Midtermineksamen FYS3110
Haust 2020

17. september 2020

Viktig informasjon:

- Besvarelsen skal leverast elektronisk som pdf-fil i Inspera, anten generert frå LaTeX eller scannet, seinast fredag 9. oktober klokka 14.00.
- Fristen er absolutt, men du kan levera eksamen fleire gonger. Berre den siste innsendinga vil bli vurdert.
- Denne midtermineksamen tel omlag 25% av den totale karakteren i FYS3110.
- Du står fritt til å bruka alle hjelpemiddel, og du har høve til å samarbeida med medstudentane dine for å løysa oppgåvene. Likevel må besvarelsen vera din eigen, og dei vanlege reglane for plagiat gjeld for innhaldet.
- Høgaste moglege poengsum for denne eksamenen er 25 poeng. Opp til eitt poeng vil bli gitt for klare, konsise og velformulerte svar, inkludert passande figurar og/eller diagram.
- Ei lita åtvaring: det er ikkje gitt at oppgåvene denne gongen går frå middels vanskeleg til meir utfordrande, vanskegrada er litt fram og tilbake, og dei fleste av oppgåvene kan gjerast utan å ha fått til alle tidlegare.
- Lykke til!

Oppgave 1 Ein super symmetri

Vi definerar to operatorar

$$\hat{A} \equiv i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} + W(\hat{x}), \quad \text{og} \quad \hat{A}^\dagger = -i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} + W(\hat{x}), \tag{1}$$

der W er ein differensierbar funksjon av ein variabel.

a) Vis at Hamiltonoperatorane

$$\hat{H}_- \equiv \hat{A}^\dagger\hat{A} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_-(x), \quad \text{og} \quad \hat{H}_+ \equiv \hat{A}\hat{A}^\dagger = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_+(x), \tag{2}$$

der m blir tolka som massen til ein partikkel, er hermitiske, og finn V_- og V_+ uttrykt ved W i posisjonsbasisen. [3 poeng]

b) Vis at dersom $|n^-\rangle$ er ein normert eigentilstand til $\hat{H}_-$ med eigenverdi E_n så er $\hat{A}|n^-\rangle$ ein eigentilstand til $\hat{H}_+$ med same eigenverdi, og vis at dersom $|m^+\rangle$ er ein normert eigentilstand til $\hat{H}_+$ med eigenverdi E_m, så er $\hat{A}^\dagger|m^+\rangle$ ein eigentilstand til $\hat{H}_-$ med same eigenverdi. Finn den korrekte normeringa for båe dei nye tilstandane. [3 poeng]

c) Vis at eigenverdiane til $\hat{H}_-$ og $\hat{H}_+$ aldri er negative. [2 poeng]

d) Gitt at det finst ein vakuumtilstand $|0\rangle$ for $\hat{H}_-$ med den lågast moglege eigenverdien $E_0 = 0$, vis at $\hat{A}|0\rangle$ er nullvektoren. Kommenter svaret i ljos av oppgåve **b)**. [2 poeng]

e) Bruk resultatet i oppgåve **d)** til å finna bølgjefunksjonen for ein eigentilstand $|0\rangle$ til $\hat{H}_-$ med energi $E_0 = 0$, uttrykt ved hjelp av $W(x)$. Kva slags krav må vi stilla til $W(x)$ for at denne bølgjefunksjonen skal vera normerbar? [3 poeng]

f) Kan vakuumtilstandane til $\hat{H}_-$ og $\hat{H}_+$ båe ha null energi? Grunngi svaret. [1 poeng]

g) Gitt potensialet

$$V(x) = V_0\left(\frac{2}{\sin^2\frac{\pi x}{a}} - 1\right), \tag{3}$$

definert på intervallet $(0, a)$,[1] vis at Hamiltonoperatoren til systemet kan skrivast på same form som ein av Hamiltonoperatorane i (2). Finn den tilhøyrande funksjonen $W(x)$ og botnpunktet V_0. *Hint:*

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\tan x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{4}$$

[2 poeng]

[1] Og uendeleg utanfor.

h) Finn alle eigenverdiane til Hamiltonoperatoren til systemet i **g)**, og dessutan eksplisitte uttrykk for dei tilhøyrande normerte bølgjefunksjonane. Du kan anta at alle løysingane i kap. 2 i Griffiths er kjende. [3 poeng]

Vi kan samla dei to Hamiltonoperatorane i

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \hat{H}_- & 0 \\ 0 & \hat{H}_+ \end{bmatrix}, \tag{5}$$

for å studera begge systema samtidig, der dei tidlegare tilstandane no er komponentar i ein to-komponents vektor som den nye Hamiltonoperatoren $\hat{H}$ verkar på. Vi definerar samstundes to nye operatorar

$$\hat{Q} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{A} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \hat{Q}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & \hat{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

i) Vi kallar

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}, \tag{7}$$

for **antikommutatoren** til operatorane $\hat{A}$ og $\hat{B}$. Vis at Hamiltonoperatoren kan skrivast som

$$\{\hat{Q}^\dagger, \hat{Q}\} = \hat{H}. \tag{8}$$

[2 poeng]

j) Vis at $\hat{Q}$ og $\hat{Q}^\dagger$ kommuterar med Hamiltonoperatoren $\hat{H}$,

$$[\hat{Q}, \hat{H}] = 0. \tag{9}$$

[2 poeng]

k) Gitt at $|n\rangle$ er ein eigentilstand til $\hat{H}$, vis at $\hat{Q}|n\rangle$ og $\hat{Q}^\dagger|n\rangle$ er eigentilstandar med same energi. Implikasjonen av dette er at $\hat{Q}$ representerer ein (super) symmetri for systemet beskrive av $\hat{H}$; energien er bevart under bruk av $\hat{Q}$ [1 poeng]