FYS 4110/9110 Moderne kvantemekanikk

Midtermineksamen, høsten 2016

Innlevering
Oppgavesettet er tilgjengelig fra mandag morgen, 17. oktober.
Skriftlige eller trykte løsninger leveres til ekspedisjonskontoret i fysikkbygningen før mandag 27. oktober kl.12:00.
Bruk kandidatnummer på besvarelsen, ikke navn.

Språk
Besvarelsene kan skrives på norsk eller engelsk, etter eget ønske.
Note: The problem set is available also in English.

Spørmål til oppgavene
Spørsmål kan rettes til Jon Magne Leinaas (rom Ø471), eller til Paul Bätzing (rom V316, eller på Piazza-siden).

Oppgavesettet består av 2 oppgaver skrevet på 5 sider.

OPPGAVER

1 Sammenfiltrete fotoner

Denne oppgaven går ut på å studere sammenfiltrete fotoner. De aktuelle frihetsgradene er fotonenes polarisasjon. For et enkelt foton svarer polarisasjonen til en kvantemekanisk tiltandsvektor i et to-dimensjonalt Hilbertrom, som er utspent av vektorene $|H\rangle$ og $|V\rangle$. Disse vektorene svarer til lineær polarisasjon i henholdsvis horisontalretningen og vertikalretningen. En generell polarisasjonstilstand svarer til en lineærkombinasjon av disse. Som spesielle tilfeller vil vi benytte lineært polariserte fotoner i retninger som er rotert,

$$|\theta\rangle = \cos\theta|H\rangle + \sin\theta|V\rangle \tag{1}$$

To-fotontilstandene, når vi bare tar hensyn til fotonenes polarisasjon, er vektorer i tensorprodukt-rommet som utspennes av de fire vektorene

$$\begin{aligned} |HH\rangle &= |H\rangle \otimes |H\rangle\ , \quad |HV\rangle = |H\rangle \otimes |V\rangle\ , \\ |VH\rangle &= |V\rangle \otimes |H\rangle\ , \quad |VV\rangle = |V\rangle \otimes |V\rangle\ , \end{aligned} \tag{2}$$

(Legg merke til at selv om fotonene er bosoner så har vi ingen symmetribegrensing på to-fotontilstandene, fordi vi antar at vi kan skjelne de to fotonene fra hverandre ved at de beveger seg i forskjellige retninger.)

En spesiell måte å produsere sammenfiltrede fotonpar på, som vil bli tenkt anvendt i denne oppgaven, kalles *parametrisk nedkonvertering*. Denne metoden blir skissert i det som følger, og er illustrert i fig. 2 og 3. Som vist i fig.2a blir en laserstråle med veldefinert frekvens sendt gjennom en ikke-lineær krystall. På grunn av vekselvirkingen mellom fotonene og krystallen vil noen av fotonene splittes i to fotoner, begge med halve energien til fotonet i den innkommende strålen. Den transverselle komponenten til fotonenes driv (bevegelsesmengde) er bevart, og det medfører at fotonene i et slikt par vil ha retninger som er begrenset til en kjegleflate, som vist på figuren. Fotonene opptrer

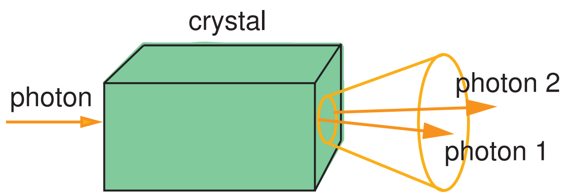

Fig. 2a

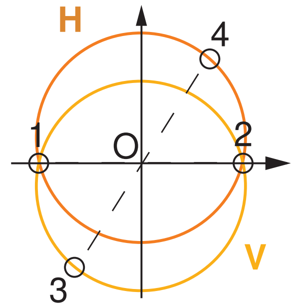

Fig. 2b

med konstant sannsynlighet rundt hele kjeglen. Bevaring av det transverselle driv vil videre medføre at de to fotonene i et sammenfiltret par vil opptre på motsatt side av kjeglen.

Det er i tillegg en polarisasjonseffekt, siden fotonene med horisontal og vertikal poarisasjon (i forhold til krystallplanet) ikke beveger seg på nøyaktig samme måten. Dette medfører at kjeglene som svarer til de to polarisasjonsretningene er litt forskjøvet i forhold til hverandre. Dette er vist i et bilde forfra, mot krystallen, i fig.2b, der kjeglen som svarer til polarisasjon H er løftet litt oppover sammenlignet med kjeglen til polarisasjon V.

To fotoner i et korrelert par vil i fig. 2b være lokalisert på motsatte sider av det sentrale punktet O, som vist ved paret 1 og 2 og paret 3 og 4, og de kommer alltid med motsatt polarisasjon. Som en følge av dette vil i de fleste tilfeller polarisasjonen være entydig bestemt av forplantningsretningen. Fotonparet som dette fotonet er en del av vil være i en produkttilstand på formen $|HV\rangle = |H\rangle \otimes |V\rangle$. I fig. 2b vil paret $3, 4$ være av et slikt par.

Det er imidlertid to retninger som er unike ved at de ligger på begge kjeglene. Det er illustrert ved punktene 1 og 2 i fig. 2b. Et foton av denne typen vil være i en tilstand som er en blanding av $|H\rangle$ og $|V\rangle$. På grunn av korrelasjonen mellom fotonene vil det tilsvarende fotonpar være i en sammenfiltret to-fotontilstand på formen

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HV\rangle + e^{i\chi}|VH\rangle) \tag{3}$$

Den komplekse fasen χ kan reguleres i det eksperimentelle oppsettet.

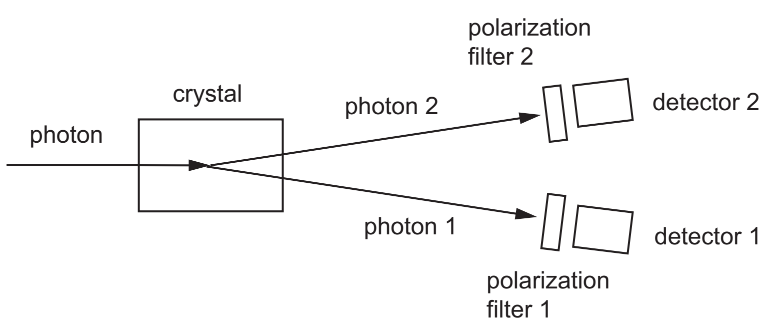

Fig. 3

Det eksperimentelle oppsettet er vist skjematisk i fig. 3. Det antas at et filter er satt på som bare slipper gjennom par av sammenfiltrete fotoner i retningene mot detektorene. For å analysere korrelasjon mellom de to fotonene er det videre satt opp polarisasjonsfiltre på begge detektorene, som vist i figuren. Fotoner som passerer filtrene blir registrert av detektorene og registreringen er samordnet ved hjelp av koinsidenstellere. Vi regner her med ideelle forhold, hvor vi ser bort fra eksperimentelle feilkilder.

Polarisasjonsfiltrene kan representeres ved projeksjonsoperatorer

$$\hat{P}(\theta) = |\theta\rangle\langle\theta|\,, \quad |\theta\rangle = \cos\theta|H\rangle + \sin\theta|V\rangle \tag{4}$$

som projiserer polarisasjontilstanden til et foton som passerer filteret på den lineærpolariserte tilstanden som er valgt for filteret. I det som følger studerer vi forventningsverdiene for deteksjon av fotonene ved å beregne

$$\begin{aligned} P_1(\theta_1) &\equiv \left\langle \hat{P}_1(\theta_1) \right\rangle && \text{foton 1} \\ P_2(\theta_2) &\equiv \left\langle \hat{P}_2(\theta_2) \right\rangle && \text{foton 2} \\ P_{12}(\theta_1,\theta_2) &\equiv \left\langle \hat{P}_1(\theta_1)\otimes\hat{P}_2(\theta_2) \right\rangle && \text{foton 1 og foton 2} \end{aligned} \tag{5}$$

a) Anta at laserstrålen produserer N sammenfiltrete fotonpar i et gitt tidsintrvall. I dette tidsintervallet blir n_1 fotoner registert i detektor 1, n_2 fotoner blir registert i detektor 2 og n_{12} blir registered ved koinsidens i de to detektorene. Hva er sammenhengen mellom registreringshyppighetene n_1/N, etc. og forventningsverdiene P_1, P_2 and P_{12}?

b) Hva er tetthetsoperatoren som svarer til den generelle to-fotontilstanden (3)? Finn også de tilhørende reduserte tetthetsoperatorene for foton 1 og foton 2. Hva er graden av sammenfiltring til fotonparet?

Vi studerer nå tre forskjellige tilfeller, der de sammenfiltrete fotonene blir produsert i henholdsvis tilstandene I: $\chi = \pi$, II: $\chi = 0$ og III: $\chi = \pi/2$.

c) Bestem, i alle tre tilfellene I, II and III, $P_1(\theta_1)$, $P_2(\theta_2)$, og $P_{12}(\theta_1, \theta_2)$.

d) Vis at det finnes en separabel tilstand, i form av en statistisk blanding av $|HV\rangle$ og $|VH\rangle$, som har de samme forventningsverdiene som tilfellet III.

e) Bells ulikhet, som er basert på en antagelse om at det finnes et sett med "skjulte variable", som er opphav til de statistiske fordelingene, kan uttrykkes sem en føringsbetingelse på funksjonen P_{12}, uttrykt på følgende måte (se Sect. 2.3.2 i kompendiet),

$$F(\theta_1,\theta_2,\theta_3) \equiv P_{12}(\theta_2,\theta_3) - |P_{12}(\theta_1,\theta_2) - P_{12}(\theta_1,\theta_3)| \geq 0 \tag{6}$$

Undersøk Bells ulikhet i tilfellene I, II og III, for det spesielle valg av vinkler $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \theta$ and $\theta_3 = 2\theta$, ved å plotte $F(0, \theta, 2\theta)$ som funksjon av θ. Med utgangspunkt i plottene, kommenter om Bells ulikhet er oppfylt eller ikke, og vis spesielt at i tilfelle III er Bells ulikhet *ikke* brudt. Er det noen sammenheng mellom denne konklusjonen i tilfellet III og resultatet i d)?

Når fotonene er sammenfiltret vil man forvente at man kan påvise brudd på Bells ulikhet, men i tilfelle III synes det ikke å være tilfelle. En mulig forklaring kan være at det ligger en restriksjon i det at detektorene bare registrerer lineært polariserte fotoner. For å undersøke dette blir ett av de to polarisasjonsfiltrene byttet ut med et nytt filter som projiserer på nye polarisasjonstilstander gitt ved uttrykkene

$$\hat{P}(\theta_\phi) = |\theta_\phi\rangle\langle\theta_\phi|\,, \quad |\theta_\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\phi}\cos\theta|H\rangle + e^{-i\phi}\sin\theta|V\rangle) \tag{7}$$

Fasevinkelen ϕ er begrenset til de to verdiene $\phi = \pi/4$ og $\phi = -\pi/4$, noe som svarer til sirkulær polarisasjon, enten venstrehendt eller høyrehendt.

f) Anta en lignende eksperimentell situasjon som tidligere, der detektor 1 har et uendret filter som projiserer på tilstander (4), mens detektor 2 nå projiserer på de nye tilstandene (7). Vi skiller mellom tilfelle A: $\phi = \pi/4$ og B: $\phi = -\pi/4$. Bestem også i disse to tilfellene forventningsverdien $P_{12}(\theta_1, \theta_2)$, og undersøk om Bells ulikhet er brudt. Sammenlign med tilfellene I-III som tidligere er undersøkt.

2 Atom-fotonvekselvirkning i en mikrokavitet

Et atom befinner seg inne i et lite reflekterende hulrom. Energiforskjellen mellom grunntilstanden til atomet og laveste eksiterte tilstand er $\Delta E = \hbar\omega$, der ω sammenfaller med frekvensen til en av modene til det elektromagnetiske feltet i hulrommet. Dette gir en sterk kobling mellom atomtilstandene og denne feltmoden, mens koblingen til andre kavitetsmoder er svak og kan neglisjeres.

Det sammensatte kvantesystemet, atomet og den resonante kavitetsmoden, kan beskrives ved den følgende effektive Hamiltonoperatoren

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z + \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\lambda(\hat{a}^\dagger\sigma_- + \hat{a}\sigma_+) - i\gamma\hbar a^\dagger a \tag{8}$$

hvor Pauli matrisene virker mellom de to atomnivåene, med σ_z på diagonal form i energibasis, og $\sigma_\pm = (1/2)(\sigma_x \pm i\sigma_y)$ som matriser som hever og senker energien. $\hat{a}^\dagger$ og $\hat{a}$ er foton-kreasjons og destruksjonsoperatorer, λ er en vekselvirkningsparameter og γ er en henfallsparameter. Henfall betyr her at fotonet unslipper gjennom hulromsveggene. Både λ og γ er reelle parametre, og vi forutsetter at $\omega > \lambda > \gamma$.

De relevante tilstandene i det sammensatte systemet er $|g,0\rangle$, $|g,1\rangle$ og $|e,0\rangle$, hvor g refererer til atomets grunntilstand, e til den eksiterte atomtilstanden, mens 0 og 1 referer til fotontallet i kavitetsmoden.

a) Vis at i det to-dimensjonale underrommet utspent av vektorene $|g,1\rangle$ og $|e,0\rangle$ tar Hamiltonoperatoren formen

$$H = \frac{1}{2}\hbar(\omega - i\gamma)\mathbb{1} + \frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix} i\gamma & \lambda \\ \lambda & -i\gamma \end{pmatrix} \tag{9}$$

der $|e,0\rangle$ svarer til øvre linje i matrisen og $|g,1\rangle$ til den nedre, mens $\mathbb{1}$ representerer identitetsmatrisen.

Vi definerer tidsutviklingsoperatoren på vanlig måte som

$$\hat{\mathcal{U}}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} \tag{10}$$

hvor vi forutsetter $t \geq 0$. Hamiltonoperatoren (9) er ikke-hermittisk, som en følge av at fotonet kan unslippe kaviteten, noe som fører til at tidsutviklingsoperatoren er ikke unitær. Som vi skal se er det imidlertid mulig å korrigere for det.

b) Vis at tidsutviklingsoperatoren kan skrives som

$$\hat{\mathcal{U}}(t) = e^{-\frac{i}{2}(\omega - i\gamma)t}(\cos(\Omega t)\mathbb{1} - i\sin(\Omega t)\,\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \tag{11}$$

hvor $\boldsymbol{\Omega}$ en kompleks vektor, med $\Omega^2 \equiv \boldsymbol{\Omega}^2$ som en reell og positiv størrelse. Bestem $\boldsymbol{\Omega}$ og Ω. (Vær oppmerksom på at $\boldsymbol{\Omega}^2$ ikke inneholder noen komplekskonjugering, og må dermed ikke forveksles med $|\boldsymbol{\Omega}|^2$.) Paulimatrisen $\boldsymbol{\sigma}$ in (11) refererer til 2×2-matriseformuleringen (9) av $\hat{H}$.

c) Anta følgende initialtilstand $|\psi(0)\rangle = |e, 0\rangle$, og bestem tidsutviklingen av tilstandsvektoren, $|\psi(t)\rangle$.

Det er en vesentlig defekt med beskrivelsen av tidsutviklingen hittil. Siden tidsutviklingsoperatoren er ikke-unitær, vil normen til vektoren $|\psi(t)\rangle$ ikke bevares men avta med tiden. Noe mangler altså i beskrivelsen, og vi vil nå korrigere for det. Med dette for øye innføres et tillegg til tetthetsoperatoren $\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$, ved å gi det fulle uttrykket for tetthetsoperatoren til atom-foton systemet i hulrommet som

$$\hat{\rho}_{cav}(t) = \hat{\rho}(t) + f(t)|g, 0\rangle\langle g, 0| \tag{12}$$

der funksjonen $f(t)$ defineres slik at normen til $\hat{\rho}_{cav}(t)$ blir bevart, med verdi lik 1.

d) Bestem funksjonen $f(t)$, og gi en kommentar om i hvilken forstand tillegget i (12) er fornuftig, når vi tenker på den fysiske prosessen beskrevet av Hammiltonoperatoren (9).

e) Bestem og plott, i et felles diagram, tidsutviklingen til besetningssannsynlighetene for de to atomnivåene, såvel som sannsynligheten for at det finnes et foton i hulrommet. Benytt i plottene $\tau = \lambda t$ som en dimensjonsløs tidsparameter, $\gamma/\lambda = 0.1$ som numerisk verdi for den dimensjonsløse henfallsparameteren og begrens plottene til tidsintervallet $0 < \tau < 50$.

Det at fotonet kan unslippe gjennom veggene på hulrommet betyr at atom-fotonsystemet inne i hulrommet, som vi nå betrakter som et delsystem, er koblet til det elektromagnetiske felt på utsiden av hulrommet, som vi nå betrakter som et annet delsystem. Vi gjør en antagelse om at det samlete systemet, som består av disse to delsystemenen til enhver tid befinner seg i en ren, men sammenfiltret kvantetilstand.

f) Vis at tetthetsoperatoren $\hat{\rho}_{cav}(t)$ til atom-fotonsystemet har to egenverdier forskjellige fra null, gitt ved $f(t)$ og $1 - f(t)$, og benytt dette til å bestemme sammenfiltringsentropien til de to delsystemene. Lag et plott av den tidsavhengige sammenfiltringsentropien i det samme tidsintervallet som i det første diagrammet.