FYS 3120/4120: Klassisk mekanikk og elektrodynamikk

Midttermineksamen våren 2007
Obligatorisk sett innleveringsoppgaver

Innlevering av oppgaver
Oppgavene er tilgjengelige fra fredag 16. mars og kan lastes ned fra kursets webside. Frist for innlevering er satt til fredag 23. mars (i løpet av dagen). Besvarelsene leveres på ekspedisjonskontoret i 1. etg. i Fysikkbygget.

Spørsmål om oppgavene
kan rettes til Mats Horsdal, rom Ø469 eller Jon Magne Leinaas rom Ø471.
Merk: vi er begge tilgjengelige for spørsmål fra fredag t.o.m. tirsdag, men er begge bortreist f.o.m. onsdag 21. mars.

Tegning av figurer
Det blir noen steder bedt om at det tegnes figurer basert på matematiske uttrykk. Du kan gjerne benytte et matematikkprogram med plottefunksjoner til å lage disse hvis du har det tilgjengelig, men det er også helt i orden å lage en håndtegnet skisse som gir et kvalitativt riktig bilde.

Oppgavesettet
består av 3 oppgaver trykket på 4 sider.

OPPGAVE 1
Et oscillatorproblem
En partikkel med masse m beveger seg i én dimensjon (langs x-aksen), i et potensial

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}ax^4 \tag{1}$$

der k og a er positive konstanter. Et slikt potensial omtales gjerne som et *anharmonisk* oscillatorpotensial.

a) Sett opp Lagrangefunksjonen for partikkelen og finn bevegelsesligningen fra Lagranges ligning.

b) Vis at hvis partikkelens utslag om likevektspunktet $x = 0$ er lite vil ligningen få form av en harmonisk oscillatorligning. Hva er sirkelfrekvensen ω? Hva betyr "lite utslag" i denne sammenhengen? Sett det opp som en betingelse på svingeamplituden A uttrykt ved konstantene i Lagrangefunksjonen.

c) Finn Hamiltonfunksjonen $H(x, p)$ og sett opp Hamiltons ligninger.

d) Lag et faseromsdiagram for tilfellet $a = 0$ i form av et to-dimensjonalt diagram med x og p som akser og med ekvipotensialkurver (høydekurver) for funksjonen $H(x, p)$. Bruk gjerne dimensjonsløse koordinater, hvor vi setter $m = k = 1$. Tegn inn et sett med ekvidistante høydekurver, der $H(x, p) = E$ er konstant.

Forklar hvorfor partikkelens bevegelse foregår langs høydekurvene i faseromsdiagrammet. Hva bestemmer bevegelsesretningen? Angi retningen på kurvene i diagrammet. Hva sier Hamiltons ligninger om sammenhengen det mellom farten til partikkelen i x,p-planet og hvor tett kurvene ligger, dvs. hvor stor gradienten til $H(x, p)$ er?

e) Tegn et tilsvarende faseromsdiagram med $a \neq 0$, f.eks. med $a = 1$. Angi også her bevegelsesretningen og gi en kvalitativ beskrivelse av forandringen fra diagrammet for den harmoniske oscillatoren

($a = 0$).

f) For den harmoniske oscillatoren er svingeperioden uavhengig av amplituden. Basert på en kvalitativ vurdering av faseromsdiagrammet, vil du anta at det også gjelder den anharmoniske oscillatoren der $a \neq 0$, eller vil perioden øke evt. minske med amplituden? Begrunn svaret.

Anta nå at x^2-leddet i potensialet skifter fortegn. Vi skriver potensialet som

$$V(x) = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}ax^4 \tag{2}$$

der k og a fortsatt er positive konstanter.

g) Vis at punktet $x = 0$ nå er et ustabilt likevektspunkt, men at to nye stabile likevektspunkter har dukket opp ved $x = \pm b$. Bestem b.

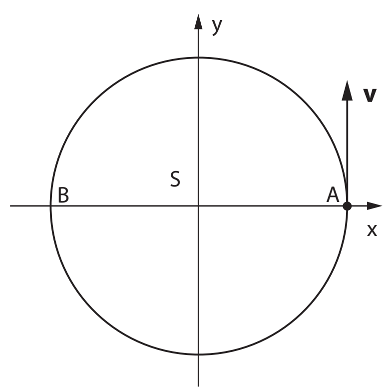
h) Finn svingefrekvensen for små svingninger om et av de nye stabile likevektspunktene.

i) Tegn et faseromsdiagram også i dette tilfellet og gi en kvalitativ beskrivelse av de forskjellige typer bevegelser partikkelen kan ha, basert på å studere diagrammet. Angi spesielt posisjonen til likevektspunktene i diagrammet.

OPPGAVE 2

Partikkel i akseleratorring.

En ladet partikkel beveger seg i sirkelbane i en partikkelakselerator. Den sirkelformete akseleratoren



Figur 1:

har radius $R = 10$ m og partikkelens hastighet svarer til en relativistisk gammafaktor $\gamma = 10$. Vi studerer partikkelens bevegelse, først i et inertialsystem S som er i ro i forhold til akseleratoren, med origo i sentrum av ringen (se fig. 1). Bevegelsen foregår i x,y-planet. Det betyr at $z = 0$ hele tiden, og vi kan derfor betrakte bevegelsen i et redusert 3-dimensjonalt tidrom med koordinater x, y og t. Vi antar at partikkelen befinner seg i punktet A på figuren (dvs. med $x = R$ og $y = 0$) ved $t = 0$.

a) Bestem farten v til partikkelen, vinkelhastigheten ω og omløpstiden T, alle størrelser bestemt i referansesystem S. Hva er akselerasjonen a i S?

b) Hva menes med partikkelens egentid τ? Gi sammenhengen mellom τ og koordinattiden t. Hva er omløpstiden T_τ målt i egentid?

c) Finn partikkelens tidrom-bane, beskrevet ved koordinatene som funksjon av egentid, $x^\mu(\tau)$, for $\mu = 0, 1, 2$. Hva slags kurve beskriver dette i det 3-dimensjonaldimensjonale tidrommet? Finn også de tre tidrom-komponentene til 4-hastigheten $U^\mu(\tau)$ og 4-akselerasjonen $A^\mu(\tau)$ i referansesystem S.

d) Akselerasjonen målt i partikkelens momentane hvilesystem kaller vi dens *egenakselerasjon* a_0? Sammenlign størrelsen av denne med størrelsen av akselerasjonen a målt i S.

Vi innfører et nytt inertialsystem S' som beveger seg relativt til S slik at partikkelen ved tidspunkt $t = 0$ ($\tau = 0$) er i ro i S' (punkt A i figuren). Vi velger koordinater i S' slik at partikkelen ved dette tidspunktet befinner seg i origo i S'. Koordinataksene i S og S' velger vi slik at x'-aksen er parallell med x-aksen og y'-aksen er parallell med y-aksen.

e) Skriv opp transformasjonsligningene som forbinder koordinatene i de to inertialsystemene S og S'.

f) Ved tidspunkt $t' = 0$ beskriver akseleratorringen en deformert sirkel i S'. Vis at det er en ellipse og bestem største og minste halvakse.

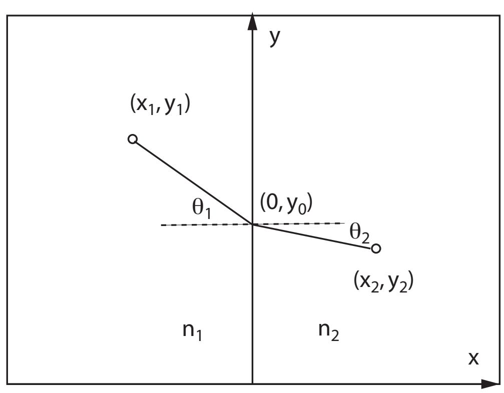
g) Finn partikkelbanen $x^{\mu\prime}(\tau)$, $\mu = 0, 1, 2$ i referansesystem S'. Tegn et 2-dimensjonalt plot som viser banen i x',y'-planet.

h) I inertialsystemet S' vil akselerasjonen a' til partikkelen variere med posisjonen i akseleratorringen. Hvor på akseleratorringen har partikkelen størst akselerasjon a'? Gi et begrunnet svar (beregning er ikke nødvendig).

OPPGAVE 3
Fermats prinsipp

Fermats prinsipp sier at en lysstråle vil følge den banen mellom to gitte punkter som minimaliserer den *optiske veilengden* mellom punktene. For enkelhets skyld antar vi at lysstrålen er begrenset til et to-dimensjonalt plan (x,y-planet), i et optisk medium med en posisjonsavhengig brytningsindeks $n(x, y)$. Den optiske veilengde mellom to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) langs banen $y(x)$ er da gitt ved virkningsintegralet

$$A[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} n(x, y)\sqrt{1 + y'^2}dx\ , \qquad y' = \frac{dy}{dx} \tag{3}$$



Figur 2:

a) Skriv opp Lagranges ligning, som svarer til variasjonsproblemet $\delta A = 0$. Uttrykk den som en differensialligning for funksjonen $y(x)$. Vis at hvis brytningsindeksen er konstant gir ligningen den rette linjen mellom endepunktene som løsning.

b) Anta at mediet har to forskjellige konstante brytningsindekser, $n = n_1$ for $x < 0$ og $n = n_2$ for $x > 0$ (se fig. 2). Forklar hvorfor minimaliseringsproblemet nå kan reduseres til å finne koordinaten

$y = y_0$ for punktet hvor lysstrålen krysser grensen $x = 0$. Finn ligningen for y_0, som gir den minste optiske veilengden. (Det er ikke nødvendig å løse ligningen.)

c) Vis at ligningen for y_0 i punkt b) impliserer at lysbanen tilfredsstiller Snells brytningslov,

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \tag{4}$$

hvor θ_1 og θ_2 er lysstrålens vinkel med normalretningen på de to sidene av grenseflaten.