Løsningsforslag
Midtermineksamen FYS3110
Høst 2020

16. oktober 2020

Oppgave 1 En super symmetri

Vi definerer to operatorer

$$\hat{A} \equiv i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} + W(\hat{x}), \quad \text{og} \quad \hat{A}^\dagger = -i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} + W(\hat{x}), \tag{1}$$

hvor W er en differensierbar funksjon av en variabel.

a) Vis at Hamiltonoperatorene

$$\hat{H}_- \equiv \hat{A}^\dagger \hat{A} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_-(x), \quad \text{og} \quad \hat{H}_+ \equiv \hat{A}\hat{A}^\dagger = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_+(x), \tag{2}$$

hvor m tolkes som massen til en partikkel, er hermitiske, og finn V_- og V_+ uttrykt ved W i posisjonsbasisen. [3 poeng]

Svar: $\hat{H}_-$ og $\hat{H}_+$ er hermitiske fordi

$$\hat{H}_-^\dagger = (\hat{A}^\dagger \hat{A})^\dagger = \hat{A}^\dagger (\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}^\dagger \hat{A} = \hat{H}_-, \tag{3}$$

$$\hat{H}_+^\dagger = (\hat{A}\hat{A}^\dagger)^\dagger = (\hat{A}^\dagger)^\dagger \hat{A}^\dagger = \hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{H}_+. \tag{4}$$

Videre kan uttrykkene skrives

$$\begin{aligned}
\hat{A}^\dagger \hat{A} &= \left(-i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} + W\right)\left(i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} + W\right) \\
&= \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{i}{\sqrt{2m}}[\hat{p}, W] + W^2, \qquad (5) \\
\hat{A}\hat{A}^\dagger &= \left(i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} + W(x)\right)\left(-i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} + W(x)\right) \\
&= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{i}{\sqrt{2m}}[\hat{p}, W] + W^2(x). \qquad (6)
\end{aligned}$$

Her må vi være forsikte når vi regner ut kommutatoren. Vi bruker en testfunksjon $f(x)$, og at i posisjonsbasisen er $\hat{x} = x$ og $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$:

$$\begin{aligned}
[\hat{p}, W]f(x) &= \hat{p}W(x)f(x) - W(x)\hat{p}f(x) \\
&= -i\hbar\frac{d}{dx}W(x)f(x) + i\hbar W(x)\frac{d}{dx}f(x) \\
&= -i\hbar\frac{dW(x)}{dx}f(x) - i\hbar W(x)\frac{d}{dx}f(x) + i\hbar W(x)\frac{d}{dx}f(x) \\
&= -i\hbar\frac{dW(x)}{dx}f(x), \qquad (7)
\end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned}
V_-(x) &= W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{dW(x)}{dx}, \qquad (8) \\
V_+(x) &= W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{dW(x)}{dx}. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Funksjonen $W(x)$ kalles **superpotensialet**.

b) Vis at dersom $|n^-\rangle$ er en normert egentilstand til $\hat{H}_-$ med egenverdi E_n så er $\hat{A}|n^-\rangle$ en egentilstand til $\hat{H}_+$ med samme egenverdi, og vis at dersom $|m^+\rangle$ er en normert egentilstand til $\hat{H}_+$ med egenverdi E_m, så er $\hat{A}^\dagger|m^+\rangle$ en egentilstand til $\hat{H}_-$ med samme egenverdi. Finn den korrekte normeringen for begge de nye tilstandene. [3 poeng]

Svar: Vi har at $\hat{H}_-|n^-\rangle = E_n|n^-\rangle$, da er

$$\hat{H}_+\hat{A}|n^-\rangle = \hat{A}\hat{A}^\dagger\hat{A}|n^-\rangle = \hat{A}\hat{H}_-|n^-\rangle = \hat{A}E_n|n^-\rangle = E_n\hat{A}|n^-\rangle, \quad (10)$$

og med $\hat{H}_+|m^+\rangle = E_m|m^+\rangle$, så er

$$\hat{H}_-\hat{A}^\dagger|m^+\rangle = \hat{A}^\dagger\hat{A}\hat{A}^\dagger|m^+\rangle = \hat{A}^\dagger\hat{H}_+|m^+\rangle = \hat{A}^\dagger E_m|m^+\rangle = E_m\hat{A}^\dagger|m^+\rangle. \quad (11)$$

Normen til $\hat{A}|n^-\rangle$ er $\langle n^-|\hat{A}^\dagger\hat{A}|n^-\rangle = \langle n^-|\hat{H}_-|n^-\rangle = E_n\langle n^-|n^-\rangle = E_n$, slik at den korrekt normerte tilstanden er

$$\frac{1}{\sqrt{E_n}}\hat{A}|n^-\rangle. \quad (12)$$

Normen til $\hat{A}^\dagger|m^+\rangle$ er $\langle m^+|\hat{A}\hat{A}^\dagger|m^+\rangle = \langle m^+|\hat{H}_+|m^+\rangle = E_m\langle m^+|m^+\rangle = E_m$, slik at den korrekt normerte tilstanden er

$$\frac{1}{\sqrt{E_m}}\hat{A}|m^+\rangle. \quad (13)$$

c) Vis at egenverdiene til $\hat{H}_-$ og $\hat{H}_+$ aldri er negative. [2 poeng]

Svar: La $|n^-\rangle$ være en (normert) egentilstand til $\hat{H}_-$ med egenverdi E_n. Vi har at $\langle n^-|\hat{H}_-|n^-\rangle = \langle n^-|\hat{A}^\dagger\hat{A}|n^-\rangle \geq 0$ fordi dette er normen til en tilstand $\hat{A}|n^-\rangle$. Samtidig må $\langle n^-|\hat{H}_-|n^-\rangle = E_n\langle n^-|n^-\rangle = E_n$ slik at $E_n \geq 0$. På samme måte må $\langle m^+|\hat{H}_+|m^+\rangle = \langle m^+|\hat{A}\hat{A}^\dagger|m^+\rangle \geq 0$ fordi det er normen til $A^\dagger|m^+\rangle$, og dermed er $E_m \geq 0$.

d) Gitt at det finnes en vakuumtilstand $|0\rangle$ for $\hat{H}_-$ med den lavest mulige egenverdien $E_0 = 0$, vis at $\hat{A}|0\rangle$ er nullvektoren. Kommenter svaret i lys av oppgave **b)**. [2 poeng]

Svar: Vi må ha $\langle 0|\hat{H}_-|0\rangle = \langle 0|E_0|0\rangle = E_0\langle 0|0\rangle = E_0 = 0$, men da er også $\langle 0|\hat{H}_-|0\rangle = \langle 0|\hat{A}^\dagger\hat{A}|0\rangle = 0$, som, gitt egenskapene til indreproduktrom, betyr at $\hat{A}|0\rangle = 0$ er nullvektoren. Dette betyr at i korrespondansen mellom tilstandene som vi fant i **b)**, så er denne ene egentilstanden $\hat{A}|0\rangle$ til $\hat{H}_+$ ikke en fysisk (normerbar) tilstand. Dette er symmetrisk, vi får samme konklusjon for $\hat{H}_-$ dersom $\hat{H}_+$ har en egentilstand med $E_0 = 0$.

e) Bruk resultatet i oppgave **d)** til å finne bølgefunksjonen for en egentilstand $|0\rangle$ til $\hat{H}_-$ med energi $E_0 = 0$, uttrykt ved hjelp av $W(x)$. Hva slags krav må vi stille til $W(x)$ for at denne bølgefunksjonen skal være normerbar? [3 poeng]

Svar: For vakuumtilstanden $|0\rangle$ er

$$\hat{A}|0\rangle = \left(i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} + W(\hat{x}) \right) |0\rangle = 0. \tag{14}$$

Dette betyr at i posisjonsbasisen er bølgefunksjonen gitt ved

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\partial}{\partial x} + W(x) \right) \psi_0(x) &= 0 \\
\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d\psi_0(x)}{dx} + W(x)\psi_0(x) &= 0 \\
\frac{d\psi_0(x)}{\psi_0(x)} &= -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} W(x)dx \\
\ln \psi_0(x) &= -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int W(x)dx \\
\psi_0(x) &= \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int W(x)dx \right).
\end{aligned} \tag{15}$$

For at bølgefunksjonen skal være normerbar må $\psi_0 \to 0$ når $x \to \pm\infty$, da må integralet av $W(x)$ divergere mot $+\infty$ når $x \to \pm\infty$.

f) Kan vakuumtilstandene til $\hat{H}_-$ og $\hat{H}_+$ begge ha null energi? Begrunn svaret. [1 poeng]

Svar: Nei. Det følger på samme måte som i **d)** at dersom $|0\rangle$ er vakuumtilstanden til $\hat{H}_+$ med energi $E_0 = 0$, så er $\hat{A}^\dagger|0\rangle$ nullvektoren. Det gjør at vi kan finne den tilhørende bølgefunksjonen på samme måte som over, som nå, på grunn av fortegnsforskjellen mellom $\hat{A}^\dagger$ og $\hat{A}$, er gitt ved

$$\psi_0(x) = \exp\left(\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int W(x)dx \right). \tag{16}$$

Denne bølgefunksjonen er bare normerbar dersom $W(x)$ divergerer mot $-\infty$ når $x \to \pm\infty$, så vi kan ikke ha to slike vakuumtilstander samtidig.

g) Gitt potensialet

$$V(x) = V_0 \left(\frac{2}{\sin^2 \frac{\pi x}{a}} - 1 \right), \tag{17}$$

definert på intervallet $(0, a)$,[1] vis at Hamiltonoperatoren til systemet kan skrives på samme form som en av Hamiltonoperatorene i (2). Finn den tilhørende funksjonen $W(x)$ og bunnpunktet V_0. *Hint:*

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\tan x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{18}$$

[2 poeng]

Svar: Vi prøver med

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{\pi}{a\tan\frac{\pi x}{a}}, \tag{19}$$

som gir

$$\begin{aligned} V(x) &= V_+(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{dW(x)}{dx} \\ &= \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\frac{1}{\tan^2\frac{\pi x}{a}} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2\sin^2\frac{\pi x}{a}} \\ &= \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(\frac{\cos^2\frac{\pi x}{a}}{\sin^2\frac{\pi x}{a}} + \frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{a}}\right) \\ &= \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(\frac{2}{\sin^2\frac{\pi x}{a}} - 1\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Vi kan nå identifisere bunnpunktet i potensialet med $V_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$, og Hamiltonoperatoren kan skrives som $\hat{H}_+$.

h) Finn alle egenverdiene til Hamiltonoperatoren til systemet i **g)**, samt eksplisitte uttrykk for de tilhørende normerte bølgefunksjonene. Du kan anta at alle løsningene i kap. 2 i Griffiths er kjent. [3 poeng]

Svar: Det korresponderende potensialet til $V(x) = V_+(x)$ er

$$\begin{aligned} V_-(x) &= W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{dW(x)}{dx} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(\frac{\cos^2\frac{\pi x}{a}}{\sin^2\frac{\pi x}{a}} - \frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{a}}\right) \\ &= -V_0. \end{aligned} \tag{21}$$

Dette er potensialet for en uendelig brønn i intervallet $(0, a)$ med nullnivå $-V_0$, og vi kjenner både egenverdiene til Hamiltonoperatoren $\hat{H}_-$ og egentilstandene (bølgefunksjonene) som

$$E_n^- = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} - V_0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

[1] Og uendelig utenfor.

og

$$\psi_n^-(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x. \tag{23}$$

Siden $E_1^- = 0$ så gir ikke $n = 1$ noen fysiske tilstander for V_+ (se oppgave **d)**), men for $n \geq 2$ får vi energiene

$$E_n^+ = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} - V_0 = \frac{(n^2-1)\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{24}$$

og de normerte bølgefunksjonene er

$$\begin{aligned}
\psi_n^+(x) &= \frac{1}{\sqrt{E_n^-}} \hat{A}\psi_n^-(x) \\
&= \frac{\sqrt{2m}a}{\sqrt{n^2-1}\pi\hbar} \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x \\
&= \frac{\sqrt{2m}a}{\sqrt{n^2-1}\pi\hbar} \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{a \tan \frac{\pi x}{a}} \right) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x \\
&= \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{n^2-1}\pi} \left(\frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi}{a} x - \frac{\pi}{a} \frac{\sin \frac{n\pi}{a} x}{\tan \frac{\pi}{a} x} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \sqrt{\frac{2}{a}} \left(n \cos \frac{n\pi}{a} x - \frac{\sin \frac{n\pi}{a} x}{\tan \frac{\pi}{a} x} \right).
\end{aligned} \tag{25}$$

Vi kan samle de to Hamiltonoperatorene i

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \hat{H}_- & 0 \\ 0 & \hat{H}_+ \end{bmatrix}, \tag{26}$$

for å studere begge systemene samtidig, hvor de tidligere tilstandene nå er komponenter i en to-komponents vektor som den nye Hamiltonoperatoren $\hat{H}$ virker på. Vi definerer samtidig to nye operatorer

$$\hat{Q} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \hat{Q}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & \hat{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

i) Vi kaller

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}, \tag{28}$$

for **antikommutatoren** til operatorene $\hat{A}$ og $\hat{B}$. Vis at Hamiltonoperatoren kan skrives som

$$\{\hat{Q}^\dagger, \hat{Q}\} = \hat{H}. \tag{29}$$

[2 poeng]

Svar:

$$\begin{aligned}\{\hat{Q}^\dagger, \hat{Q}\} &= \hat{Q}^\dagger\hat{Q} + \hat{Q}\hat{Q}^\dagger \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \hat{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \hat{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{A}^\dagger\hat{A} & 0 \\ 0 & \hat{A}\hat{A}^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_- & 0 \\ 0 & \hat{H}_+ \end{bmatrix} = \hat{H}. \end{aligned} \tag{30}$$

j) Vis at $\hat{Q}$ og $\hat{Q}^\dagger$ kommuterer med Hamiltonoperatoren $\hat{H}$,

$$[\hat{Q}, \hat{H}] = 0. \tag{31}$$

[2 poeng]

Svar:

$$\begin{aligned}[\hat{Q}, \hat{H}] &= [\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\hat{Q} + \hat{Q}\hat{Q}^\dagger] = [\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\hat{Q}] + [\hat{Q}, \hat{Q}\hat{Q}^\dagger] \\ &= \hat{Q}\hat{Q}^\dagger\hat{Q} - \hat{Q}^\dagger\hat{Q}\hat{Q} + \hat{Q}\hat{Q}\hat{Q}^\dagger - \hat{Q}\hat{Q}^\dagger\hat{Q} \\ &= -\hat{Q}^\dagger\hat{Q}\hat{Q} + \hat{Q}\hat{Q}\hat{Q}^\dagger = 0, \end{aligned} \tag{32}$$

hvor vi har brukt at

$$\hat{Q}^2 = \hat{Q}\hat{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{33}$$

$[\hat{Q}^\dagger, \hat{H}] = 0$ følger på samme måte, eller, litt raskere,

$$0 = 0^\dagger = ([\hat{Q}, \hat{H}])^\dagger = \hat{H}^\dagger\hat{Q}^\dagger - \hat{Q}^\dagger\hat{H}^\dagger = \hat{H}\hat{Q}^\dagger - \hat{Q}^\dagger\hat{H} = -[\hat{Q}^\dagger, \hat{H}]. \tag{34}$$

k) Gitt at $|n\rangle$ er en egentilstand til $\hat{H}$, vis at $\hat{Q}|n\rangle$ og $\hat{Q}^\dagger|n\rangle$ er egentilstander med samme energi. Implikasjonen av dette er at $\hat{Q}$ representerer en (super) symmetri for systemet beskrevet av $\hat{H}$; energien er bevart under bruk av $\hat{Q}$. [1 poeng]

Svar: Vi har at $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$. På grunn av kommutatorene mellom $\hat{Q}$, $\hat{Q}^\dagger$ og $\hat{H}$ er

$$\hat{H}\hat{Q}|n\rangle = \hat{Q}\hat{H}|n\rangle = \hat{Q}E_n|n\rangle = E_n\hat{Q}|n\rangle, \tag{35}$$

og

$$\hat{H}\hat{Q}^\dagger|n\rangle = \hat{Q}^\dagger\hat{H}|n\rangle = \hat{Q}^\dagger E_n|n\rangle = E_n\hat{Q}^\dagger|n\rangle. \tag{36}$$