ln Z_G}$

Sannsynlighet $P(s) = \frac{1}{Z_G} e^{-\beta[E(s) - \mu N(s)]}$

Store kanoniske



Reservoir + system = lukket

Se på én bestemt mikrotilstand, s_1, i systemet S med energi E_1

Mange tilstander i R forenlig med s_1 i S. $\Omega_S(s_1) = 1$

$$P(s_1) = \frac{\Omega_S(s_1)\,\Omega_R(s_1)}{\sum \Omega_S\,\Omega_R}$$

$S = k \ln \Omega$

$$\frac{P(s_2)}{P(s_1)} = \frac{\Omega_R(s_2)}{\Omega_R(s_1)} = \frac{e^{S_R(s_2)/k}}{e^{S_R(s_1)/k}} = e^{[S_R(s_2) - S_R(s_1)]/k}$$

R >> S => endringen $dS_R = S_R(s_2) - S_R(s_1)$ er infinitesimalt liten

TDI $T\,dS_R = dU_R - P\,dV_R - \mu\,dN_R$ $dV = 0$ konstant volum

$$dS_R = \frac{1}{T}(dU_R - \mu\,dN_R)$$

$$dU_R = -dU_S = -[E(s_2) - E(s_1)]$$

$$-\mu\,dN_R = +\mu\,dN_S = +\mu[N(s_2) - N(s_1)]$$

$$dS_R = S_R(s_2) - S_R(s_1) = \frac{1}{T}\Big(-[E(s_2) - E(s_1)] + \mu[N(s_2) - N(s_1)]\Big)$$

$$\frac{P(s_2)}{P(s_1)} = \frac{e^{-\frac{1}{kT}[E(s_2) - \mu N(s_2)]}}{e^{-\frac{1}{kT}[E(s_1) - \mu N(s_1)]}}$$

Gibb faktoren $e^{-\beta[E(s) - \mu N(s)]}$

$$P(s) = \frac{e^{-\beta[E(s) - \mu N(s)]}}{\sum_s e^{-\beta[E(s) - \mu N(s)]}} = \frac{1}{Z_G} e^{-\beta[E(s) - \mu N(s)]}$$

Termisk & kjemisk (diffusiv) likevekt med reservoir

$$\bar{N} = \sum_s N P(s) = \frac{1}{Z_G} \sum_s N e^{-\beta[E(s) - \mu N(s)]}$$

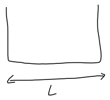
$$\frac{\partial e^{-\beta[E(s) - \mu N(s)]}}{\partial \mu} = \beta N(s) e^{-\beta[E(s) - \mu N(s)]} \cancel{= \beta N P(s)}$$

$$\bar{N} = \frac{1}{Z_G} \sum_s \frac{1}{\beta} \frac{\partial e^{-\beta[E(s) - \mu N(s)]}}{\partial \mu}$$

$$= \frac{kT}{Z_G} \frac{\partial}{\partial \mu} \underbrace{\sum_s e^{-\beta[E(s) - \mu N(s)]}}_{Z_G}$$

$$\boxed{\bar{N} = \frac{kT}{Z_G} \frac{\partial Z_G}{\partial \mu} = kT \frac{\partial \ln Z_G}{\partial \mu}}$$

Partikkel i boks



$V = L \times L \times L$

Tilstandssum for én partikkel

$$Z_1 = \frac{V}{v_Q} = n_Q \qquad v_Q = \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}\right)^3 = l_Q^3$$

Ideell gass $V >> v_Q$, $n_Q >> N$

Midlere avstand mellom partikler $\lambda = \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} >> l_Q$

Luft $\lambda \sim 3\,nm$ $\qquad l_Q \sim 0{,}02\,nm$

Elektroner i metall $\qquad$ 1. valenselektron per atom, avstand mellom atom $\sim 2\,Å$
$\lambda \sim 0{,}2\,nm$
$l_Q \sim 4\,nm \qquad V << v_Q$

Bølgefunksjonene opptar samme område, overlapper $\Rightarrow$ ikke lenger klassisk.

Eksempler:
- elektroner i metaller, halvledere
- nøytronen i nøytronstjerner
- fotoner i en varm ovn, sol
- fononer (kvantiserte vibrasjonsmoder) i faste stoffer
- Kosmisk bakgrunnsstråling

To typer kvantesystem

Hovedforskjell: hvor mange partikler kan det være i én enpartikkeltilstand.

Bosoner: Partikler med heltallige spinn: fotoner, fononer, pioner, ^4He

Hver enpartikkeltilstand kan ha 0 – mange partikler $[0, n]$

Fermioner: Partikler med spinn $\frac{1}{2}$: elektroner, protoner, nøytroner, neutrinoer, ^3He

Hver tilstand kan ha kun 0 eller 1 partikkel.

Studere mulige énpartikkeltilstander med energi ε. Energien for n part i den tilst $n \cdot \varepsilon$

Sannsynligheten for at n partikler er i tilstanden med energien ε $(\varepsilon_{(i)})$

$$P(n) = \frac{1}{Z_G} e^{-\beta(n\varepsilon - \mu n)} = \frac{1}{Z_G} e^{-\beta n(\varepsilon - \mu)} = \frac{1}{Z_G} e^{-\beta n x}$$

$x = \varepsilon - \mu$

Fermioner $\qquad n \in \{0, 1\}$

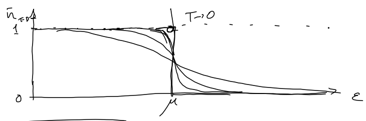
$$Z_G = 1 + e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}$$

$$P(n) = \frac{e^{-\beta n(\varepsilon-\mu)}}{1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}$$

$$\bar{n} = \sum n P(n) = 0 P(0) + 1 P(1)$$

Fermi-Dirac fordelingen

$$\bar{n}_{FD} = \frac{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}{1 + e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}} = \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon-\mu)}} = \frac{1}{1 + e^{(\varepsilon-\mu)/kT}}$$



Bosoner $\qquad n = 0, 1, \dots \infty$

$$Z_G = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\beta x}\right)^n \qquad \text{Geometrisk rekke}$$

$x = \beta(\varepsilon - \mu)$

$$= \frac{1}{1 - e^{-\beta x}} = \frac{1}{1 - e^{-(\varepsilon-\mu)\beta}}$$

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n P(n) = \frac{kT}{Z_G} \frac{\partial Z_G}{\partial \mu}$$

$$= \frac{kT}{Z} \frac{\partial Z_G}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} \qquad \frac{\partial x}{\partial \mu} = -\beta$$

$$= -\frac{1}{Z_G} \frac{\partial Z_G}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(1 - e^{-x})^{-1} = -(1 - e^{-x})^{-2}(-e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}$$

$$\bar{n} = (1 - e^{-x}) \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = \frac{1}{e^x - 1}$$

Bose-Einstein-fordeling

$$\boxed{\bar{n}_{BE} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}}$$