FYS3140 FRIVILLIG INNLEVERING
(frist fredag 28. mai)

Oppgave 1
Oppgave 24.9 fra læreboka (tips finnes i fasiten).

Oppgave 2
Oppgave 24.13 fra læreboka (Cosets: Tilstrekkelig å se på for eksempel høyre-cosets til to undergrupper med ulik orden. Litt mye jobb å skrive ut alle cosettene! Overbevis deg om at cosettene ikke overlapper, se Lagranges teorem).

Oppgave 3
Vi har et system bestående av tre identiske partikler. Symmetrigruppen er da S_3, dvs. alle permutasjoner av tre like objekter. Forsøk å ordne de seks elementene i S_3 i klasser ut fra ”fysisk likhet” . Bestem antall ikke-reduserbare representasjoner og dimensjonen av disse (se tabell 25.1 i læreboka).
Et sett av tilstandsfunksjoner for de tre partiklene av typen $\Psi(1,2,3)$ gir basis for en 6-dimensjonal representasjon for S_3. Finn karakterene for denne representasjonen og vis hvordan den kan reduseres (bruk tabell 25.1). Kommenter resultatet i lys av Pauliprinsippet (Bosoner og Fermioner). (Hint: $P_{12}\Psi(1,2,3)=\Psi(2,1,3)$, etc.).

Oppgave 4
Karakteren for en (reduserbar) representasjon er gitt ved

$$c(G_a) = \sum_a m_a \, c^{(a)}(G_a) \; ,$$

der G_a er et vilkårlig element i en gruppe med orden g. Vis at vi har

$$\sum_{a=1}^{g} c(G_a)\, c(G_a)^* = g \sum_a m_a{}^2 \qquad (1)$$

I utgangspunktet kan vi tenke oss at vi ikke vet om representasjonen med karakterer $\chi(G_a)$ er reduserbar eller ikke. Forklar hvorfor resultatet ovenfor kan benyttes som et kriterium på reduserbarhet.

For enhver gruppe med orden g finnes det en representasjon (den såkalte regulære representasjon) med dimensjon g som har egenskapen

$$c(E) = g \; , \quad c(G_a) = 0 \; , \; G_a \neq E \; .$$

Reduser denne representasjonen, dvs. bestem tallene m_α. Prøv relasjonen (1) ovenfor på denne representasjonen. Hva finner du?

Oppgave 5
Vi skal se på karaktertabellen for gruppen D_3, dvs. gruppen av rotasjonsoperatorer på en likesidet trekant. Vi har elementene A, B, C som er rotasjoner vinkel π, og D (rotasjon vinkel $2\pi/3$), $F=D^2$, samt identiteten E. Karaktertabellen har formen:

D_3	E	(A, B, C)	(D, F)
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	a	b
$D^{(3)}$	2	c	d

Vi antar at a, b, c og d er reelle tall. Skriv ned fire ligninger som bestemmer de fire ukjente tallene a, b, c og d ved hjelp av ortogonalitetsrelasjonen for karakterene. Disse gir en entydig løsning. Prøv å finne en løsning i form av hele tall (sammenlign med tabell 25.1).

Oppgave 6

Hvis du til slutt har lyst til å prøve deg på en tensoroppgave, kan oppgave 21.18 i læreboka være et alternativ. For et paramagnetisk legeme som utsettes for et ytre magnetfelt H vil det dannes et magnetisk moment M (en del atomer har spinn som innrettes langs feltet, FYS2160), slik at M=χH, der χ er den paramagnetiske tensoren. Denne er gitt i et koordinatsystem fast i legemet, enhetsvektorer $\vec{e}_i$. Dreier vi dette systemet får vi nye enhetsvektorer gitt ved $\vec{e}_j^{\,'} = \sum_i S_{ij}\vec{e}_i$, og relasjonen mellom M og H i det nye systemet blir $M^{'} = c^{'}H^{'}$, med $c^{'} = S^{-1}c\,S$. Oppgaven går nå ut på å forenkle uttrykket for energien ved bestemme S slik at $\chi^{'}$ blir diagonal, dvs. finne egenverdier og egenvektorer. Merk at egenvektorene gir kolonnene i S-matrisen. Når egenvektorene er bestemt (dvs. S-matrisen) er da også de nye merkede koordinataksene funnet, dvs. prinsipalaksene. (Det kan også være nyttig å se på sidene 800 og 801 i læreboka).