

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS 3120/FYS 4120 Klassisk mekanikk og elektrodynamikk

Eksamensdag: Mandag 4. juni 2007

Tid for eksamen: kl. 14:30 (3timer)

Oppgavesettet er på 3 sider

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator

Øgrim og Lian eller Angell og Lian: Størrelser og enheter i fysikken

Rottmann: Matematisk formelsamling

Formula Collection FYS 3120/4120

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

OPPGAVE 1

To sammenbundne legemer

Et mekanisk system er sammensatt av en liten kloss og en kule forbundet med en snor. Klossen

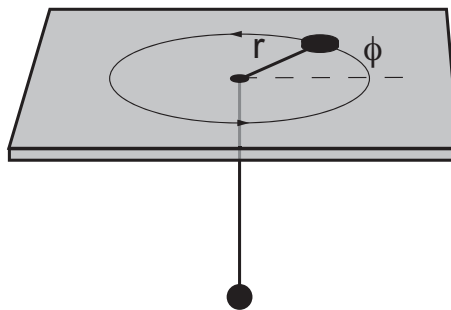


Figure 1:

kan gli friksjonsløst på et horisontalt bord. Snoren er ført langs bordet gjennom et hull til kula som bare beveger seg vertikalt, slik det er vist i Fig. 1. Massen til klossen er $2m$ med m som kulas masse. Vi regner snora som masseløs og uelastisk og at den hele tiden er strukket. Den har lengde d . Klossen regner vi som tilstrekkelig liten til at treghetsmomentet om massemidtpunktet er neglisjerbart.

a) Benytt polarkoordinatene (r, ϕ) til klossen på bordet som generaliserte koordinater og vis at Lagrangefunksjonen til det sammensatte systemet har formen

$$L = \frac{3}{2}m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\phi}^2 + mg(d - r) \quad (1)$$

b) Sett opp Lagranges ligninger. Hva menes med at vinkelkoordinaten er syklisk? Sett opp uttrykket for den tilhørende bevegelseskonstant l , og benytt det til å redusere bevegelsesligningene til én ligning, i den radielle variabelen r . Hvilken fysisk tolkning har l ?

c) Vis v.h.a. den radielle ligningen at det finnes en stabil situasjon hvor klossen går i sirkelbane med konstant radius r_0 . Anta at r avviker litt fra r_0 , $r = r_0 + \rho$ med $|\rho| \ll r_0$. Vis at den radielle bevegelsen blir små svingninger om r_0 , mens klossen sirkulerer i planet. Hva er frekvensen for de små oscillasjonene om r_0 ?

OPPGAVE 2

Sirkulerende elektron

Et elektron går i sirkelbane i et konstant magnetfelt (vinkelrett på banen) i en syklotron. Radius i banen er $R = 10m$ og den relativistiske gammafaktoren til elektronet er $\gamma = 100$. Massen til elektronet er $m_e = 9.1 \times 10^{-31}kg$, elektronladningen er $e = -1.6 \times 10^{-19}C$ og lyshastigheten $c = 3.0 \cdot 10^8 m/s$.

a) Hvor stor er elektronets fart uttrykt ved lyshastigheten. Finn også vinkelhastigheten ω og akselerasjonen a til elektronet målt i laboratoriesystemet (dvs. i inertialsystemet hvor syklotronen er i ro).

Benytt i det følgende koordinater hvor sirkelbanen til elektronet ligger i x,y-planet med sentrum av sirkelen i origo. Anta at magnetfeltet er rettet langs den positive z-aksen.

b) Sett opp uttrykkene for elektronets 4-vektorkoordinater x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), som funksjon av R , ω , γ og egentiden τ . Bestem også 4-hastigheten og 4-akselerasjonen. Hvor stor er egenakselerasjonen a_0 (akselerasjonen målt i det momentane hvilesystemet) uttrykt ved a ?

c) Anta vi studerer bevegelsen i elektronets momentane hvilesystem. Hva er feltstyrken til magnetfeltet \mathbf{B}' og til det elektriske feltet \mathbf{E}' i dette referansesystemet uttrykt ved magnetfeltet \mathbf{B} og elektronhastigheten \mathbf{v} i laboratoriesystemet? (Benytt de generelle uttrykk for Lorentztransformasjon av elektromagnetiske felter.) Sjekk at bevegelsesligningen er oppfylt i det momentane hvilesystemet når den er oppfylt i labsystemet, ved å benytte de uttrykkene som er funnet for egenakselerasjonen og for de transformerte feltene. (Vær oppmerksom på at på vektorform peker akselerasjonene \mathbf{a} og \mathbf{a}_0 i de to inertialsystemene i samme retning.)

OPPGAVE 3

Oscillerende strøm

I en sirkelformet strømsløyfe med radius a går det en oscillerende strøm på formen $I = I_0 \cos \omega t$. Strømsløyfen ligger i x,y-planet. Vi benytter betegnelsene \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y og \mathbf{e}_z for de kartesiske enhetsvektorene i x, y- og z-retningene, for å kunne reservere \mathbf{j} for strømtettheten. Strømsløyfen regnes å være ladningsnøytral.

a) Forklar hvorfor det elektriske dipolmomentet \mathbf{p} til strømsløyfen er lik null, og vis at det magnetiske momentet har tidsavhengigheten $\mathbf{m}(t) = m_0 \cos \omega t \mathbf{e}_z$, med m_0 som en konstant. Bestem m_0 uttrykt ved a og I_0 .

Vi minner om de generelle uttrykkene for strålingsfeltet fra en magnetisk dipol,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi cr} \ddot{\mathbf{m}}_{ret} \times \mathbf{n}; \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{n} \quad (2)$$

hvor $\mathbf{m}_{ret} = \mathbf{m}(t - r/c)$ og $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Anta i det følgende at vi studerer feltene langt fra strømsløyfen (i strålingssonen) hvor uttrykkene (2) er gyldige.

b) Sett opp uttrykket for strålingsfeltene for punkter på x-aksen langt fra kilden, og vis at de har form av elektromagnetiske bølger som forplanter seg i x-retningen bort fra strømsløyfen. Hva slags polarisasjon har bølgene?

c) Benytt det generelle uttrykket for Poyntings vektor \mathbf{S} til å finne den utstrålte effekt pr. romvinkelenhet, $\frac{dP}{d\Omega}$, i x-retningen. Hvor stor er den utstrålte effekt i z-retningen?