

FYS 4110/9110 Moderne kvantemekanikk

Midtermineksamen, høsten 2015

Innlevering

Oppgavesettet er tilgjengelig fra mandag morgen, 19. oktober.

Skriftlige eller trykte løsninger leveres til ekspedisjonskontoret i fysikkbygningen før mandag 26. oktober kl.12:00.

Bruk kandidatnummer på besvarelsen, ikke navn.

Språk

Besvarelsene kan skrives på norsk eller engelsk, etter eget ønske.

Note: The problem set is available also in English.

Spørsmål til oppgavene

Spørsmål kan rettes til Jon Magne Leinaas (rom 471Ø), eller til Ola Liabøtrø (rom 469Ø).

Oppgavesettet består av 2 oppgaver skrevet på 4 sider.

PROBLEMS

1 Et tre-spinnproblem

Vi studerer et system som består av tre elektroner. De har alle faste posisjoner, mens spinnene til de tre er frie variable.

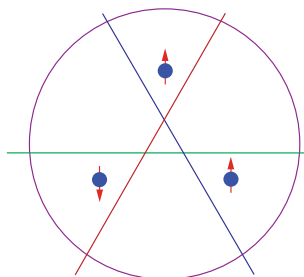


Figure 1: Tre-spinnssystemet. Hver av de tre rette linjene viser en oppdeling av systemet i to deler, hvor en av delene inneholder ett spinn og den andre delen inneholder to spinn.

a) Det samlede spinnet uttrykkes vi som $\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \hat{S}_3$. Bruk regelen for sammensetning av spinn til å vise at (spinn-) Hilbertrommet består av tre ortogonale underrom, karakterisert ved spinnverdiene $s = 1/2, 1/2$ and $3/2$, hvor $\hat{S}^2 = s(s+1)\hbar^2$.

b) Vi studerer følgende tre spinnstilstander

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|udd\rangle + e^{2\pi i n/3}|dud\rangle + e^{-2\pi i n/3}|ddu\rangle), \quad n = 0, \pm 1 \quad (1)$$

der $|u\rangle$ svarer til spinn-opp langs z -aksen og $|v\rangle$ svarer til spinn-ned langs den samme aksene. Vi benytter notasjonen $|udd\rangle = |u\rangle \otimes |d\rangle \otimes |d\rangle$, hvor første faktor i tensorproduktet svarer til partikkel 1,

den andre til partikkel 2 og den tredje til partikkel 3. Vis at vektorene (1) er ortogonale og at de alle har veldefinerte verdier for de totale spinnoperatorene \mathbf{S}^2 og S_z . Bestem disse verdiene.

c) Tre-spinnssystemet kan betraktes som et todelt system, der partikkel 1 definerer det ene delsystemet og partikkel 2 og 3 definerer det andre delsystemet. Vi betegner denne inndelingen av systemet symbolsk som $123 = 1 + (23)$. Med denne todelingen av systemet hva er sammenfiltringsentropien til systemet i de tre tilfellene $n = 0, \pm 1$? Sammenlign verdien med det som er den største mulige sammenfiltringsentropien i det todelt systemet. Med de to andre inndelingene, $123 = 2 + (13)$ og $123 = 3 + (12)$, er det noen forskjell på sammenfiltringen?

d) En måling av den observable \hat{S}_{1z} blir utført på partikkel 1, med systemet i en av tilstandene $|\psi_n\rangle$. Hvis resultatet blir *spinn-opp*, hva blir sammenfiltringen, mellom 2 og 3, i delsystemet (23) etter at målingen er utført? Hvis resultatet i stedet blir *spinn-ned* hva blir da sammenfiltringen?

e) Anta nå at tilstanden til tre-spinnssystemet er

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|uuu\rangle - |ddd\rangle) \quad (2)$$

Bestem i dette tilfellet hva sammenfiltringsentropien er med hensyn på de todelingene av systemet som er definert i c), og sammenlign med de verdiene som tidligere er funnet for tilstandene $|\psi\rangle_n$.

Vi innfører nå tilstandsvektorer for spinn-opp og spinn-ned langs x -aksen ved

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\rangle + |d\rangle), \quad |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\rangle - |d\rangle) \quad (3)$$

og for spinn-opp og for spinn-ned langs y -aksen ved

$$|r\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\rangle + i|d\rangle), \quad |l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\rangle - i|d\rangle) \quad (4)$$

f) Omskriv uttrykket for tilstandsvektoren (2) på to ulike måter, først ved å anvende spinnbasis (3) for alle tre spinnene og i neste omgang ved å anvende spinnbasis (4) for spinn 1 og 2 og basis (3) for spinn 3. Bruk uttrykkene til å vise at alle de tre spinnkomponentene til partikkel 1, S_{1x} , S_{1y} and S_{1z} , kan bestemmes ved å utføre spinnmålinger på partikkel 2 og 3, *uten å gjøre noen måling* på partikkel 1. Angi hvilke målinger som i de tre tilfellene bør utføres på partiklene 2 og 3.

2 Sammenfiltrering og Bell-ulikheter

Vi studerer en eksperimentell situasjon som ligner den i kompendiet, hvor par av spinn-1/2 partikler i utgangspunktet settes i en korrelert spinnstilstand, for deretter å sendes i motsatte retninger mens spinnstilstanden forblir uendret. Når de befinner seg i god avstand fra hverandre blir det foretatt spinnmålinger på partiklene i hvert korrelert par, og resultatene blir registrert og sammenlignet.

Situasjonen er illustrert i figuren, der en serie med sammenfiltrede par blir skapt i kilden K , og hvor måling av spinnenes z -komponenter blir utført på begge partiklene (A og B). Når spinnenes z -komponenter er strengt antikorrelerte vil resultatet *spinn opp* (*spinn ned*) for partikkel A alltid opptre sammen med resultatet *spinn ned* (*spinn opp*) for partikkel B .

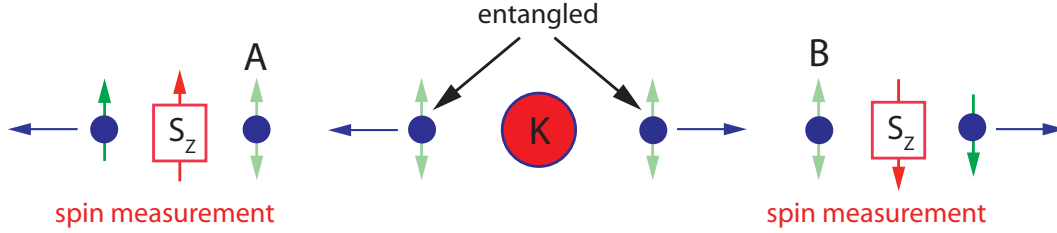


Figure 2: Et EPR-eksperiment med korrelerte spinn

Vi undersøker en situasjon hvor tre forskjellige sett av målinger blir utført på tre forskjellige spinnstilstander,

$$\begin{aligned}
 \text{I :} \quad & \hat{\rho}_1 = |\psi_a\rangle\langle\psi_a|, \quad |\psi_a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) \\
 \text{II :} \quad & \hat{\rho}_2 = |\psi_s\rangle\langle\psi_s|, \quad |\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) \\
 \text{III :} \quad & \hat{\rho}_3 = \frac{1}{2}(\hat{\rho}_1 + \hat{\rho}_2)
 \end{aligned} \tag{5}$$

Notasjonen er følgende, $|+-\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle$, hvor $|\pm\rangle$ er spinnstilstandene for en enkelt partikkel hvor S_z er kvantisert. Første faktor i tensorproduktet refererer til partikkel A og den andre faktoren til partikkel B . Legg merke til at alle tre tilstandene er strengt antikorrelerte med hensyn til z -komponentene til de to partiklens spinn. Hensikten med dette (tenkte) eksperimentet er å undersøke korrelasjonsfunksjoner som er relevante for Bell-ulikhetene, slik det allerede er gjort for tilfellet I i kursets kompendium, for å se om de tre tilfellene gir forskjellige resultater. Dette medfører at spinnmålinger også for roterte retninger tenkes utført.

a) Av de tre tetthetsoperatorene (5) er det bare $\hat{\rho}_1$ som er rotasjonsinvariant. Vis dette ved å beregne forventningsverdien til \mathbf{S}^2 i de tre tilfellene, der $\mathbf{S} = (\hbar/2)(\boldsymbol{\sigma} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \boldsymbol{\sigma})$ er spinnvektoren til det fulle systemet, og gi en kommentar til resultatene.

b) Hva blir de reduserte tetthetsoperatorene $\hat{\rho}_A$ and $\hat{\rho}_B$ i de tre tilfellene? Bestem von Neumann entropien S for det fulle systemet, så vel som entropiene S_A and S_B for delsystemene. Undersøk om den klassiske restriksjonen på entropiene $S \geq \max\{S_A, S_B\}$ er tilfredsstillt i noen av de tre tilfellene. I hvert tilfelle angi om tilstanden er sammenfiltret eller separabel, og angi, hvis mulig et numerisk mål på graden av sammenfiltring.

Vi antar at retningen til spinnmålings-apparatene kan roteres slik at de kan måle spinnkomponenter på formen

$$S_\theta = \cos \theta S_z + \sin \theta S_x \tag{6}$$

hvor vinkelen θ kan velges uavhengig for A and B . Tilstanden $|\theta\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle$ er *spinn-opp*-tilstandsvektoren i den roterte retningen og operatoren $\hat{P}(\theta) = |\theta\rangle\langle\theta|$ er tilhørende projeksjonsoperatoren.

c) Vis at $|\theta\rangle$, som forutsatt ovenfor, er *spinn-opp*-tilstanden til S_θ . Bestem forventningsverdien $P_A(\theta) = \langle \hat{P}(\theta) \rangle_A$, for partikkel A , i de tre tilfellene I, II and III. Gi en kommentar til resultatene.

d) Bestem, i de tre tilfellene, den felles sannsynlighetsfordelingen $P(\theta, \theta') = \langle \hat{P}(\theta) \otimes \hat{P}(\theta') \rangle$, med de to vinklene θ and θ' som uavhengige variable.

Bell's ulikhet, ifølge analysen med *skjulte variable* beskrevet i kompendiet, gir en føring på mulige klassiske korrelasjoner mellom de to spinnene. I tilfellene vi studerer kan den uttrykkes ved

$$F(\theta, \theta') \equiv P(0, \theta') - |P(\theta, 0) - P(\theta, \theta')| \geq 0 \quad (7)$$

hvor en av vinklene er satt til 0 siden vi, i de tilfellene vi undersøker, bare har strikt antikorrelasjon ved spinnmålinger langs z -aksen. (Detaljer i utledningen kan ses i kompendiet.)

e) Lag plott av funksjonen $F(\theta, 0.5\theta)$ i de tre tilfellene I, II and III, der θ varierer i intervallet $0 < \theta < 2\pi$. Undersøk i alle tilfellene om ulikheten (7) er overholdt eller brutt, og sammenlign resultatene med det som er kjent fra b) når det gjelder sammenfiltring av de to spinnene.

I tillegg til disse plottene, undersøk funksjonene for andre valg $\theta' = \lambda\theta$ with $\lambda \neq 0.5$ for å få bekreftet at resultatene ikke endrer seg. Som et alternativt kan det lages 3D plott av funksjonen $F(\theta, \theta')$ for å se om konklusjonen angående spørsmålet om Bells ulikhet er brutt er gyldig i hele parameterområdet.

f) Anta at en forsøksserie blir utført, med faste verdier for de to vinklene. Antallet par som blir registrert med *spinn-opp* (i de utvalgte retningene) for både A and B er n_{++} , og antallet med *spinn-ned* for begge spinnene er n_{--} . På samme måte er n_{+-} antallet par som registreres med *spinn-opp* for A og *spinn-ned* for B , og n_{-+} er antallet par som registreres med *spinn-ned* for A og *spinn-opp* for B . Det totale antall par i serien er N .

Vi referer til de eksperimentelle resultatene som svarer til forventningsverdiene $P_A(\theta)$, $P_B(\theta')$, og $P(\theta, \theta')$ som $P_{exp}^A(\theta)$, $P_{exp}^B(\theta')$, og $P_{exp}(\theta, \theta')$. Hva er disse størrelsene når de uttrykkes i antallene $\{n_{ij}, i, j = \pm\}$ og N ?