Oppgave 20.29

I denne oppgaven skal vi beregne summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} \tag{1}$$

ved hjelp av kompleks integrasjon, der $a > 0$ er en konstant. Metoden som benyttes er svært generell, dvs. den kan brukes på mange andre tilsvarende uendelige summer.

Oppgave a

Vi innfører funksjonen

$$f(z) = \frac{\pi \cot \pi z}{a^2 + z^2} = \frac{\pi \cos \pi z}{(z + ia)(z - ia) \sin \pi z} \tag{2}$$

Denne funksjonen ser vi at har enkle poler i alle punkter der $\sin \pi z = 0$, dvs. for

$$z = n, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3}$$

Residyet i disse polene blir

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z = n) &= \lim_{z \to n} (z - n) f(z) \\ &= \frac{\pi \cos n\pi}{n^2 + a^2} \lim_{z \to n} \frac{z - n}{\sin \pi z} \\ &= \frac{\pi \cos n\pi}{n^2 + a^2} \cdot \frac{1}{\pi \cos n\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{n^2 + a^2}}} \end{aligned} \tag{4}$$

der vi har brukt l'Hôpitals regel for å beregne grenseverdien. Summen vi er interessert i å beregne, er altså en sum over residyer til funksjonen $f(z)$ i ligning 2. Det er dette som er grunnen til at vi inkluderer uttrykket $\pi \cot \pi z$ i definisjonen av $f(z)$.

Funksjonen har også enkle poler i punktene $z = \pm ia$. Residyene her blir

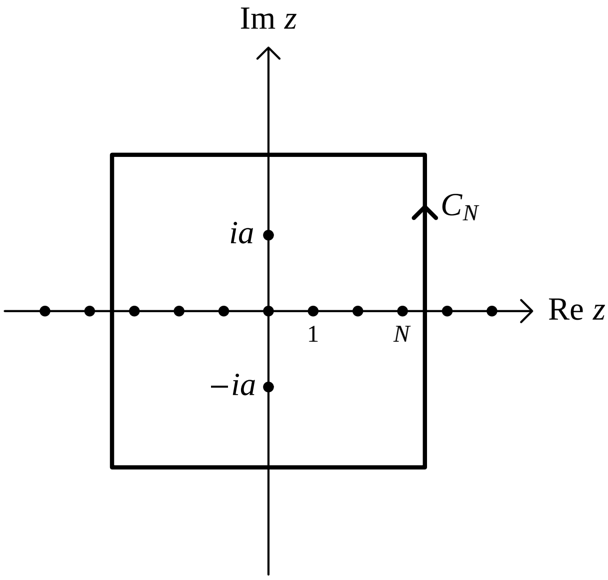
$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(ia) &= \lim_{z \to ia} (z - ia) f(z) \\ &= \frac{\pi \cos \pi ia}{2ia \sin \pi ia} \\ &= \frac{\pi \cosh \pi a}{2ia \cdot i \sinh \pi a} = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2a} \coth \pi a}} \end{aligned} \tag{5}$$

og

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(-ia) &= \lim_{z \to -ia} (z + ia) f(z) \\ &= \frac{\pi \cos(-\pi ia)}{-2ia \sin(-\pi ia)} = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2a} \coth \pi a}} \end{aligned} \tag{6}$$

Oppgave b

Integrasjonskonturen som indikeres i oppgaven er ikke den det er vanlig å velge i denne typen problemer. Vi holder oss til det som er standard, og velger derfor et kvadrat C_N med sidekanter i avstand $N + \frac{1}{2}$ fra origo, der N er et heltall. Konturen går dermed midt mellom de singulære punktene, se figuren.



Årsaken til at vi velger denne konturen, er at funksjonen $g(z) = \cot \pi z$ da er begrenset, som vi nå vil vise. Først skriver vi om $g(z)$ som

$$\begin{aligned} g(z) &= \cot \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} \\ &= i \cdot \frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} = i \cdot \frac{e^{2\pi i z} + 1}{e^{2\pi i z} - 1} \end{aligned} \tag{7}$$

Vi skiller så mellom de vertikale og de horisontale delene av kvadratet:

1. $z = \pm(N + \frac{1}{2}) + iy$:

$$g(z) = i \cdot \frac{e^{\pm 2\pi i(N+1/2)} e^{-2\pi y} + 1}{e^{\pm 2\pi i(N+1/2)} e^{-2\pi y} - 1} = -i \cdot \frac{1 - e^{-2\pi y}}{1 + e^{-2\pi y}} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \qquad |g(z)| = \frac{1 - e^{-2\pi|y|}}{1 + e^{-2\pi|y|}} < 1 \qquad \text{for alle } y \tag{9}$$

2. $z = x \pm i(N + \frac{1}{2})$:

$$g(z) = i \cdot \frac{e^{2\pi i x} e^{\mp 2\pi(N+1/2)} + 1}{e^{2\pi i x} e^{\mp 2\pi(N+1/2)} - 1} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad |g(z)| &\leq \frac{e^{\mp 2\pi(N+1/2)} + 1}{|e^{\mp 2\pi(N+1/2)} - 1|} \\ &= \frac{1 + e^{-2\pi(N+1/2)}}{1 - e^{-2\pi(N+1/2)}} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} \quad \text{for alle } N \end{aligned} \tag{11}$$

Dette betyr at dersom vi setter

$$M = \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} = 1.09033... \tag{12}$$

så er $|\cot \pi z| \leq M$ for alle $z \in C_N$ og alle N.
Vi ser så på integralet

$$I_N = \oint_{C_N} f(z)dz = \oint_{C_N} \frac{\pi \cot \pi z}{a^2 + z^2} dz \tag{13}$$

Når N er stor, er dette tilnærmet gitt ved

$$|I_N| \leq \pi M \oint_{C_N} \frac{1}{|a^2+z^2|} \cdot |dz| \simeq \pi M \cdot \frac{1}{N^2} \cdot 8N = \frac{8\pi M}{N} \tag{14}$$

og følgelig

$$\underline{\lim_{N\to\infty} \oint_{C_N} f(z)dz = 0} \tag{15}$$

Fra residyteoremet følger det generelt at

$$\begin{aligned} \oint_{C_N} f(z)dz &= 2\pi i \cdot \sum (\text{residyer innenfor } C_N) \\ &= 2\pi i \cdot \left[\sum_{n=-N}^{N} \operatorname{Res} f(n) + \operatorname{Res} f(ia) + \operatorname{Res} f(-ia) \right] \end{aligned} \tag{16}$$

som for $N \to \infty$ gir

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res} f(n) = -\operatorname{Res} f(ia) - \operatorname{Res} f(-ia) \tag{17}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{a^2} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a} \coth \pi a \tag{18}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a} \coth \pi a - \frac{1}{2a^2}}} \tag{19}$$

Oppgave c

I ligning 19 fant vi at

$$F(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \coth \pi a - \frac{1}{2a^2} \tag{20}$$

for alle $a > 0$. Funksjonen $F(a)$ definert ved summen over n er åpenbart regulær i punktet $a = 0$, som betyr at uttrykket på høyre side av ligningen bare kan ha en hevbar singularitet her. Vi får dermed at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = F(0) = \lim_{a \to 0} \left(\frac{\pi}{2a} \coth \pi a - \frac{1}{2a^2} \right) \tag{21}$$

Denne grenseverdien kan i prinsippet beregnes fra l'Hôpitals regel, selv om dette kan være litt kronglete. Men ettersom funksjonen $F(a)$ kan brukes til å beregne også en rekke andre summer (som vi skal se), vil vi gå frem på en litt annen måte, nemlig ved å finne Taylor-utviklingen av $F(a)$ omkring punktet $a = 0$. Vi starter da med følgende tre velkjente rekker:

$$\begin{aligned}
\cosh z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{24} z^4 + \ldots \\
\sinh z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z + \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 + \ldots \\
\frac{1}{1-z} &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + \ldots
\end{aligned} \tag{22}$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
\coth z &= \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{24} z^4 + \ldots}{z + \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 + \ldots} \\
&= \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{24} z^4 + \ldots \right) \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{6} z^2 - \frac{1}{120} z^4 + \ldots \right)} \\
&= \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{24} z^4 + \ldots \right) \left(1 - \frac{1}{6} z^2 - \frac{1}{120} z^4 + \frac{1}{36} z^4 + \ldots \right) \\
&= \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{24} z^4 - \frac{1}{6} z^2 - \frac{1}{12} z^4 - \frac{1}{120} z^4 + \frac{1}{36} z^4 + \ldots \right) \\
&= \underline{\frac{1}{z} + \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 + \mathcal{O}(z^5)}
\end{aligned} \tag{23}$$

og følgelig

$$F(a) = \frac{\pi}{2a} \left(\frac{1}{\pi a} + \frac{\pi a}{3} - \frac{\pi^3 a^3}{45} + \ldots \right) - \frac{1}{2a^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4 a^2}{90} + \ldots \tag{24}$$

Vi kan dermed lese ut verien av $F(0)$ direkte:

$$F(0) = \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}} \tag{25}$$

I tillegg får vi et annet ikke-trivielt resultat gratis med på kjøpet: hvis vi innfører funksjonen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90} x + \dots \tag{26}$$

finner vi ved å derivere

$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + x)^2} = -\frac{\pi^4}{90} + \dots \tag{27}$$

og følgelig

$$-f'(0) = \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}} \tag{28}$$

Men det slutter ikke her: hvis vi rekkeutvikler $f(x)$ til høyere orden, f.eks. ved hjelp av Mathematica (eller ved å regne noen timer for hånd...), finner vi

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90} x + \frac{\pi^6}{945} x^2 - \frac{\pi^8}{9450} x^3 + \dots \tag{29}$$

Derivasjon gir dermed

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + x)^3} = \frac{2\pi^6}{945} - \frac{6\pi^8}{9450} x + \dots \\ f^{(3)}(x) &= -3! \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + x)^4} = -3! \cdot \frac{\pi^8}{9450} + \dots \end{aligned} \tag{30}$$

med resultatet

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f''(0) &= \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}}} \\ -\frac{1}{3!} f^{(3)}(0) &= \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}}} \end{aligned} \tag{31}$$

eller helt generelt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_k x^k \tag{32}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}(0) = C_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \tag{33}$$

Det er ganske utrolig at alle disse høyst ikke-trivielle summene følger direkte fra Taylor-utviklingen av den svært så enkle funksjonen $f(x)$ (dvs. funksjonen $F(a)$ i ligning 20).