Hjemmeoppgave i FYS9110, høstsemester 2018
Geometriske faser

Den geometriske fasen til et kvantesystem (Berryfasen) kan opptre i en rekke forskjellige sammenhenger. I denne oppgaven studeres forskjellige aspekter ved denne fasen i de enkleste kvantesystemene, tonivåsystemet og den harmoniske oscillatoren. I begge tilfeller kan tilstandsvektorene karakteriseres ved to reelle parametre og den geometriske fasen kan defineres for tilstander som som beveger seg på denne todimensjonale mangfoldigheten. I det første tilfelle er polarvinklene til spinnvektoren et naturlig valg av parametre og i det andre tilfelle kan modulus og fasevinkel (eller real-og imaginærkomponenten) til den koherente tilstandsvariable z være naturlig å velge. Det som først studeres her er hva Berryfasen blir for lukkete kurver på flatene. Senere er spørsmålet hvordan fasenvinkelen til en tidsavhengig tilstand kan deles i en dynamisk og en geometrisk del. Bakgrunnsstoff finnes i kurskompendiet, kpt.5 og kpt.1.4.2 og 1.4.4.

a) Skriv en innledning som introduserer det geometriske potensialet $a_k(x)$ og den tilhørende feltvariabelen $f_{kl}(x)$, der x representerer koordinatene til parameterrommet. Definer Berryfasen α_B for en lukket kurve i parameterrommet uttrykt ved $a_k(x)$ og $f_{kl}(x)$. Anta videre at Hamiltonoperatoren er tidsavhengig og har en egenvektor som beveger seg med t i det oppgitte parameterrommet. Angi, uten bevis, hvordan fasevinkelen, ved en periodisk adiabatisk tidsutvikling, er sammensatt av et dynamisk bidrag bestemt av (den tidsavhengige) energien og et bidrag fra Berryfasen.

b) La $\mathbf{n}$ være en enhetsvektor i 3 dimensjoner. Vi tilordner denne en tilstandsvektor i to-nivåsystemet, $|\chi_{\mathbf{n}}\rangle$, ved

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|\chi_{\mathbf{n}}\rangle = |\chi_{\mathbf{n}}\rangle. \tag{1}$$

Benytt polarvinklene (θ, ϕ) til vektoren $\mathbf{n}$ som parametre og bestem komponentene til vektorpotensialet $a_k(\theta, \phi)$ og felttensoren $f_{kl}(\theta, \phi)$, hvor k og l viser til de to polarvinklene. Vis at Berryfasen for en lukket kurve på kuleflaten er direkte relatert til romvinkelen som kurven omslutter.

c) Gjør det tilsvarende for de koherente tilstandene $|\chi_z\rangle$ til en harmonisk oscillator. Disse er bestemt av ligningen

$$\hat{a}|\chi_z\rangle = z|\chi_z\rangle \tag{2}$$

der $\hat{a}$ er senkeoperatoren til den harmoniske oscillatoren. Det komplekse tallet z kan parametriseres som $z = re^{i\phi}$, og vi regner vektorpotensialet og felttensoren som funksjoner av r og ϕ. Vis at Berryfasen som tilordnes en lukket kurve i dette tilfellet er direkte relatert til arealet i z-planet som kurven omslutter.

Vi innfører nå Hamiltonoperatorer for de to systemene. For to-nivåsystemet skriver vi den som

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z \tag{3}$$

og tolker den som Hamiltonoperatoren for et halvtallig spinn i et ytre magnetfeltet som er rettet langs z-aksen. For den harmoniske oscillatoren skriver vi den på vanlig måte som

$$\hat{H}_2 = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right). \tag{4}$$

d) Vi velger følgende initialbetingelse for to-nivåsystemet

$$|\psi_1(0)\rangle = |\chi_{\mathbf{n}_0}\rangle, \qquad \mathbf{n}_0 = \sin\theta_0\mathbf{i} + \cos\theta_0\mathbf{k} \tag{5}$$

der θ_0 er en vilkårlig valgt vinkel. Det gir en tidsutvikling på formen

$$|\psi_1(t)\rangle = e^{i\alpha_1(t)}|\chi_{\mathbf{n}(t)}\rangle \tag{6}$$

hvor spinnvektoren $\mathbf{n}(t)$ presseserer med vinkelfrekvens ω_0. Vis at fasevinkelen $\alpha_1(t)$, under ett omløp består av to bidrag, hvor det ene er proporsjonalt med forventningsverdien til energien og det andre er Berryfasen for den lukkede sløyfen som $\mathbf{n}(t)$ beskriver.

e) For den harmoniske oscillator velger vi som initialbetingelse

$$|\psi_2(0)\rangle = |\chi_{z_0}\rangle, \qquad z_0 = r_0 \quad (\phi_0 = 0). \tag{7}$$

Den tidsavhengige tilstandsvektoren blir nå

$$|\psi_2(t)\rangle = e^{i\alpha_2(t)}|\chi_{z(t)}\rangle \tag{8}$$

hvor $z(t)$ roterer med vinkelfrekvens ω. Vis at fasevinkelen $\alpha_2(t)$ ved et fullt omløp har en tilsvarende sammensetning som $\alpha_1(t)$ for to-nivåsystemet.

f) Som siste punkt studerer vi tidsutviklingen til to-nivå systemet i et roterende magnetfelt. Situasjonen er den sammen som studert i kpt. 1.4.2, og Hamiltonoperatoren kan skrives som

$$\hat{H}_3(t) = \frac{1}{2}\hbar(\omega_0\sigma_z + \omega_1(\cos\omega t\sigma_x + \sin\omega t\sigma_y) \tag{9}$$

I kapittel 1.4.2 vises hvordan det kvantemekaniske spinnproblemet kan løses eksakt, uten å anta ω liten, ved å transformere til et roterende koordinatsystem. La i dette tilfellet $|\chi_{\mathbf{n}_0}\rangle$ betegne en av egenvektorene til Hamiltonoperatoren i det roterende koordinatsystemet. Koordinataksen er definert slik at $\mathbf{n}_0 = \sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{k}$ hvor vinkelen θ er bestemt av parametrene ω_0, ω_1 og ω, slik det er oppgitt i kpt 1.4.2.

I det ikke-roterende koordinatsystemet vil denne tilstanden være tidsavhengig, ved at vektoren $\mathbf{n}$ vil rotere om z-aksen med vinkelfrekvens ω. Vi antar at tilstandsvektoren ved $t = 0$ er identisk med $|\chi_{\mathbf{n}_0}\rangle$, og tidsutviklingen vil deretter bli på samme form som i punkt d),

$$|\psi_3(t)\rangle = e^{i\alpha_3(t)}|\chi_{\mathbf{n}(t)}\rangle. \tag{10}$$

Bestem også her fasevinkelen $\alpha_3(t)$ for et fullt omløp av spinnvektoren og vis at i den adiabatiske grensen $\omega \to 0$ vil den bestå av et energiavhengig bidrag og et Berryfasebidrag, som stemmer med de generelle uttrykkene som er utledet i kpt 5.2. Undersøk tilslutt hva som skjer med fasen ved resonans og beskriv spinnbevegelsen i dette tilfellet.

Besvarelsen leveres innen 20. november