Løsning hjemmeeksamen FYS3140 V04

Oppgave 1

a) Start med integralet

$$\frac{1}{\sqrt{2p}}\oint\frac{e^{i(t-b)z}}{z^2+a^2}dz$$

Integrasjonsvei: Halvsirkel i øvre halvplan med radius R. Integranden har en enkel pol i øvre halvplan i z=ia, med tilhørende residy lik $\frac{1}{\sqrt{2p}}\frac{e^{-a(t-b)}}{2ia}$. For $t-b\geq 0$ vil integralet over halvsirkelen gå mot null når R→∞ etter Jordans lemma. Resultatet blir da

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iw(t-b)}}{w^2+a^2}dw=\sqrt{\frac{p}{2}}\frac{1}{a}e^{-a(t-b)}\quad \text{for } t\geq b\ .$$

For tilfellet t<b vil vi kunne bruke Jordans lemma ved å legge integrasjonsveien til nedre halvplan. Man kan også gjøre en enkel substitusjon av integrasjonsvariabel til w=-z, beholde integrasjonsvien i øvre halvplan, men nå med motsatt integrasjonsretning. Det generelt riktige svaret blir som ovenfor, men med t-b erstattet med |t-b|.

b)

Integrasjonsveien blir som for a), men nå er det enkle poler på den reelle aksen i –a og a. Vi legger små halvsirkler i øvre halvplan med sentrum i –a og a h.h.v. Det er nå ingen andre poler, of f(t) blir gitt ved prinsipalverdien av integralet:

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2p}}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iwt}}{w^2-a^2}dw=p\,i(\operatorname{Re}s(-a)+\operatorname{Re}s(a))$$
$$=-\sqrt{\frac{p}{2}}\frac{1}{a}\sin at$$

Her har vi også brukt Jordans lemma for øvre halvplan og antatt $t\geq 0$. For t<0 kan vi gjøre som under a), legge integrasjonsveien til nedre halvplan, eller enklest substituere w=-z. Resultatet blir at t i svaret ovenfor generelt må erstattes med |t|.

Oppgave 2

Laguerres differensialligning:

$$xy''+(1-x)y'+l\,y=0$$

Fröbenius: $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s}$

Innsatt gir det indeksligningen (n=-1): $a_0 s(s-1)+a_0 s=0$, og med $a_0\neq 0$ finner vi da $s_1=s_2=0$, dvs. bare en løsning. For n>-1 gjelder relasjonen

$$a_{n+1}=-\frac{l-n}{(n+1)^2}a_n$$

Vi ser at for λ=N vil rekka bryte av, dvs. $a_{n+1}=0$ for $n \geq N$. Med s=0 blir da løsningen et polynom av grad N. En finner videre at

$$a_n = (-1)^n \frac{N!}{(N-n)!(n!)^2} a_0 \text{ , og}$$

$$y_N(x) = a_0 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{N!}{(N-n)!(n!)^2} x^n$$

(Kommentar: På side 545 i læreboka finnes indeksligningen og dermed s (eller σ) ved å dele med $z^{\sigma-2}$, og så sette z=0. Man må være forsiktig med hva man deler med, bl.a. ikke 0. Dette er ingen god fremgangsmåte, indeksligningen finnes av at rekka dere finner må være lik 0 ledd for ledd (ulike potenser, se forelesning). Vi trekker ikke poeng for dere som har løst problemet slik, men dere får en kommentar.)

Oppgave 3

Differensialligningen

$$x'' + 2x' + (1+k^2)x = F(t) \text{ , } k \neq 0$$

a) Med F(t)=H(t) og de gitte betingelser blir den Laplacetransformerte av x gitt ved

$$L[x] = \frac{1}{s\left[(s+1)^2 + k^2\right]} = \frac{1}{s} \frac{k}{k\left[(s+1)^2 + k^2\right]} = G(s)F(s)$$

Vi ser at den Laplace-transformerte er faktorisert som G(s)F(s), svarende til g(t)=1 og

$$f(t) = \frac{1}{k} e^{-t} \sin kt$$

Etter foldingsteoremet er da x(t) gitt ved

$$x(t) = \frac{1}{k} \int_0^t e^{-t} \sin kt \, dt = \frac{1}{1+k^2} \left[1 - e^{-t}(\cos kt + \frac{1}{k} \sin kt)\right]$$

Dette resultatet kunne også finnes ved delbrøkoppspalting:

$$\frac{1}{s\left[(s+1)^2 + k^2\right]} = \frac{1}{1+k^2} \left[\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + k^2} - \frac{1}{(s+1)^2 + k^2}\right] .$$

b) Greens-funksjon. Initialbetingelsene gitt ved t=0, og vi kan vi la t gå til ∞. Differensiallignigen som bestemmer G(t,τ) er som følger:

$$\frac{d^2}{dt^2} G(t,t) + 2\frac{d}{dt} G(t,t) + (1+k^2) G(t,t) = d(t-t) .$$

Vi har separate løsninger for t<τ og t>τ hvor ligningen er homogen. Løsningene er gitt i oppgaveteksten.

c) Av $x(t) = \int_0^\infty G(t,t)F(t)\,dt$ følger at x(0)=0 og x'(0) er oppfylt ved å kreve G(0,τ)=0 og $\frac{d}{dt}G(t,t)|_{t=0} = 0$. Videre har vi kravet om at G(t,τ) skal være kontinuerlig for t=τ, mens $\frac{d}{dt}G(t,t)$ skal ha en diskontinuitet på 1 ved t=τ. Vi finner da lett at A(τ)=B(τ)=0. C(τ) og D(τ) finnes av ligningssettet

$$C(t)\cos kt + D(t)\sin kt = 0$$

$$-C(t)\sin kt + D(t)\cos kt = \frac{1}{k}e^t$$

Løsningen er

$$C(t) = -\frac{1}{k}e^t \sin kt \ , \quad D(t) = \frac{1}{k}e^t \cos kt$$

Dette gir da løsningene for G(t,τ) so er gitt i oppgaven:

$$G(t,t) = \frac{1}{k}e^{-(t-t)}\sin k(t-t) \ , \ t > t$$

$$G(t,t) = 0 \ , \quad t < t \ .$$

e) Siden G(t,τ)=0 for t<τ behøver vi bare å integrere fra 0 til t når vi skal bestemme x(t). Med F(t)=H(t) finner vi da:

$$x(t) = \int_0^t G(t,t)F(t)dt = \frac{1}{k}\int_0^t e^{-(t-t)}\sin k(t-t)dt$$

$$= \frac{1}{k}\int_0^t e^{-u}\sin ku\,du \ , \quad u = t - t \ .$$

Resultatet blir som oppgitt i oppgaven og funnet under a). Vi ser at Greens-funksjonen gir samme integralet for x(t) som vi fant ved bruk av Laplace-transformasjon og foldingsteoremet.

Oppgave 4

Laplace-lgningen i plane polarkoordinater r og θ:

$$\nabla^2 u(r,q) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u(r,q)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u(r,q)}{\partial q^2} = 0 \ .$$

a) Separasjon av variable: u(r,θ)=R(r)f(θ) gir følgende ligninger for R(r) og f(θ):

$$r^2 \frac{d^2R(r)}{dr^2} + r\frac{dR(r)}{dr} = l^2 R(r)$$

$$\frac{d^2 f(q)}{dq^2} = -l^2 f(q) \ .$$

Ligningen for R(r) er av Euler-Cauchy type og har løsning

$$R(r) = Cr^{l} + Dr^{-l} \ ,$$

mens ligningen for f(θ) er en vanlig svingeligning med løsning

$$f(q) = Ee^{ilq} + Fe^{-ilq} \ .$$

Betingelsen u(r,θ)=u(r,θ+π) krever $e^{ilp} = e^{-ilp} = 1$, eller $lp = 2mp$, $m = 1,2,3,,,$ dvs. λ=2m. For å kunne oppfylle denne betingelsen ang. θ må vi ha en svingeligning, dvs. separasjonskonstanten må velges positiv, dvs. som λ^2. For λ=0 finner vi R(r)=alnr+b f(θ)=cθ+d (a, b, c og d konstanter), og betingelsen ang. θ er oppfylt for c=0. Ved å omskrive løsningen for f(θ) til trigonometrisk form finner vi løsninger av typen

$$u_{2m}(r,q) = A_{2m}(r)\cos 2mq + B_{2m}(r)\sin 2mq \ ,$$

$$A_{2m}(r) = C'_{2m} r^{2m} + D'_{2m} r^{-2m}$$

$$B_{2m}(r) = C''_{2m} r^{2m} + D''_{2m} r^{-2m}$$

$$A_0(r) = a\ln r + b \ .$$

Superposisjon av slike løsninger gir da en generell løsning:

$$u(r,q) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[A_{2m}(r)\cos 2mq + B_{2m}(r)\sin 2mq \right] \ .$$

b) For å oppfylle betingelsen u(r,θ)→0 når r→∞ må vi ha $C'_{2m} = C''_{2m} = a = b = 0$. Videre medfører betingelsen u(d,θ)=g(θ)=-g(-θ) at u(r,θ) må være en odde-funksjon i θ, og dermed må vi ha en sinusrekke, dvs. vi må også ha $D'_{2m} = 0$. Vi har da følgende:

$$u(r,q) = \sum_{m=1}^{\infty} D''_{2m} r^{-2m} \sin 2mq$$

$$u(d,q) = \sum_{m=1}^{\infty} D''_{2m} d^{-2m} \sin 2mq = g(q) \ .$$

Av den siste ligningen ovenfor finner vi så:

$$D''_{2m} = d^{2m}\,\frac{2}{p}\int_0^p \sin 2mq\; g(q)\,dq \quad \text{ved å benytte at}$$

$$\int_{-p}^{p} \sin 2mq\,\sin 2nq\,dq = 2\int_0^p \sin 2mq\,\sin 2nq\,dq = pd_{mn} \ .$$

Til sammen får vi da

$$B_{2m}(r) = \frac{2}{p}\left[\frac{d}{r}\right]^{2m}\int_0^p g(q)\sin 2mq\,dq \ , \ A_{2m}(r) = 0 \ .$$

c) Vi må dele integralet som bestemmer D''_{2m} opp to deler, fra 0 til π/2 , og fra π/2 til π. Resultatet blir:

$$D''_{2m} = \frac{2V}{p\,m}\,d^{2m}(1-(-1)^m) \ , \ \text{og}$$

$$u(r,q) = \frac{8V}{p}\sum_{m=1,3,5,,}^{\infty}\frac{1}{2m}\,\frac{d^{2m}}{r^{2m}}\sin 2mq \ .$$