ØVINGSOPPGAVER FYS3140 12.UKE

Oppgave 1
Løs den partielle differensialligningen

$$x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=xt$$

med betingelsene u(x,0)=0, ($x \geq 0$), u(0,t)=0, ($t \geq 0$).
Bruk Laplace-transformasjon med t som variabel og x som en parameter. Vis at Laplacetransformasjonen av u(x,t) er gitt ved ligningen

$$x\frac{d}{dx}F(x,s)+sF(x,s)=\frac{x}{s^2}$$

Denne ligningen har en partikulær løsning av formen $F_p(x,s)=A(s)x$. Finn F(x,s) og vis at

$$u(x,t)=x(t-1+e^{-t}) \ .$$

Oppgave 2
Løs den partielle differensialligningen

$$a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

med initialbetingelsen u(x,0)=bδ(x). a og b er konstanter. Bruk Fouriertransformasjon med x som variabel og t som en parameter. Vis at Fouriertranformasjonen av u(x,t) er

$$F(w,t)=\frac{b}{\sqrt{2p}}e^{-a^2w^2t}$$

Vis videre at løsningen er

$$u(x,t)=\frac{b}{\sqrt{4p\,a^2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

Denne oppgaven kan for eksempel referere til et fysisk system i form av en lang tynn stav som er varmeisolert, der u(x,t) angir temperaturen langs staven. Ved t=0 gis den en kortvarig kraftig oppvarming i et punkt (x=0) ved at en laserstråle sendes inn gjennom et hull i isolasjonen. Ved å observere temperaturen (dvs. u(x,t)) i staven som funksjon av x og t etter oppvarmingen, kan konstanten a bestemmes. Den gir oss stoffets varmeledningsevne (når tetthet og varmekapasitet er kjent). Dette er en teknikk som brukes til å måle varmeledningsevne.

Oppgave 3
Oppgave 19.26 i læreboka.
Hint: $(1+x)^p \approx 1+px$ for $|x| \ll 1$

Oppgave 4
Oppgave 19.17 i læreboka.

Hint: Potensialet avhenger bare av r og θ:

$$U(r,q) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}) P_n(\cos q)$$

Du kan også få bruk for følgende egenskaper ve Legendre-polynomene

$$P_n(x) = P_n(\cos q)\ , \quad dx = -\sin q \, dq \ :$$

$$\int_0^1 P_{2n+1}(x)dx = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n!(n+1)!}$$

$$\int_0^1 P_{2n}(x)dx = 0 \ \text{ for } n > 0$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2m+1} d_{nm}$$

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

Bestem også potensialet utenfor de to halvkulene!