Midtermineksamen FYS3110
Høst 2020

17. september 2020

Viktig informasjon:

- Besvarelsen skal leveres elektronisk som pdf-fil i Inspera, enten generert fra LaTeX eller scannet, senest fredag 9. oktober klokken 14.00.
- Fristen er absolutt, men du kan levere eksamen flere ganger. Bare den siste innsendingen vil bli vurdert.
- Denne midtermineksamen teller omlag 25% av den totale karakteren i FYS3110.
- Du står fritt til å bruke alle hjelpemidler, og du har anledning til å samarbeide med dine medstudenter for å løse oppgavene. Imidlertid må besvarelsen være din egen, og de vanlige reglene for plagiat gjelder for innholdet.
- Høyeste mulige poengsum for denne eksamen er 25 poeng. Opp til ett poeng vil bli gitt for klare, konsise og velformulerte svar, inkludert passende figurer og/eller diagrammer.
- En liten advarsel: det er ikke gitt at oppgavene denne gangen går fra middels vanskelig til mer utfordrende, vanskelighetsgraden er litt frem og tilbake, og de fleste av oppgavene kan gjøres uten å ha fått til alle foregående.
- Lykke til!

Oppgave 1 En super symmetri

Vi definerer to operatorer

$$\hat{A} \equiv i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} + W(\hat{x}), \quad \text{og} \quad \hat{A}^\dagger = -i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} + W(\hat{x}), \tag{1}$$

hvor W er en differensierbar funksjon av en variabel.

a) Vis at Hamiltonoperatorene

$$\hat{H}_- \equiv \hat{A}^\dagger \hat{A} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_-(x), \quad \text{og} \quad \hat{H}_+ \equiv \hat{A}\hat{A}^\dagger = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_+(x), \tag{2}$$

hvor m tolkes som massen til en partikkel, er hermitiske, og finn V_- og V_+ uttrykt ved W i posisjonsbasisen. [3 poeng]

b) Vis at dersom $|n^-\rangle$ er en normert egentilstand til $\hat{H}_-$ med egenverdi E_n så er $\hat{A}|n^-\rangle$ en egentilstand til $\hat{H}_+$ med samme egenverdi, og vis at dersom $|m^+\rangle$ er en normert egentilstand til $\hat{H}_+$ med egenverdi E_m, så er $\hat{A}^\dagger|m^+\rangle$ en egentilstand til $\hat{H}_-$ med samme egenverdi. Finn den korrekte normeringen for begge de nye tilstandene. [3 poeng]

c) Vis at egenverdiene til $\hat{H}_-$ og $\hat{H}_+$ aldri er negative. [2 poeng]

d) Gitt at det finnes en vakuumtilstand $|0\rangle$ for $\hat{H}_-$ med den lavest mulige egenverdien $E_0 = 0$, vis at $\hat{A}|0\rangle$ er nullvektoren. Kommenter svaret i lys av oppgave **b)**. [2 poeng]

e) Bruk resultatet i oppgave **d)** til å finne bølgefunksjonen for en egentilstand $|0\rangle$ til $\hat{H}_-$ med energi $E_0 = 0$, uttrykt ved hjelp av $W(x)$. Hva slags krav må vi stille til $W(x)$ for at denne bølgefunksjonen skal være normerbar? [3 poeng]

f) Kan vakuumtilstandene til $\hat{H}_-$ og $\hat{H}_+$ begge ha null energi? Begrunn svaret. [1 poeng]

g) Gitt potensialet

$$V(x) = V_0\left(\frac{2}{\sin^2\frac{\pi x}{a}} - 1\right), \tag{3}$$

definert på intervallet $(0, a)$,[1] vis at Hamiltonoperatoren til systemet kan skrives på samme form som en av Hamiltonoperatorene i (2). Finn den tilhørende funksjonen $W(x)$ og bunnpunktet V_0. *Hint:*

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\tan x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{4}$$

[2 poeng]

[1] Og uendelig utenfor.

h) Finn alle egenverdiene til Hamiltonoperatoren til systemet i **g)**, samt eksplisitte uttrykk for de tilhørende normerte bølgefunksjonene. Du kan anta at alle løsningene i kap. 2 i Griffiths er kjent. [3 poeng]

Vi kan samle de to Hamiltonoperatorene i

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \hat{H}_- & 0 \\ 0 & \hat{H}_+ \end{bmatrix}, \tag{5}$$

for å studere begge systemene samtidig, hvor de tidligere tilstandene nå er komponenter i en to-komponents vektor som den nye Hamiltonoperatoren $\hat{H}$ virker på. Vi definerer samtidig to nye operatorer

$$\hat{Q} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \hat{Q}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & \hat{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

i) Vi kaller

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}, \tag{7}$$

for **antikommutatoren** til operatorene $\hat{A}$ og $\hat{B}$. Vis at Hamiltonoperatoren kan skrives som

$$\{\hat{Q}^\dagger, \hat{Q}\} = \hat{H}. \tag{8}$$

[2 poeng]

j) Vis at $\hat{Q}$ og $\hat{Q}^\dagger$ kommuterer med Hamiltonoperatoren $\hat{H}$,

$$[\hat{Q}, \hat{H}] = 0. \tag{9}$$

[2 poeng]

k) Gitt at $|n\rangle$ er en egentilstand til $\hat{H}$, vis at $\hat{Q}|n\rangle$ og $\hat{Q}^\dagger|n\rangle$ er egentilstander med samme energi. Implikasjonen av dette er at $\hat{Q}$ representerer en (super) symmetri for systemet beskrevet av $\hat{H}$; energien er bevart under bruk av $\hat{Q}$. [1 poeng]