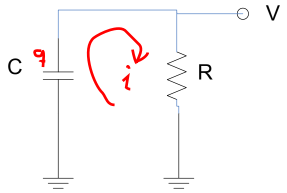
FYS3230 Løsningsforslag 1 2013

Første ordens systemer

1) Velger strøm og ladning som vist under.



Sammenhengen mellom strøm og ladning blir da:

$$i = -\frac{dq}{dt} \qquad (1)$$

Spenningen ut er både spenningen over kondensatoren og spenningen over motstanden, dvs:

$$\begin{aligned} V(t) &= R \cdot i(t) = \frac{q(t)}{C} \Rightarrow \\ \frac{dq(t)}{dt} &= -\frac{1}{RC} q(t) \end{aligned} \qquad (2)$$

For å løse likningen gjetter vi på en løsning av formen:

$$q(t) = K_0 + K_1 e^{st} \qquad (3)$$

og setter dette inn i **(2)**:

$$K_1 \cdot s \cdot e^{st} = -\frac{1}{RC} K_0 - \frac{1}{RC} K_1 e^{st} \qquad (4)$$

Denne likningen skal gjelde for alle tider, det vil si for alle verdier av t. Når $s \cdot t \to -\infty$ blir eksponentialfunksjonene på begge sider av likhetstegnet null. Vi ser da at $K_0 = 0$, slik at vi står igjen med:

$$K_1 \cdot s \cdot e^{st} = -\frac{1}{RC} K_1 e^{st} \Rightarrow s = \frac{-1}{RC} \qquad (5)$$

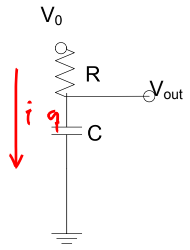
For å finne K_1 må vi bruke initialbetingelsen, som var at $V(0) = V_0$, men først må vi gå fra ladning til spenning:

$$\begin{aligned} V(0) &= \frac{q(0)}{C} = \frac{K_1 e^0}{C} = V_0 \Rightarrow \\ K_1 &= C \cdot V_o \end{aligned} \qquad (6)$$

Det vil si at

$$V(t) = \frac{1}{C} q(t) = \underline{\underline{V_0 e^{-\frac{t}{RC}}}} \qquad (7)$$

2) Med strøm og ladning som definert under:



får vi sammenhengen mellom strøm og ladning til å bli:

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (8)$$

Spenningen V_0 er summen av spenningen over motstanden og kondensatoren, dvs:

$$V_0 = R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} \qquad (9)$$

Igjen antar vi at løsningen er av formen **(3)** og setter inn, da får vi:

$$V_0 = R \cdot K_1 \cdot s \cdot e^{st} + \frac{K_0}{C} + \frac{K_1}{C}e^{st} \qquad (10)$$

Igjen kan vi sette inn s·t→-∞. Da ser vi at:

$$K_0 = V_0 C$$
$$s = -\frac{1}{RC} \qquad (11)$$

For å finne K_1 må vi bruke initialbetingelsen om at kondensatoren er tom ved t=0, dvs:

$$q(0) = 0 = V_0 C + K_1 e^0 \Rightarrow$$
$$K_1 = -V_0 C \qquad (12)$$

Vi setter vi dette inn **(3)** og videre inn i formelen for spenning over kondensatoren og får:

$$q(t) = V_0 C - V_0 C e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow$$
$$\underline{\underline{V(t) = V_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}} \qquad (13)$$

3) Sammenhengen mellom fart og akselerasjon er som kjent:

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad (14)$$

Setter vi dette inn i Newtons 2. lov sammen med formelen for bremsekraften finner vi:

$$F = -\gamma v = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow$$
$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{m}v(t) \qquad \textbf{(15)}$$

Vi antar igjen at løsningen er på formen **(3)** (men nå er det v(t), ikke q(t) som har denne formen), og setter inn i **(15)**:

$$K_1 s \cdot e^{st} = -\frac{\gamma}{m}K_0 - \frac{\gamma}{m}K_1 \cdot e^{st} \qquad \textbf{(16)}$$

Igjen kan vi tenke at likningen skal gjelde når s·t→-∞, og ser at K_0 må være 0 samt at:

$$s = -\frac{\gamma}{m} \qquad \textbf{(17)}$$

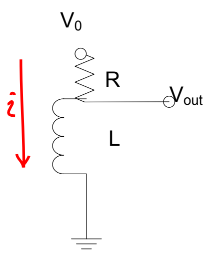
Igjen må K_1 bestemmes av initialbetingelsen:

$$v(0) = K_1 e^0 = v_0 \Rightarrow$$
$$K_1 = v_0 \qquad \textbf{(18)}$$

Altså blir løsningen:

$$\underline{\underline{v(t) = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t}}} \qquad \textbf{(19)}$$

4) Velger strøm som:



Siden spenningen over spolen er proporsjonal med den deriverte av strømmen gjennom spolen får vi:

$$V_0 = R \cdot i(t) + L\frac{di}{dt} \qquad \textbf{(20)}$$

Setter igjen inn en antakelse av typen **(3)**, men denne gangen for strømmen *i* i stedet for ladningen q.

$$V_0 = R(K_0 + K_1 e^{st}) + L \cdot K_1 \cdot s \cdot e^{st} \qquad \textbf{(21)}$$

Ved å se på hva som skjer når s·t→-∞ "ser vi at":

$$K_0 = \frac{V_0}{R}$$
$$s = -\frac{R}{L} \qquad (22)$$

For å finne K_1 må vi sette inn i initialbetingelsen som var at strømmen var null ved t=0. Dvs:

$$i(0) = \frac{V_0}{R} + K_1 e^0 = 0 \Rightarrow$$
$$K_1 = -\frac{V_0}{R} \qquad (23)$$

Løsningen blir derfor:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \Rightarrow$$
$$V(t) = L\frac{d\,i(t)}{dt} = \underline{\underline{V_0 e^{-\frac{R}{L}t}}} \qquad (24)$$

5.

a) Fra databladet ser vi at det mins signifikante bit'et typisk representerer et tidsitervall på 50 ps (ps = 10^{-12}s).

b) Vi vil få samme utladningsforløp som i **(7)**. Det vil si at tiden det tar før kondensatoren er ladet ut fra 1V til 0.01 V finnes fra:

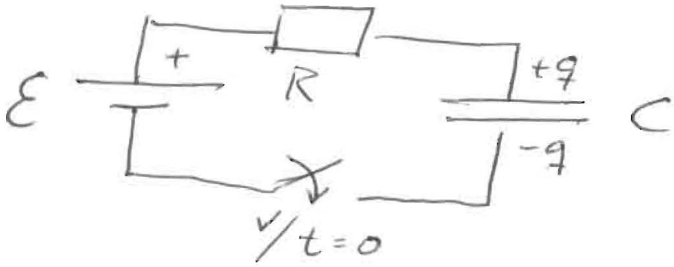
$$V(t_{UL}) = 1V\, e^{-\frac{t_{UL}}{RC}} = 0.01V \Rightarrow$$
$$e^{-\frac{t_{UL}}{RC}} = 0.01 \Rightarrow \qquad (25)$$
$$t_{UL} = \underline{\underline{-RC\ln(0.01)}} \approx 4.6RC$$

Vi ser at utladningstiden avhenger lineært med kapasitansen.

c) For å endre utladningstiden med t_{LSB} må vi endre kapasitansen slik at:

$$C_{LSB}\frac{dt_{UL}}{dC} = t_{LSB} \Rightarrow$$
$$C_{LSB} = \underline{\underline{\frac{t_{LSB}}{-R\ln(0.01)}}} \approx \frac{t_{LSB}}{4.6\,R} \qquad (26)$$

Eksempel på løsning av RC-krets ved integrering:



Husk:

$I = \frac{dq}{dt}$, $V = \frac{q}{C}$

Kirchhoff #2: $\mathcal{E} - R \cdot I - \frac{q}{C} = 0$

$I = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} - R \cdot \frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \quad \Big| \cdot C$

$\mathcal{E}C - RC\frac{dq}{dt} - q = 0 \Rightarrow \mathcal{E}C - q = RC\frac{dq}{dt}$

$\frac{dq}{q - \mathcal{E}C} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \int_0^q \frac{dq}{q - \mathcal{E}C} = -\int_0^t \frac{dt}{RC}$

Løsning: $\ln \frac{q - \mathcal{E}C}{-\mathcal{E}C} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow q = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-t/RC}\right)$

Strøm $I = \frac{dq}{dt} = -\mathcal{E}C e^{-t/RC} \cdot -\frac{1}{RC} = \underline{\underline{\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}}}$