KORT INTRODUKSJON TIL TENSORER

Tensorer har vi allerede møtt i form av skalarer (tall) og vektorer. En skalar kan betraktes som en tensor av rang null (en komponent), mens en vektor er en tensor av rang 1 (tre komponenter). Tensorer kan vi oppfatte som en videreføring av skalarer og vektorer til størrelser med mer enn tre komponenter. For at en størrelse skal være en tensor må komponentene oppfylle visse krav. Disse kravene er i fysikken knyttet til at grunnleggende fysiske lover skal være uavhengig av valg av koordinatsystem. Et enkelt eksempel er Newtons 2. lov: $\vec{F} = m\vec{a}$ som i et annet (inertial) system tar formen $\overrightarrow{F'} = m'\overrightarrow{a'}$. Ser vi bort fra relativistiske effekter er m=m' , dvs. en skalar (tensor av rang 0), mens kraften og akselerasjonen har ulike komponenter i de to systemene. $\vec{F}$ og $\vec{a}$ er vektorer, eller som vi skal se, tensorer av rang 1.

Et annet og mer realistisk eksempel er Ohms lov på en mer generell form:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \quad , \qquad (1)$$

der $\vec{E}$ er et pålagt ytre elektrisk felt, $\vec{j}$ er strømmen, mens σ er konduktiviteten. I et annet koordinatsystem tar Ohms lov formen $\overrightarrow{j'} = \sigma'\overrightarrow{E'}$, men nå er det vanligvis ikke slik at σ'=σ, sammenhengen her er mer komplisert, det elektriske feltet og strømmen går normalt ikke i samme retning, og σ' og σ blir 3×3 matriser. Utskrevet på komponentform blir (1):

$$\begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} . \qquad (2)$$

For en komponent har vi $j_k = \sum_{l=1}^{3} \sigma_{kl}\, E_l = \sigma_{kl} E_l$, når vi slik som konvensjonen er for tensorer, har sløyfet summasjonstegnet, dvs. det skal automatisk summeres over to like indekser.

Det interessante er nå om vi kan finne et koordinatsystem med en konduktivitet σ' som er en diagonal matrise. Ohms lov i dette systemet tar da den enkle formen for hver komponent:

$$j'_k = \sigma'_{kk} E'_k \quad \text{(ingen summasjon).}$$

Det finnes mange andre fysiske lover som har samme form som (1), f. eks. magnetisk susceptibilitet $\vec{M} = c\vec{H}$, og elektrisk polariserbarhet $\vec{d} = \alpha\vec{E}$.

Begrepet tensor er altså grunnleggende knyttet til transformasjoner mellom ulike koordinatsystemer. Vi antar nå at vi har to koordinatsystemer med tilhørende sett av ortogonale enhetsvektorer $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ og $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ som er rotert i forhold til hverandre om et felles origo (tegn figur!). Disse enhetsvektorene er knyttet sammen via de såkalte retningskosinene, dvs. via S-matrisen, slik at vi har

$$\vec{e}_j' = S_{ij}\vec{e}_i \quad \text{(husk sum over i).} \tag{3}$$

En vilkårlig vektor $\vec{x}$ kan da dekomponeres i de to systemene:

$$\vec{x} = x_i\vec{e}_i = x_i'\vec{e}_i' \quad \text{(husk sum!)} \tag{4}$$

En enkel regning gir så videre når vi husker på at S-matrisen er ortogonal, dvs. $S_{ij}^{-1} = S_{ji}$:

$$x_i = S_{ij}x_j' \ , \quad x_j' = S_{ij}x_i \tag{5}$$

Generelt sier vi nå at en størrelse med tre komponenter $\{V_1, V_2, V_3\}$ som transformerer på samme måte som komponentene av $\vec{x}$, dvs. etter S-matrisen som i (5) ovenfor, er en Cartesisk tensor av rang 1 (sier også Cartesisk tensor av 1. orden).

Læreboken benytter en a-matrise som er den transponerte av S-matrisen, dvs. $a_{ji} = S_{ij}$, og vi har da generelt for en tensor av rang 1 :

$$V_i = S_{ij}V_j' = a_{ji}V_j' \ , \quad \text{eller invertert:} \tag{6}$$

$$V_i' = a_{ij}V_j \ . \tag{7}$$

Ligning (7) ovenfor er viktig, vi skal se at den også gir oss transformasjonene for tensorer av rang høyere enn 1.

La oss videre se på det direkte produktet $\{V_k U_l\}$ av komponentene av to vektorer $\vec{V}$ og $\vec{U}$. Denne direkte-produktmengden har 9 elementer. Videre har vi

$$V_k'U_l' = (a_{ki}V_i)(a_{lj}U_j) = a_{ki}a_{lj}V_iU_j \ . \tag{9}$$

Vi definerer nå en størrelse med 9 komponenter som transformerer på samme måte som de 9 elementene i direkte produktmengden ovenfor som en Cartesisk tensor av rang 2. Vi betegner generelt elementene i en slik tensor med symbolene T_{kl} , og har da:

$$T_{kl}' = a_{ki}a_{lj}T_{ij} \ . \tag{10}$$

La oss nå gå tilbake til en mer generell relasjon av typen Ohms lov i (1), og skrive den

$$\vec{y} = \sigma\vec{D} \ , \tag{11}$$

der $\overline{y}$ og $\vec{D}$ er vektorer, og σ er en 3×3 matrise. I et annet (merket) koordinatsystem får (11) tilsvarende formen $\vec{y}' = \sigma'\vec{D}'$, og ved å benytte (7) samt at a-matrisen er ortogonal, finner vi den viktige relasjonen

$$\sigma' = a\sigma a^{-1} \ . \tag{12}$$

Av relasjonen (12) ovenfor følger nå at σ transformerer som T_{kl}' i ligning (10), dvs. σ er en Cartesisk tensor av rang 2. Vi har

$$\sigma'_{kl} = a_{ki}\sigma_{ij}a^{-1}_{jl} = a_{ki}a_{lj}\sigma_{ij} \, . \tag{13}$$

Som nevnt tidligere ser vi at fysiske lover av typen (11) får en spesielt enkel form i et koordinatsystem der σ' er en diagonal matrise. Fra teorien for diagonalisering av matriser vet vi at en symmetrisk matrise kan diagonaliseres ved hjelp an en ortogonal matrise, slik som i ligning (12). Fysiske lover av typen (11) er ofte slik at σ er en symmetrisk matrise, dvs. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Et klassisk eksempel er den såkalte treghetstensoren. Fra klassisk mekanikk vet vi at et stivt legeme som roterer om en fast akse med vinkelhastighet ω har en kinetisk energi T gitt ved $T = \frac{1}{2}I\omega^2$, og et banespinn L gitt ved $L = I\omega$, der I er legemets treghetsmoment. For et stivt legeme som roterer fritt om et punkt (dvs. massesenteret CM) er den tilsvarende relasjonen for banespinnet

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \, , \tag{14}$$

der I er en symmetrisk 3×3 matrise (for definisjon av I, se f. eks. Goldstein, klassisk mekanikk). I refererer til et koordinatsystem som er fast i forhold til legemet. Siden I er symmetrisk er det da klart at det er mulig å finne et annet koordinatsystem fast i legemet med en diagonal treghetstensor I' slik at relasjonen (14) blir mye enklere. Den kinetiske energien T for bevegelsen av det stive legemet kan da skrives (se f. eks. Goldstein)

$$T = T_{CM} + \frac{1}{2}I'_{11}(\omega'_1)^2 + \frac{1}{2}I'_{22}(\omega'_2)^2 + \frac{1}{2}I'_{33}(\omega'_3)^2 \, ,$$

der $T_{CM} = \frac{1}{2}Mv^2_{CM}$ er den kinetiske energien for bevegelsen av massesenteret. M er legemets masse, og v_{CM} er massesenterets hastighet. Koordinatsystemet hvor treghetstensoren er diagonal angir de såkalte hovedtreghetsaksene. Hvis legemet har symmetriakser, vil hovedtreghetsaksene falle langs disse.

Differensialoperatorer som tensorer. Konservative krefter kan avledes av et potensial W:

$$\vec{F} = -\nabla W = -\frac{\partial W}{\partial x_1}\vec{e}_1 - \frac{\partial W}{\partial x_2}\vec{e}_2 - \frac{\partial W}{\partial x_3}\vec{e}_3 \, .$$

De deriverte i uttrykket ovenfor opptrer nå som komponenter av en vektor, og vi må vente at de transformerer som en tensor av rang 1. Vi prøver kjerneregelen:

$$\frac{\partial W}{\partial x'_i} = \frac{\partial W}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = a_{ij}\frac{\partial W}{\partial x_j} \, , \tag{15}$$

når vi benytter ligning (5) , dvs. $x_j = a_{ij}x'_i$. Dermed har vi vist at settet av differensialoperatorer $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ transformerer som en vektor. Da vet vi også at en direkte produktmengde $\left\{\frac{\partial W}{\partial x_k}\frac{\partial W}{\partial x_l}\right\}$ transformerer som en tensor av rang 2, etter ligningene (9) og (10).

Skalarprodukt av to vektorer. Gitt to vektorer $\vec{U}$ og $\vec{V}$. Skalarproduktet er definert ved:

$$\vec{U}' \cdot \vec{V}' = U_i' V_i' = (a_{ik} U_k)(a_{il} V_l) = a_{ki}^{-1} a_{il} U_k V_l = \delta_{kl} U_k V_l = \vec{U} \cdot \vec{V} ,$$

og vi ser at skalarproduktet er invariant ved en koordinattransformasjon, og kan betraktes som en tensor av rang 0. Av dette er det klart at den kinetiske energien $\frac{1}{2} m \vec{v}^2$ for en partikkel er uavhengig av orienteringen på koordinataksene, og dette gjelder også i kvantemekanikken hvor den kinetiske energien uttrykkes ved differensialoperatorene, som vi har vist transformerer som komponentene av en vektor.

Kryssprodukt av to vektorer. Av to vektorer $\vec{U}$ og $\vec{V}$ kan vi danne en ny vektor ved hjelp av kryssproduktet $\vec{U} \times \vec{V}$. Vi må da definere komponentene av kryssproduktet slik at de transformerer som en vektor, dvs. etter ligningene (6) og (7). Determinantregelen for beregning av komponentene ordner dette. Prøv å vise ved direkte utregning ved hjelp av determinantregelen at vi har

$$\left(\vec{U}' \times \vec{V}'\right)_k = a_{ki} \left(\vec{U} \times \vec{V}\right)_i .$$

To enkle, men viktige tensorer. Kronecker-delta:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} .$$

Levi-Civita symbolet:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i, j, k \text{ } like \text{ } antall \text{ } permutasjoner \text{ } av \text{ } 1,2,3 \\ -1 & i, j, k \text{ } odde \text{ } antall \text{ } permutasjoner \text{ } av \text{ } 1,2,3 \\ 0 & to \text{ } eller \text{ } flere \text{ } indekser \text{ } like \end{cases}$$

Det er ganske rett frem ved hjelp av ligning (6) å vise at δ_{ij} er en tensor av rang 2. Vi må da vise at $\delta_{ij}' = \delta_{ij}$, siden Kronecker-delta er den samme i alle koordinatsystemer. På samme måte kan det vises at Levi-Civita symbolet er en tensor av rang 3:

$$\epsilon'_{klm} = a_{ki} a_{lj} a_{mn} \epsilon_{ijn} = \epsilon_{klm} , \qquad (16)$$

siden Levi-Civita symbolet også er det samme i alle koordinatsystemer. Å vise (16) er noe mer komplisert, se læreboka ligning 5.6. Det finnes videre en nyttig summasjonsregel for Levi-Civita symboler (se læreboka):

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} . \qquad (17)$$

Kronecker-delta og Levi-Civita symbolet er viktige hjelpestørrelser i vektorregningen. Kryssprodukt kan enkelt uttrykkes ved

$$\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C} \quad , \quad \text{på komponentform} \; A_i = \epsilon_{ijk} B_j C_k \qquad \text{(Vis!)} \tag{18}$$

$$\left(\nabla \times \vec{V}\right)_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \tag{19}$$

$$\left[\nabla \times \left(\nabla \times \vec{V}\right)\right]_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nabla \times \vec{V}\right)_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon_{kpq} \frac{\partial}{\partial x_p} V_q$$

$$= \epsilon_{ijk} \epsilon_{kpq} \frac{\partial^2 V_q}{\partial x_j \partial x_p} = \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} \, . \tag{20}$$

For å utlede ligning (20) ovenfor er summe-relasjonen i (17) benyttet.

Ekstra for kvantemekanikere:

Kommuteringsreglene for komponentene J_k av angulære momenter (banespinn og egenspinn) kan skrives

$$[J_k, J_l] = i\hbar \epsilon_{klm} J_m \, .$$

Generelt gjelder for komponentene av en vektor $\vec{A}$:

$$[J_k, A_l] = i\hbar \epsilon_{klm} A_m \, ,$$

og kommuteringsregelen ovenfor benyttes av noen som definisjon av en vektor. Den er litt komplisert å vise ut fra vanlige definisjoner av en vektor.

For systemer hvor angulære momenter er et nyttig begrep, dvs. atomer, molekyler, kjerner og elementær-partikler benyttes en spesiell type tensorer, såkalte sfæriske tensorer som angis ved symbolet $T_\mu^{(\omega)}$. Disse tensorene har rang ω, komponentene angis ved μ, og antall komponenter er $2\omega + 1, \mu \in [-\omega, \omega]$, analogt til antall verdier for z-komponenten av et angulært moment ω. Komponentene av en vektor $\vec{A}$ ordnes til sfæriske komponenter av en tensor med rang ω=1 på følgende måte:

$$T_{\pm 1}^{(1)}(A) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A_x \pm i A_y\right) , \quad T_0^{(1)}(A) = A_z \, .$$

Her kjenner vi igjen de nyttige heve- og senke operatorene som komponenter av en sfærisk tensor.

Til direkte produktmengden $\{A_k B_l\}$ av komponentene for vektorene $\vec{A}$ og $\vec{B}$ kan det tilordnes tre sfæriske tensorer av rang 0, 1 og 2. Skalarproduktet: $T_0^{(0)}(AB) = \vec{A} \cdot \vec{B}$, de sfæriske komponentene μ av kryssproduktet, dvs. $T_\mu^{(1)} = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)_\mu$, samt en litt mer komplisert sfærisk tensor av rang 2 med fem komponenter, de såkalte kvadrupolmomentene.