FYS 3120/4120: Klassisk mekanikk og elektromagnetisme

Midtterminevaluering våren 2004

Obligatorisk sett innleveringsoppgaver

Godkjent besvarelse
er nødvendig for å kunne avlegge eksamen. Besvarelsen teller med ved fastsettelse av eksamenskarakter.

Utlevering av oppgaver
foregår fredag 19. mars, oppgavene legges også ut på kursets web-side.

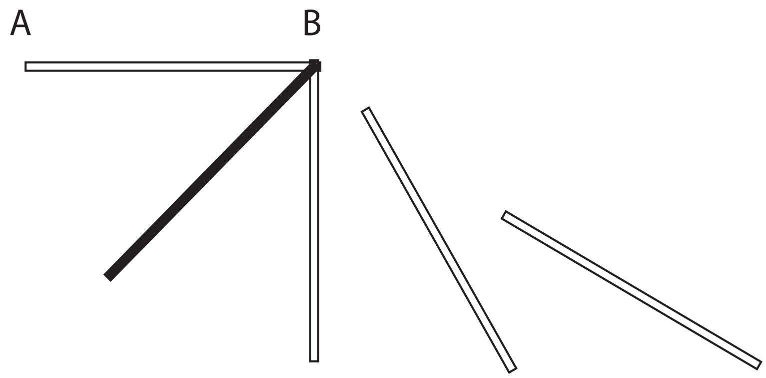
Frist for innlevering
er satt til fredag 26. mars.

Innlevering av besvarelser
Besvarelser kan leveres enten i skriftlig form eller som vedlegg i e-post.
Skriftlig innlevering kan gjøres på ekspedisjonskontoret eller til foreleser.
Lever en ekstra kopi som retter kan beholde til vurdering ved eksamen.
Innlevering pr. e-post: Lever besvarelsen som én fil, fortrinnsvis i pdf-format.
Sendes til **j.m.leinaas@fys.uio.no** med cc til **matsho@fys.uio.no**.

Spørsmål om oppgavene
kan rettes til Mats Horsdal, rom Ø466 eller Jon Magne Leinaas rom Ø471 (bortreist fredag 19 og mandag 22).

Husk
å skrive tilstrekkelig (men ikke unødvendig mye) med tekst til å gjøre forstått hva som foregår i besvarelsen.

Oppgavesettet
består av 3 oppgaver på de 4 neste sidene.



OPPGAVE 1
Stav i tyngdefelt.

En stiv jevntykk stav med lengde L og masse m beveger seg i tyngdefeltet. Bevegelsen foregår hele tiden i et vertikalt plan (x, y-planet). I utgangpunktet holdes staven fast i de to endepunktene (A og B) slik at den ligger horisontalt. Staven slippes så i det ene endepunktet (A) slik at den under den første del av bevegelsen roterer fritt om det andre endepunktet (B). Ved det tidspunkt ($t = 0$) som A befinner seg rett under B slippes staven helt og under den andre del av bevegelsen faller den fritt i tyngdefeltet.

a) Bestem vinkelhastigheten til staven og hastigheten til massesenteret ved tidspunktet $t = 0$.

b) Innfør (generaliserte) koordinater for å beskrive bevegelsen til staven under det frie fallet ($t > 0$) og sett opp den tilhørende Lagrangefunksjon.

c) Sett opp Lagranges ligninger og finn løsningene med de gitt initialbetingelser.

d) Formuler fallproblemet ($t > 0$) ved hjelp av Hamiltons formalisme. (Finn Hamiltonfunksjonen uttrykt ved generaliserte koordinater og impulser og sett opp Hamiltons ligninger.)

OPPGAVE 2
Betatron.

I denne oppgaven skal vi studere akselerasjon av en partikkel ved bruk av *elektromagnetisk induksjon*. Dette er et prinsipp som benyttes i partikkelakseleratorer kalt *betatroner*. Vi studerer en partikkel med masse m og ladning q som beveger seg i et horisontalplan (x, y-planet). I første del av oppgaven regner vi bevegelsen som ikke-relativistisk.

Partikkelen er utsatt for et elektromagnetisk felt som er beskrevet ved et vektorpotensial som i sylinderkoordinater har komponenter

$$A_r = 0,\ A_z = 0,\ A_\phi = \frac{1}{2} r\mathcal{B}(t) \tag{1}$$

for $r < r_{\max}$. Vi regner med at partikkelen hele tiden beveger seg i området $r < r_{\max}$. $\mathcal{B}(t)$ er konstant i dette området, men varierer med tiden.

a) Finn magnetfeltet $\vec{B}$ og det induserte elektriske felt $\vec{E}$ begge uttrykt i sylinderkoordinater. Hvordan varierer feltstyrkene med r?

b) Finn den ikke-relativistiske Lagrangfunksjonen for den ladete partikkelen uttrykt ved polarkoordinater i planet og sett opp Lagranges ligninger for de to variablene. Vis at disse ligningene er i overensstemmelse for bevegelsesligningen på vektorform for en ladet partikkel i et elektromagnetisk felt

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{2}$$

c) Anta først (for $t < 0$) at $\mathcal{B}$ er tidsuavhengig, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$. Lagrangefunksjonens symmetrier tilsier at det finnes to bevegelseskonstanter, hvilke? Vis at bevegelsesligningene har løsninger som svarer til bevegelse i sirkel, $r = r_0$. Finn de to bevegelseskonstantene uttrykt ved $\mathcal{B}_0$ og r_0. Finn også sirkelfrekvensen (vinkelhastigheten) ω_0.

d) Anta nå at $\mathcal{B}$ har $\mathcal{B}_0$ som begynnelsesverdi ved $t = 0$ og øker langsomt med tiden t, slik at den ved tidspunktet $t = t_1$ har verdien $\mathcal{B}_1$. Partikkelen går i sirkelbane med radius r_0 ved $t = 0$. Denne forandres til en bane med radius r_1 ved $t = t_1$. Hvilke av størrelsene under punkt c) er det som nå er bevart når feltet økes? Bestem radius r_1 og vinkelhastighet ω_1 som partikkelen har ved $t = t_1$ uttrykt ved r_0 og ved feltstørrelsene $\mathcal{B}_0$ og $\mathcal{B}_1$. Hva blir energien til partikkelen $\mathcal{E}_1$

ved $t = t_1$ uttrykt ved energien $\mathcal{E}_0$ ved $t = 0$?

I det neste punktet behandler vi partikkelen relativistisk. Bevegelsesligningen på vektorform (2) er fortsatt gyldig forutsatt, $\vec{p}$ betegner den relativistiske impuls

$$\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}, \quad \gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \tag{3}$$

I dette uttrykket har vi innført m_0 som partikkelens hvilemasse, mens m nå er dens relativistise masse, som øker med v.

e) Anta igjen at feltet er tidskonstant, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$. Vis at partikkelen også i den relativistiske beskrivelse kan bevege seg i en sirkulær bane med (vilkårlig) radius r_0. Hva blir uttrykkene for vinkelhastighet og energi? Sammenlign med de ikke-relativistiske uttrykk.

OPPGAVE 3
Tidsdilatasjon.

Et romskip forlater jordbane ved tiden $t = 0$ og setter kursen mot nærmeste stjerne, *Proxima Centauri*, som ligger i en avstand på 4.2 lysår. Romskipet har en utgangshastighet $v = 0$, og under første del av turen har det en konstant akselerasjon $a = g$ i retning mot Proxima Centauri. ($g = 9.8 m/s^2$ er tyngdeakselerasjonen ved jordoverflaten.)

Ved tidspunktet τ_0 målt i romskipets egentid forandres akselerasjonen til $a = -g$ slik at hastigheten bremses ned og romskipet når Proxima Centauri med sluthastighet $v = 0$. Vi betegner den første del av turen med I ($a = g$), og den andre del med II ($a = -g$). Romskipet tilbringer kun kort tid ved Proxima Centauri (vi ser bort fra denne tiden) før det returnerer mot jorden. Reisen tilbake foregår på samme måte som turen til Proxima Centauri. (Vi kaller de to delene av denne reisen III og IV.)

Den første del av turen (I) beskrives som en hyperbolsk tid-romsbane i den jordfaste referanseramme S. Posisjon og tid er under denne del av ferden gitt ved ligningene

$$x - x_I = \frac{c^2}{a} \cosh(\frac{a}{c}(\tau - \tau_I)), \quad t - t_I = \frac{c}{a} \sinh(\frac{a}{c}(\tau - \tau_I)) \tag{4}$$

hvor x_I, t_I og τ_I er konstanter. Tilsvarende uttrykk gjelder for de andre delene av turen, men med andre konstanter. Vi setter jortidskoordinater $x = 0, t = 0$ ved avreise av romskipet fra jorda. Vi setter også $\tau = 0$ ved dette tidspunkt.

a) Vis at tidsparameteren τ i ligning (4) svarer til egentiden til romskipet. Bestem romskipets 4-hastighet og 4-akselerasjonen (for del I av reisen) som funksjon av τ og vis at romskipet har en konstant egenakselerasjon lik a (akselerasjon i det instantane, inertiale hvilesystem). Forklar hvorfor banen kalles hyperbolsk.

b) Bestem konstantene i ligningene (4) for første del (I) av reisen og skriv opp ligningene på den form de da får, uttrykt ved tyngdeakselerasjonen g. Tegn et to-dimensjonalt tidrom-diagram (Minkowski-diagram) som viser hele reisen tur/retur Proxima Centauri.

c) Bestem egentidsparameteren τ_0. Finn hvor lang tid hele turen tar målt med romskipets egentid og målt med jordtid.

d) Hva er den største hastigheten romskipet oppnår under turen, målt i jordas referanseramme.