Differensialligning av første orden

Vi ser på en differensialligning av 1.orden på formen

$$y' + P(x)y = Q(x)\ .$$

Denne type ligning kan bl. a. dukke opp som en del av løsningen av differensialligninger av andre orden, som er de viktige ligningene i fysikken.
Standardløsningen av denne type ligning er ved hjelp av en såkalt integrerende faktor $\mu(x)$. Vi multiplisere ligningen med $\mu(x)$, og stiller følgende krav til $\mu(x)$:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)\ .$$

Den første delen av relasjonen ovenfor gir nå

$$y\frac{d}{dx}\mu(x) = y\mu(x)P(x)\ ,\ \text{ eller }\ \frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx\ ,$$

med løsningen:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}\ .$$

Den andre ralasjonen ovenfor, dvs. $\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)Q(x)$ gir så

$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)dx + C\ .$$

Vi bestemmer altså først den integrerende faktoren $\mu(x)$, og får så bestemt $\mu(x)y$, og dermed y.

For en homogen diff. ligning, dvs. Q(x)=0, har vi

$$\mu(x)y = C\ ,\ \text{ eller }\ y = \frac{C}{\mu(x)} = Ce^{-\int P(x)dx}\ .$$

Ordinære lineære differensialligninger av 2. orden

Vår ligning har den generelle formen:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

Ordinær: Bare en uavhengig variabel x, ingen partielle deriverte.
Lineær: Bare lineære ledd i y'', y' og y (ingen høyere potenser).
2. orden: Ingen deriverte av høyere orden enn 2.

Dette er en viktig ligning for anvendelser i fysikken. Den dukker også opp senere ved løsningen av de store partielle diff. ligningene. Venstre-siden i ligningen kan typisk beskrive et "fritt" system, mens høyre-siden R(x) angir en ytre påvirkning av systemet.

Hva vil det si å bestemme den "generelle" løsning av en slik diff. ligning? Anta at P(x), Q(x) og R(x) alle er analytiske funksjoner i et punkt x_0 , og i et område omkring x_0. Da vet vi fra teorien for analytiske funksjoner at P(x), Q(x) og R(x) alle er ubegrenset mange ganger deriverbare i dette området.

Anta videre at vi har oppgitte verdier for $y(x_0)$ og $y'(x_0)$. Verdien for $y''(x_0)$ er da bestemt av diff. ligningen, og ved å derivere ligningen ser vi at også $y'''(x_0)$ er bestemt, og videre derivering viser at alle $y^{(n)}(x_0)$ er bestemt. Dermed er også løsningen av ligningen entydig bestemt ved Taylorrekka:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Konklusjonen er da at det bare finnes en eneste løsning av diff. ligningen som har de gitte verdiene for $y(x_0)$ og $y'(x_0)$.
Av dette ser vi at hvis vi på en eller annen måte kan finne en $y(x)$ som passer i diff. ligningen, og som stemmer med de gitte verdiene for $y(x_0)$ og $y'(x_0)$, så har vi funnet den eneste mulige løsningen. For en diff. ligning av 1.orden er tilsvarende en entydig løsning bestemt av verdien for $y(x_0)$.
Dessverre finnes det ingen generell metode til å finne en slik løsning for alle formene som vår ganske generelle diff. ligning kan anta.

Den homogene ligningen

Vi ser først på den homogene ligningen, dvs. $R(x)=0$:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Vi merker oss nå at hvis vi har to løsninger $y_1(x)$ og $y_2(x)$ av den homogene ligningen, så er også

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

der c_1 og c_2 er konstanter, en løsning. Skal denne løsningen passe med gitte verdier for $y(x_0)$ og $y'(x_0)$, må c_1 og c_2 kunne bestemmes som løsninger av ligningssettet

$$c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y(x_0)$$
$$c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) = y'(x_0)$$

For å finne løsninger for dette ligningssettet må Wronski-determinanten W være ulik null, dvs.

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Vi kan her enkelt innse at hvis $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er lineært avhengige, dvs, $y_1(x)=ky_2(x)$, så blir $W=0$, og dermed ingen løsning. Vider ser vi at $W=0$ medfører at

$$\frac{y_1(x_0)}{y_2(x_0)} = \frac{y'_1(x_0)}{y'_2(x_0)} = K \ ,$$

og diff. ligningen gir at dette samme forholdet K også finnes for alle høyere deriverte:

$$y^{(n)}{}_1(x_0) = K y^{(n)}{}_2(x_0) \ ,$$

og av Taylorrekkene for $y_1(x)$ og $y_2(x)$ følger da at $y_1(x) = K y_2(x)$, altså lineært avhengige. Vi har dermed funnet at hvis $y_1(x)$ og $y_2(x)$ ikke er lineært avhengige, så har den generelle løsningen av den homogene ligningen formen

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \ .$$

Dessverre finnes det heller ikke noen generell metode for å finne to lineært uavhengige løsninger $y_1(x)$ og $y_2(x)$ for alle mulige typer av vår homogene ligning. Hvis vi har funnet en slik løsning $y_1(x)$, kan vi imidlertid alltid finne en annen lineært uavhengig løsning $y_2(x)$ ved metoden med **variasjon av konstanten**, dvs. vi setter

$$y_2(x) = C(x)y_1(x) \ ,$$

og C(x) finnes ved å sette dette uttrykket for $y_2(x)$ inn i diff. ligningen, og benytte at $y_1(x)$ er en løsning.

Som eksempel kan vi se på en ligning av Euler-Cauchy typen:

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0 \ .$$

Vi innser rimelig greit at $y_1(x)=x$ er en løsning. En annen løsning $y_2(x)$ finnes så ved å sette

$$y_2(x) = C(x)y_1(x) = C(x)x$$

inn i diff. ligningen. Etter noe regning finnes da

$$C''(x) = \frac{dC'(x)}{dx} = -3\frac{C'(x)}{x}$$

$$\frac{dC'(x)}{C'(x)} = -\frac{3}{x}dx$$

$$C'(x) = \frac{A}{x^3} \ , \quad C(x) = A\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{A}{2x^2} + B \ .$$

Her er A og B ubestemte integrasjonskonstanter, vi behøver bare det enklest mulige uttrykket for C(x) som gjør $y_1(x)$ og $y_2(x)$ lineært uavhengige, f,eks. A=-2 og B=0. Vi har da $y_2(x)=C(x)y_1(x)=1/x$, og den generelle løsningen blir

$$y(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x} \ .$$

Vi merker oss også at løsningen ikke tillater x=0, ikke uventet siden ligningen vår er singulær for x=0.

Homogene differensialligninger med konstante koeffisienter

En viktig type homogene diff. ligninger er de som har konstante koeffisienter. Ligningen tar da formen

$$y'' + ay' + by = 0 \ ,$$

der a og b er konstanter. Denne ligningen har alltid en løsning av typen

$$y = e^{\lambda x} \ ,$$

der λ er en konstant som kan være reell eller kompleks. Innsatt i diff. ligningen finnes nå

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \ ,$$

med følgende to løsninger for λ:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4b})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4b}) \ .$$

Hvis $\lambda_1 \neq \lambda_2$ har vi da to lineært uavhengige løsninger, og den generelle løsningen blir

$$y(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}\ .$$

For tilfellet $a^2=4b$ finner vi bare en rot, dvs. $\lambda_1=\lambda_2=-a/2$, og vi har bare en løsning gitt ved

$$y_1(x)=e^{-\frac{a}{2}x}\ .$$

En annen lineært uavhengig løsning finnes da ved hjelp av variasjon av konstanten, dvs.

$$y_2(x)=C(x)y_1(x)=C(x)e^{-\frac{a}{2}x}\ ,$$

og litt enkel regning gir at den enkleste løsningen for C(x) blir C(x)=x. For tilfellet to like røtter $\lambda_1=\lambda_2=-a/2$ er da den generelle løsningen av diff. ligningen

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=e^{-\frac{a}{2}x}(c_1+c_2x)\ .$$

Noen eksempler:

Ligningen $y''+y'-2y=0$,

gir $\lambda_1=1$ og $\lambda_2=-2$, og generell løsning $y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{-2x}$.

Ligningen $y''-2y'+y=0$ gir $\lambda_1=\lambda_2=1$, og generell løsning $y(x)=e^{x}(c_1+c_2x)$.

Ligningen $y''-2y'+10y=0$ gir to komplekse røtter

$\lambda_1=1+3i$ og $\lambda_2=1-3i$, og vi har dermed

$$y_1(x)=e^{x}e^{3ix}=e^{x}(\cos 3x+i\sin 3x)$$

$$y_2(x)=e^{x}e^{-3ix}=e^{x}(\cos 3x-i\sin 3x)\ .$$

Disse løsningene kan vi kombinere til to reelle løsninger:

$$Y_1(x)=\frac{1}{2}[y_1(x)+y_2(x)]=e^{x}\cos 3x$$

$$Y_2(x)=\frac{1}{2i}[y_1(x)-y_2(x)]=e^{x}\sin 3x\ .$$

En generell løsning på reell form er da

$$y(x)=c_1Y_1(x)+c_2Y_2(x)=e^{x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)\ .$$

Med reele verdier for a og b vil vi for komplekse røtter alltid ha at den ene roten er den komplekskonjugerte av den andre, dvs. $\lambda_1=p+iq$ og $\lambda_2=p-iq$. Den reelle løsningen blir

$$y(x)=e^{px}(c_1\cos qx+c_2\sin qx)\ .$$

Homogene differensialligninger med variable koeffisienter

Et viktig eksempel på denne type ligning er Euler-Cauchy ligningen:

$$x^2y''+axy'+by=0\text{, eller på standard form }y''+\frac{a}{x}y'+\frac{b}{x^2}y=0.$$

Merker oss at denne ligningen er singulær i origo, slik at vi ikke kan vente løsning som er gyldig i x=0. Denne ligningen har en løsning av typen

$$y=x^m\ ,$$

der m kan være et reelt eller komplekst tall. Innsatt i ligningen finner vi generelt to mulige verdier for m:

$$m=\frac{1}{2}\left[-a+1\pm\sqrt{(a-1)^2-4b}\;\right].$$

Betegnes de to løsningene m_1 og m_2, og antar vi $m_1 \neq m_2$, blir den generelle løsningen

$$y(x)=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}.$$

Eksempel:

$$x^2y''-\frac{3}{2}xy'-\frac{3}{2}y=0,$$

som gir $m_1=3$ og $m_2=-1/2$, og dermed den generelle løsningen

$$y(x)=c_1x^3+\frac{c_2}{\sqrt{x}}.$$

Som ventet finner vi en løsning som ikke er gyldig i origo. For $x>0$ har vi $\sqrt{x}=\sqrt{|x|}$ og for $x<0$ $\sqrt{x}=i\sqrt{|x|}$, og løsningen bør helst skrives på formen (ny konstant C_2)

$$y(x)=c_1x^3+\frac{C_2}{\sqrt{|x|}},$$

med ulikt sett av konstanter c_1 og C_2 for $x<0$ og $x>0$.

For tilfellet $(a-1)^2<4b$ finner vi komplekse verdier for m_1 og m_2 på formen $m=p+iq$, og $m=p-iq$. Den generelle løsningen blir da

$$y(x)=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}=x^p(c_1e^{iq\ln|x|}+c_2e^{-iq\ln|x|}),$$

der vi har benyttet at $x^{iq}=e^{iq\ln x}$, og videre at $\ln x=\ln|x|+$konstant, der konstanten har ulik verdi for $x<0$ og $x>0$. På reell form kan løsningen skrives

$$y(x)=x^p(A\cos(q\ln|x|)+B\sin(q\ln|x|)),$$

egentlig en ganske komplisert løsning!

Eksempel: $x^2y''+7xy'+13y=0$, sm gir $m_1=-3+2i$, og $m_2=-3-2i$, og generell løsning

$$y(x)=x^{-3}\left[A\cos(2\ln|x|)+B\sin(2\ln|x|)\right].$$

Vi merker oss igjen at løsningen ikke er gyldig for $x=0$, og at det vil være ulike sett konstanter A og B for $x<0$ og $x>0$.

Til slutt har vi også det mulige tilfellet $m_1=m_2=m$ for $(a-1)^2=4b$. Da setter vi $y_1(x)=x^m$, og finner $y_2(x)$ ved variasjon av konstanten, dvs. $y_2(x)=C(x)y_1(x)$. Litt enkel regning gir $C(x)=\ln x$, og den generelle løsningen blir

$$y(x)=x^m(c_1+c_2\ln|x|),$$

når vi igjen har benyttet at $\ln x=\ln|x|+$konstant, og trukket konstanten inn i c_1.

Eksempel: $x^2y''-3xy'+4y=0$. Vi finner $m_1=m_2=2$, dvs.

$$y(x)=x^2(c_1+c_2\ln|x|).$$

Den inhomogene ligningen

Vi går tilbake til den inhomogene diff. ligningen

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x) .$$

Vi merker oss at hvis $y_h(x)$ er en løsning av den homogene ligningen ($R(x)=0$), og $y_p(x)$ en eller annen løsning av den inhomogene (partikulær løsning), så er også

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)$$

en løsning av den inhomogene ligningen. Spørsmålet er da om denne løsningen passer med gitte grenseverdier for $y(x_0)$ og $y'(x_0)$, slik at vi får den ønskede entydige løksningen. Med $y_h(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ får vi betingelsene

$$c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=y(x_0)-y_p(x_0) \text{ , og}$$

$$c_1y'_1(x_0)+c_2y'_2(x_0)=y'(x_0)-y'_p(x_0) .$$

Krav til løsning er som kjent at determinanten til ligningssettet må være ulik null, dvs.

$$W=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

og dette vet vi fra før er ok siden $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er lineært uavhengige. (Hvis høyre-siden i ligningssettet ovenfor skulle være lik null, har vi direkte at $y_p(x)$ er er en løsning som tilfredsstiller kravene, og er dermed den søkte entydige løsningen.) Dermed er problemet formelt løst: Den generelle løsningen av den inhomogene diff. ligningen har formen

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+y_p(x) .$$

Neste problem blir imidlertid å finne en partikulær løsning $y_p(x)$.
Her er det flere metoder som kan brukes. Et vanlig tilfelle er diff. ligninger hvor venstre-siden har konstante koeffisdienter:

$$y''+ay'+by=R(x) .$$

Her kan vi komme langt med lit strategisk "gjetting".

1) $R(x)=Ae^{rx}$, prøv $y_p(x)=Be^{rx}$.
2) $R(x)=A\sin rx+B\cos rx$, prøv $y_p(x)=C\sin rx+D\cos rx$.
3) $R(x)$=polynom av grad N, prøv $y_p(x)$=polynom av grad N.
4) $R(x)=e^x(A\sin rx+B\cos rx)$, prøv $y_p(x)=e^x(C\sin rx+D\cos rx)$.

Eksempel: $y''-2y'+y=Ae^{rx}$. Løsningen av den homogene ligningen er

$$y_h(x)=c_1e^x+c_2xe^x .$$

Vi prøver $y_p(x)=Be^{rx}$, og finner løsningen $B=\dfrac{A}{(r-1)^2}$, og dermed

$y_p(x)=\dfrac{A}{(r-1)^2}e^{rx}$. Hvorfor kan vi ikke ha r=1 i denne løsningen?

Partikulær løsning ved faktorisering

La oss nå se på en noe mer generell medode til å bestemme partikulære løsninger.
Vi prøver med en faktorisering, og skriver $y_p(x)=u(x)v(x)$. Innsatt i diff. ligningen får vi da etter litt enkel regning:

$$v''+v'\left[\frac{2u'}{u}+P(x)\right]+v\frac{u''+P(x)u'+Q(x)u}{u}=\frac{R(x)}{u} \ .$$

Hva skal vi nå med dette? Anta at u(x) er en kjent løsning av den homogene ligningen, f.eks. $u(x)=y_1(x)$. Ligningen ovenfor blir da en enklere diff. ligning i v(x) med formen

$$v''+v'g(x)=h(x) \ , \ \text{ med } \ g(x)=\frac{2u'}{u}+P(x) \ , \ \text{ og } \ h(x)=\frac{R(x)}{u} \ .$$

Dermed har vi en ligning av første orden i v', og setter vi v'=w, har vi følgelig

$$w'+g(x)w=h(x) \ ,$$

og denne ligningen løser vi ved integrerende faktor:

$$\mu(x)=e^{\int g(x)dx} \ , \quad \mu(x)w=\int \mu(x)h(x)dx \ , \ v=\int w dx \ .$$

Her behøver vi ikke ta med integrasjonskonstanter, da vi bare skal finne en (enkel) partikulær løsning.

Eksempel (Eksamen V06):

$x^2y''-3xy'+4y=x^2\ln x$, standardform: $y''-\frac{3}{x}y'+\frac{4}{x^2}=\ln x$.

Venstre-siden er en Euler-Cauchy ligning. Her finner vi $m_1=m_2=2$, og den homogene løsningen er da

$$y_h(x)=c_1x^2+c_2x^2\ln x \ .$$

Vi velger enklest $u(x)=x^2$, og får følgende ligning for v(x):

$$v''+\frac{v'}{x}=\frac{\ln x}{x^2} \ , \ \text{ dvs. } \ g(x)=\frac{1}{x} \ , \ h(x)=\frac{\ln x}{x^2} \ .$$

Integrerende faktor:

$$\mu(x)=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{\ln x}=x \ , \ \mu(x)w=\int\frac{x\ln x}{x^2}dx=\frac{1}{2}(\ln x)^2 \ ,$$

$$w=\frac{(\ln x)^2}{2x} \ , \ \text{ og } \ v=\int w dx=\frac{1}{2}\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\frac{1}{6}(\ln x)^3 \ .$$

Integralene ovenfor finnes ved delvis integrasjon, f.eks.

$$\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx=(\ln x)^3-\int 2\frac{(\ln x)^2}{x}dx \ , \ \text{ og dermed } \ \int\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\frac{1}{3}(\ln x)^3 \ .$$

Vår partikulære løsning er da

$y_p(x)=u(x)v(x)=\frac{1}{6}x^2(\ln x)^3$, og den generelle løsningen:

$$y(x)=c_1x^2+c_2x^2\ln x+\frac{1}{6}x^2(\ln x)^3 \ .$$

For å få løsninger som kan brukes for x<0 må vi benytte lnx=ln|x|+C, og det blir ulike valg av konstantene for x<0 og x>0.

Kjenner vi ingen løsning av den homogene diff. ligningen, kan vi gå frem som følger: Vi forlanger at u(x) skal være en løsning av ligningen

$$\frac{2u'}{u} + P(x) = 0 \ , \ \text{ eller } \ u' + \frac{1}{2}P(x)u = 0 \ ,$$

Som har løsningen $u(x) = Ce^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx}$. Siden u(x) er bestemt på denne måten, må v(x) oppfylle en noe enklere ligning på formen

$$v'' + vf(x) = \frac{R(x)}{u} \ ,$$

der f(x) nå er bestemt ved hjelp av u(x) som vi har funnet. Klarer vi å løse denne enklere ligningen for v(x), har vi så til slutt den partikulære løsningen $y_p(x)=u(x)v(x)$.

Denne fremgangsmåten er ikke minst nyttig hvis vi har problemer med å komme i gang med å finne en løsning for den homogene ligningen.

Eksempel: $y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2-1}{4x^2}y = 0$.

Her er da P(x)=1/x, og vi har

$$u(x) = Ce^{-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}} = Ce^{-\frac{\ln x}{2}} = \frac{C}{\sqrt{x}} \ .$$

Ved innsetting finner vi så f(x)=1/4, og diff. ligningen for v blir enkel, nemlig

$$v'' + \frac{v}{4} = 0 \ , \ \text{ med løsning } \ v(x) = c_1 \sin\frac{x}{2} + c_2 cox\frac{x}{2} \ ,$$

og vi har dermed oppnådd to lineært uavhengige løsninger, slik at den generelle løsningen av vår homogene ligning blir

$$y(x) = u(x)v(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(A\sin\frac{x}{2} + B\cos\frac{x}{2}) \ .$$

Her bør vi også ta med at $\sqrt{x} = \sqrt{|x|}$ for $x > 0$, og $\sqrt{x} = i\sqrt{|x|}$ for $x < 0$, slik at vi på grunn av singulariteten for diff. ligningen i x=0 må operere med ulike løsninger for x<0 og x>0.

Partikulær løsning ved variasjon av konstantene

Vi skal nå se på en annen og ganske generell måte til å finne en partikulær løsning av vår diff. ligning

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \ .$$

Vi antar at vi har en løsning av den homogene ligningen:

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \ .$$

Det viser seg at vi kan finne en partikulær løsning $y_p(x)$ ved å **variere konstantene**:

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \ .$$

Vi setter dette uttrykket for $y_p(x)$ inn i diff. ligningen, og har først

$$y'_p(x) = C'_1(x)y_1(x) + C_1(x)y'_1(x)$$
$$+ C'_2(x)y_2(x) + C_2(x)y'_2(x) \ .$$

Ved å kreve at

(I) $\quad C'_1(x)y_1(x)+C'_2(x)y_2(x)=0$,

unngår vi andre-deriverte for $C_1(x)$ og $C_2(x)$. Videre beregner vi $y''_p(x)$, benytter betingelsen ovenfor, samt at $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er løsninger av den homogene ligningen. Etter noe enkel regning finner vi da

(II) $\quad C'_1(x)y'_1(x)+C'_2(x)y'_2(x)=R(x)$.

Ligningene (I) og (II) ovenfor gir nå to ligninger som bestemmer $C'_1(x)$ og $C'_2(x)$, og løsningene er:

$$C'_1(x)=-\frac{y_2(x)R(x)}{W(x)} \ , \quad C'_2(x)=\frac{y_1(x)R(x)}{W(x)} \ ,$$

som integrert gir resultatet:

$$C_1(x)=-\int\frac{y_2(x)R(x)}{W(x)}dx \ , \quad C_2(x)=\int\frac{y_1(x)R(x)}{W(x)}dx \ .$$

Her er Wronski-determinanten W(x) gitt ved

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} \ ,$$

og vi vet at $W(x)\neq 0$ siden $y_1(x)$ og $y_2(x)$ er lineært uavhengige.
Denne metoden, som også er kjent som Lagranges metode, vil i prinsippet alltid fungere så sant den generelle løsningen av den homogene ligningen er kjent.

Eksempel: $\quad y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$.

Løsningen av den homogene ligningen er
$y_h(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$, dvs. $y_1(x)=\cos x$, $y_2(x)=\sin x$.

Partikulær løsning: $y_p(x)=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x$,

Wronski-determinanten $W(x)=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=1$,

$$C_1(x)=-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=\ln(\cos x)=\ln|\cos x|+\text{konstant} \ ,$$

(konstanten sløyfes , skal bare finne enklest mulig partikulær løsning).

$$C_2(x)=\int dx=x \ ,$$

Partikulær løsning: $y_p(x)=\cos x\ln|\cos x|+x\sin x$,

Og den generelle løsningen av diff. ligningen blir:

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x \ .$$

Annet eksempel (Eksamen V06): $x^2y''-3xy'+4y=x^2\ln x$.

Homogen løsning: $y_h(x)=c_1x^2+c_2x^2\ln x$, $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)=x^2\ln x$.

Wronski-determinanten: $W(x)=x^3$, $C_1(x)=-\frac{1}{3}(\ln x)^3$, $C_2(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

Partikulær løsning: $y_p(x) = -\frac{1}{3}x^2(\ln x)^3 + \frac{1}{2}x^2(\ln x)^3 = \frac{1}{6}x^2(\ln x)^3$.

Generell løsning av diff. ligningen: $y(x) = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x + \frac{1}{6}x^2(\ln x)^3$.

(Her skal egentlig lnx erstattes med ln|x| +konstant).

Greens-funksjoner

Vi skal nå se på en litt annen metode eller tankegang for å løse vår generelle diff. ligning:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x).$$

Først innfører vi en differensialoperator D gitt ved

$$D = \frac{d^2}{dx^2} + P(x)\frac{d}{dx} + Q(x),$$

slik at diff. ligningen kan skrives Dy(x)=R(x) .
Hvis vi nå antar at det finnes en invers operator til D, dvs. D^{-1}, har vi følgende enkle løsning:

$$D^{-1}Dy(x) = y(x) = D^{-1}R(x).$$

En slik invers operasjon finnes, og ikke uventet er en invers operasjon av derivasjon en integraloperasjon. Den inverse operasjonen til D uttrykkes ved den såkalte Greens-funksjonen G(x,x') som følger:

$$y(x) = \int_a^b G(x,x')R(x')dx'.$$

De faste grensene på integralet kan representere grensebetingelser, dette vil bli klart etter hvert. Vi merker oss at G(x,x') inneholder to variable x og x', vi trenger en for å angi argumentet for y, og en (x') som integrasjonsvariabel. Vi ser at den inverse operasjonen D^{-1} er bestemt ved integralet ovenfor. Videre må vi ha a≤x,x'≤b . For å bestemme G(x,x') må vi benytte diff. ligningen:'

$$Dy(x) = D\int_a^b G(x,x')R(x')dx' = \int_a^b [DG(x,x')]R(x')dx' = R(x) ,$$

der vi har benyttet at D bare virker på x, og ikke på x', slik at vi kan utføre derivasjonen under integraltegnet. Ligningen ovenfor bestemmer nå Greens-funksjonen G(x,x'), bortsett fra grensebetingelser. For å løse denne "integralligningen" ovenfor behøver vi en hjelpefunksjon som er kjent som Diracs deltafunksjon δ(x-x'), definert ved:

$$\delta(x-x') = \begin{cases} \text{"uendelig" for } x = x' \\ 0 \qquad \text{for } x \neq x' \end{cases} , \text{ og } \delta(x-x') = \delta(x'-x) .$$

Det er imidlertid en "kontrollert" singularitet ved x=x', siden det også gjelder at

$$\int_a^b \delta(x-x')dx' = 1, \text{ og videre følger da } \int_a^b \delta(x-x')f(x')dx' = f(x),$$

slik at en løsning på integralligningen vår ovenfor er gitt ved

$$DG(x,x') = \delta(x-x'),$$

eller utskrevet:

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x,x')+P(x)\frac{d}{dx}G(x,x')+Q(x)G(x,x')=\delta(x-x') \ .$$

For x≠x' er dette en homogen diff. ligning, den samme som gir den homogene løsningen y_h for vår generelle diff. ligning,

$$y_h(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) .$$

Siden vi i den tilsvarende diff. ligningen for G(x,x') har en singularitet for x=x', må vi ha en løsning for x<x', og en annen for x>x'. Disse to løsningene kan bare være ulike med hensyn på konstantene. Siden diff. ligningen for G(x,x') også inneholder "parameteren" x', vil "konstantene" avhenge av x'. Vi har da de to lølsningene for G(x,x') på formen:

$$G_I(x,x')=A(x')y_1(x)+B(x')y_2(x) , \quad \text{for } \ x<x' , \text{ og}$$
$$G_{II}(x,x')=C(x')y_1(x)+D(x')y_2(x) , \quad \text{for } \ x>x' .$$

Integralet som bestemmer y(x) må nå deles opp i to integraler, et for den integrasjonsvariable x'<x, og et for x'>x:

$$y(x)=\int_a^b G(x,x')R(x')dx'=\int_a^x G_{II}(x,x')R(x')dx'+\int_x^b G_I(x,x')R(x')dx' .$$

Vi har nå imidlertid fått fire "konstanter" A(x'), B(x'), C(x') og D(x') som må bestemmes, og vi må også ta standpunkt til integrasjonsgrensene a og b. La oss først undersøke om vi kan finne noen betingelser som $G_I(x,x')$ og $G_{II}(x,x')$ må oppfylle ved singulariteten x=x'. Vi integrerer hele diff. ligningen for G(x,x') m.h.p. x mellom grensene x'-ε og x'+ε:

$$\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}\frac{d^2}{dx^2}G(x,x')dx+\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}P(x)\frac{d}{dx}G(x,x')dx+\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}Q(x)G(x,x')dx=\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}\delta(x-x')dx=1 .$$

Hvordan skal vi få dette til å stemme? Vi merker oss at ε kan være en vilkårlig liten (positiv) størrelse. Videre vet vi at G(x,x') har en form for singularitet for x=x'. Hvis G(x,x') er diskontinuerlig i x=x', vil den deriverte i x=x' bli ganske uforutsigbar, dvs. ikke eksistere, og enda mindre vil den 2. deriverte finnes. Skal vi ha håp om å få relasjonen ovenfor til å stemme, må vi anta at G(x,x') er kontinuyerlig i x=x', men den kan ha et knekk-punkt, slik at den deriverte har en endelig diskontiniutet. Da har vi for grensen ε→0:

$$\lim(\varepsilon\to 0)\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}Q(x)G(x,x')dx=\lim(\varepsilon\to 0)\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}P(x)\frac{d}{dx}G(x,x')dx=0 ,$$

siden begge integrandene har endelige verdier i et uendelig lite integrasjonsområde. Videre følger da:

$$\lim(\varepsilon\to 0)\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}\frac{d^2}{dx^2}G(x,x')dx=\lim(\varepsilon\to 0)\Big|_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}\frac{d}{dx}G(x,x')=\frac{d}{dx}G_{II}(x,x')\Big|_{x=x'}-\frac{d}{dx}G_I(x,x')\Big|_{x=x'}=1 .$$

Vi har dermed fått to generelle betingelser som knytter sammen $G_I(x,x')$ og $G_{II}(x,x')$ ved x=x', nemlig

$$G_I(x',x') = G_{II}(x',x'),\quad \text{og}$$
$$\frac{d}{dx}G_{II}(x,x')\Big|_{x=x'} - \frac{d}{dx}G_I(x,x')\Big|_{x=x'} = 1.$$

Disse to betingelsene holder nå til å bestemme to av de ukjente "konstantene" A(x'), B(x'), C(x') og D(x'). Skal vi bare finne en partikulær løsning av vår generelle diff. ligning for y(x), dvs $y_p(x)$ som sammen med den antatt kjente homogene løsningen $y_h(x)$ gir den generelle løsningen

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x),$$

har vi betydelige friheter til rådighet! Vi behøver da bare å passe på at de to betingelsene ved x=x' er oppfylt. Går vi tilbake til uttrykkene for $G_I(x,x')$ og $G_{II}(x,x')$ kan vi prøve med B(x')=C(x')=0. Betingelsene ved x=x' gir da de to ligningene for A(x') og D(x'):

$$A(x')y_1(x') - D(x')y_2(x') = 0$$
$$\mathrm{A(x')y'}_1(x') - D(x')y'_2(x') = -1.$$

Løsningene er (Cramers regel)

$$A(x') = -\frac{y_2(x')}{W(x')},\quad D(x') = -\frac{y_1(x')}{W(x')},\quad W = -[y_1(x')y'_2(x') - y'_1(x')y_2(x')] \neq 0 .$$

($W \neq 0$ siden y_1 og y_2 er lineært uavhengige). Den partikulære løsningen blir da gitt ved:

$$y_p(x) = \int_a^x G_{II}(x,x')R(x')dx' + \int_x^b G_I(x,x')R(x')dx'$$
$$= y_2(x)\int_a^x D(x')R(x')dx' - y_1(x)\int_b^x A(x')R(x')dx' .$$

Vi ser til slutt at vi ikke behøver å bry oss om grensene a og b på integralene, de gir bare to konstanter som trekkes inn i konstantene c_1 og c_2 i den homogene delen av løsningen. Ved litt nøyere ettertanke ser vi at den partikulære løsningen vi har funnet nå ved hjelp av Greens-funksjonene er den samme som metoden med variasjon av konstantene ville gi, dvs. $y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$.

Metoden med Green-funksjoner er ofte mest nyttig til å finne den hele entydige løsningen for gitte grensebetingelser for y(x). Enklest blir det med betingelsene y(a)=y(b)=0. Dette er relativt vanlige grensebetingelser i fysikkproblemer. Disse betingelsene oppfylles for

$$G_I(a,x') = G_{II}(b,x') = 0 .$$

Sammen med de to betingelsene ved x=x' har vi da fire betingelser som entydig bestemmer de fire ukjente A(x'), B(x'), C(x') og D(x'). Dermed får vi også en entydig løsning av diff. ligningen som passer med de gitte betingelsene.

Eksempel: $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Den homogene løsningen er $y_h(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$. Greens-funksjonene er da

$$G_I(x,x') = A(x')\sin x + B(x')\cos x \ , \quad x < x'$$
$$G_{II}(x,x') = C(x')\sin x + D(x')\cos x \ , \ x > x' \ .$$
Videre har vi de gitte betingelsene y(0)=y(π/2)=0, dvs. a=0 og b=π/2.
Disse betingelsene gir $G_I(0,x')=G_{II}(\pi/2,x')=0$, som direkte gir
$$B(x')=C(x')=0 \ .$$
Betingelsene ved x=x' gir videre de to ligningene for A(x') og D(x'):
$$A(x')\sin x' - D(x')\cos x' = 0$$
$$A(x')\cos x' + D(x')\sin x' = -1 \ ,$$
med løsningene A(x')=-cosx' og D(x')=-sinx' . Løsningen blir da

$$y(x) = -\cos x \int_0^x \sin x' \frac{1}{\sin x'} dx' - \sin x \int_x^{\pi/2} \cos x' \frac{1}{\sin x'} dx'$$
$$= -x\cos x + \sin x \ln(\sin x) \ .$$
Vi ser at løsningen som ventet ikke er gyldig for sinx=0. For sinx<0 må vi sette ln|sinx| +C der C er en konstant inn i løsningen. Dette gir et ekstra ledd Csinx, som ikke har noen betydning siden det er en løsning av den homogene ligningen.

Løsnig ved rekkeutvikling. Fröbenius-metoden

Problemet er nå å løse "vanskelige" homogene diff.ligninger av typen:
$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \ .$$
Vi prøver å finne en løsning i form av en rekke:
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} \quad , \quad a_0 \neq 0 \ .$$
Her er s et tall som kan være reelt eller komplekst, men normalt vil s være et helt tall. Under visse forutsetninger vil det alltid være mulig å finne en løsning i form av en slik rekke. Vi skriver differensialligningen på formen
$$y'' + \frac{\phi(x)}{x} y' + \frac{\psi(x)}{x^2} y = 0 \ ,$$
og antar at φ(x) og ψ(x) er funksjoner som er analytiske i origo. P(x)=ϕ(x)/x og $Q(x)=\psi(x)/x^2$ er da singulære for x=0, men på en spesiell måte, og vi sier at vi har et **regulært singulært punkt i origo.**
Siden φ(x) og ψ(x) er analytiske i origo, har de Taylorrekker av formen:
$$\phi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \ , \quad \psi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \ .$$
Innsatt i diff. ligningen på formen $x^2 y'' + x\phi(x)y' + \psi(x)y = 0$,
får vi etter en liten omforming av leddene:
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)(n+s-1)x^{n+s} + \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n [b_m (n+s) + c_m] x^{n+m+s} = 0 \ .$$
For laveste potens av x, dvs. n=m=0 får vi
$$a_0 s(s-1) + a_0(b_0 s + c_0) = 0 \ , \ a_0 \neq 0 \ .$$

Videre merker vi oss at $b_0 = \phi(0)$ og $c_0 = \psi(0)$, kjente størrelser fra diff. ligningen. Vi har da den grunnleggende ligningen som bestemmer de mulige verdiene for s:

$$s(s-1) + s\phi(0) + \psi(0) = 0 \ .$$

Denne ligningen er også kjent som indeksligningen. Vi ser at hvis singulariteten i origo er mer "alvorlig" enn et regulært singulært punkt, vil ikke både $\varphi(0)$ 0g $\psi(0)$ ha endelige verdier, og vi vil ikke finne noen verdi for s. Det finnes da ingen løsning av diff.ligningen i form av en slik rekke. På den annen side er det også klart at hvis singulariteten i origo er regulær, så har $\varphi(0)$ og $\psi(0)$ endelige verdier, og vi finner s-verdier som passer, dvs. en løsning. Hvis diff. ligningen ikke har noen singularitet i origo finner vi $\varphi(0)=0$ og $\psi(0)=0$, og løsningene av indeksligningen blir $s_1=1$ og $s_2=0$.

Når det gjelder mulige løsninger av indeksligningen skjelner vi mellom tre muligheter:

1) To løsninger s_1 og s_2 slik at s_1-$s_2 \neq$ helt tall. Da finner vi to rekker av typen

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s_1} \ , \ \text{og} \quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n x^{n+s_2} \ .$$

   Disse to rekkene gir oss to lineært uavhengie løsninger av diff. ligningen, og vi har den generelle løsningen.

2) To ulike løsninger s_1 og s_2 slik at $s_1 - s_2 =$ helt tall. Da er det ikke sikkert at de to rekkene for s_1 og s_2 gir to lineært uavhengige løsninger. En nøyere undersøkelse vil vise at hvis $s_1>s_2$ så gir s_1 alltid en løsning. **Imidlertid viser det seg ofte at s_2 gir en komplett løsning**. Dog finnes muligheten i dette tilfelle at s_2 ikke gir noen løsning i det hele tatt. Finnes bare en løsning $y_1(x)$, må en annen bestemmes av $y_2(x)=C(x)y_1(x)$.

3) To like løsninger $s_1=s_2=s$. Da finner vi bare en løsning i form av en rekke

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} \ ,$$

   og en annen $y_2(x)$ må finnes av $y_2(x)=C(x)y_1(x)$.

Punktene 1)-3) ovenfor gir en kortversjon av det såkalte Fuchs teorem. Innenfor pensum i FYS3140/4140 skal vi holde oss til tilfelle 2).

Eksempel: $\quad y'' - xy' + y = 0$.

Denne ligningen har ingen singularitet i origo, følgelig finner vi de to s-verdiene $s_1=1$ og $s_2=0$. Rekken innsatt i ligningen gir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)(n+s-1) x^{n+s-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s) x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+s} = 0 \ .$$

I de to siste summene setter vi n+s=n'+s-2, eller n=n'-2, n'=2,3,4,··· , og får når vi skifter summasjonsvariabel fra n' til n igjen i de to siste summene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+s)(n+s-1) x^{n+s-2} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} (n-3+s) x^{n+s-2} = 0 \ .$$

Her har vi to spesialtilfeller, nemlig n=0 og n=1, hvor det er bidrag bare fra den første summen.

$$n=0: \quad a_0 s(s-1) = 0 \ ,$$

dvs. indeksligningen, som gir s_1=1, og s_2=0, som vi visste allerede.

$$n=1: \quad a_1(s+1)s=0 \ ,$$

som viser at for s=s_2=0 er a_1 ubestemt, mens s=s_1=1 forlanger a_1=0.

$$n \geq 2: \quad a_n = a_{n-2}\frac{n+s-3}{(n+s)(n+s-1)} \ .$$

For s=1 som forlanger a_1=0, ser vi at alle a_n så nær som a_0 blir lik null, og vi får den enkle løsningen $y(x)=a_0 x$. Dermed har vi, som forutsagt av Fuchs teorem, funnet en (og bare en) løsning for den største s-verdien.

For s=0 hvor både a_0 og a_1 er ubestemte, får vi

$$a_n = a_{n-2}\frac{n-3}{n(n-1)} \ , \quad n \geq 2 \ .$$

Dette viser at a_n=0 for alle odde n>1, mens vi får en uendelig rekke for like n, a_n=f(n)a_0, der f(n) er bestemt av relasjonen ovenfor. Løsningen blir da

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0,2,4,\cdots}^{\infty} f(n)x^n + a_1 x \ ,$$

altså en komplett løsning med to ubestemte konstanter.