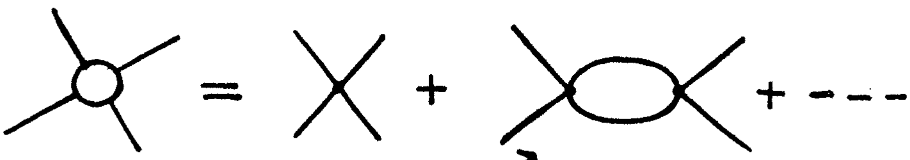
RGE:
Preliminary notes

Illustrerende eksempel: Masselaus ϕ^4 -teori:

Den "bare" Lagrangefunksjonen er:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_0\,\partial^\mu\phi_0 - \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4 \qquad (93)$$



$\sim \lambda_0$ $\quad \sim \lambda_0^2 \int \frac{d^4k}{(k^2)^2} \sim \lambda_0^2 \ln\Lambda$

(Λ = ultraviolett cut-off)

Det renormaliserte feltet er $\phi = (Z_\phi)^{-1/2}\phi_0$. Merk:

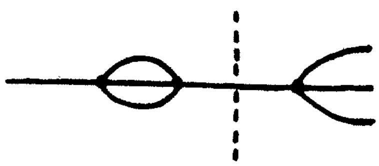
Trenger vilkårlig masseparameter μ for å få renormalisert teorien, (trenger dimensjonslaust forhold $\frac{\Lambda}{\mu}$) slik at

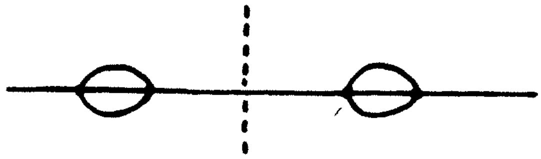
$$Z_\phi = 1 + \frac{\text{tall}}{\pi^2}\lambda_0^2 \ln\frac{\Lambda}{\mu} = Z_\phi\left(\lambda_0, \frac{\Lambda}{\mu}\right) \qquad (94)$$

Tilsvarende er den renormaliserte koplinga $\lambda = \left(Z_\lambda\left(\lambda_0, \frac{\Lambda}{\mu}\right)\right)^{-1/2}\lambda_0$.

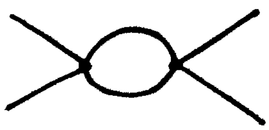
Betrakter: Renormaliserte N-partikkel Greens-funksjoner som er 1PI (en partikel irredusible).

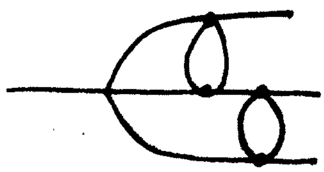
En-part redusibel: Kan deles i to diagram ved å kutte ei linje:





Irredusible diagram:





For irredusible diagram er

$$\Gamma^{(N)}(p_i, \lambda, \mu) = \left[Z_\phi\left(\lambda_0, \frac{\Lambda}{\mu}\right)\right]^{N/2} \Gamma_0^{(N)}(p_i, \lambda_0, \Lambda) \qquad (95)$$

hvor $\Gamma_0^{(N)}$ er den urenormaliserte 1PI N-partikkel Greensfunksjon.

I $\Gamma^{(N)}$ er (alle N) ytre propagatorer dividert ut;
dvs.: $\Gamma^{(2)}$ = invers propagator:

N-partikkel Greensfunksjon i impulsrommet $T^{(N)}(p_i)$:

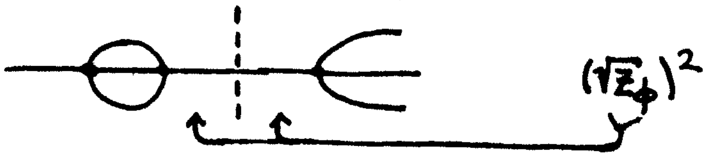
$$(2\pi)^4\,\delta^{(4)}\Big(\sum_{j=1}^{N} p_j\Big)\, T^{(N)}(p_1 \cdots p_N) \;=$$

$$\int d^4x_1 \cdots d^4x_N \exp\Big[i\sum_{j=1}^{N} p_j x_j\Big] \langle 0|T\phi(x_1) \cdots \phi(x_N)|0\rangle \tag{96}$$

La $\tilde{T}^{(N)}$ være den irredusible delen av $T^{(N)}$. Vi har da

$$\Gamma^{(N)}(p_1 \cdots p_N) = \frac{\tilde{T}^{(N)}(p_1 \cdots p_N)}{\tilde{T}^{(2)}(p_1) \cdots \tilde{T}^{(2)}(p_N)} \tag{97}$$

For 1PI er $\tilde{T}^{(N)} = (Z_\phi^{-1/2})^N \tilde{T}_0^{(N)}$ (Ved hjelp av (97) fås da (95)).
Dette gjelder ikke redusible diagram:



er allerede tatt med ved renorm, av de to deldiagram.

$\Gamma_0^{(N)}$ $(= (\sqrt{Z_\phi})^{-N}\Gamma^{(N)})$ avhenger ikke av μ. Vi finner da:

$$0 = \frac{d}{d\mu}\Gamma_0^{(N)} = (\sqrt{Z_\phi})^{-N}\Big\{\frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\lambda} - N\frac{\partial}{\partial\mu}(\ln\sqrt{Z_\phi})\Big\}\Gamma^{(N)}$$

Vi multipliserer med μ for å få størrelser uten dimensjon inni parentesen $\{\ \}$. Altså fås:

$$(\sqrt{Z_\phi})^N \mu\frac{d}{d\mu}\Gamma_0^{(N)} = 0$$

$$\Updownarrow$$

RGE:

$$\boxed{\Big\{\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} - N\gamma(\lambda)\Big\}\Gamma^{(N)}(p_i,\lambda,\mu) = 0} \tag{98}$$

hvor

$$\beta(\lambda) \equiv \mu\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\quad,\quad \gamma(\lambda) = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}(\ln\sqrt{Z_\phi}) \tag{99}$$

Da RGE er ei diff. likning for den renormaliserte $\Gamma^{(N)}$ kan β og γ ikke avhenge av Λ . Da β og γ er dimensjonslause og Λ/μ er det eneste dimensjonslause forhold som kan dannes ved hjelp av μ , så må β og γ være uavhengige av Λ/μ dvs.:

β og γ er bare funksjon av λ !

Dette gjør RGE nyttig. RGE forteller hvordan $\Gamma^{(N)}$ oppfører seg når renormaliseringspunktet μ varieres.

Propagator:

$$\left[\Gamma^{(2)}(p)\right]_{p^2=-\mu^2} = -\mu^2$$

Vertex:

$$\left[\Gamma^{(4)}(p_1 p_2 p_3 p_4, \lambda)\right]_{p_i = p_i^0} = \lambda$$

Fig. 16

$$\left(p_i^0 \cdot p_j^0 = -\mu^2 (\delta_{ij} - \tfrac{1}{4}) \right)$$

Vi renormaliserer i Euklidsk (dvs. ikke-fysisk) område for å unngå terskel-problemer.

RGE transformasjon:

$$\mu \to \bar{\mu} = \bar{\mu}(t) = e^t \mu \;\Rightarrow\; \lambda = \lambda(\mu) \longrightarrow \lambda(\bar{\mu}) \equiv \bar{\lambda}(t) \tag{100}$$

hvor $\bar{\lambda}(t)$ kalles den effektive koplinga. Betrakter så en "invariant ladning" (G inneholder ikke Z_ϕ):

$$G \equiv \frac{\Gamma^{(4)}(p_1 p_2 p_3 p_4)}{\prod_{j=1}^{4} \left[\Gamma^{(2)}(p_i)\right]^{1/2}} \prod_{j=1}^{4} (p_i^2)^{1/2} \tag{101}$$

som tilfredsstiller

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial\lambda}\right) G(\lambda,\mu)=0 \tag{102}$$

(tilsvarende likning fås for $\mu\to\bar{\mu}$, $\lambda\to\bar{\lambda}$). Dette betyr at $G(\lambda,\mu)=G(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ og dermed:

$$0=\frac{d}{dt}G(\lambda,\mu)=\frac{d}{dt}G(\bar{\lambda},\bar{\mu})\equiv\left(\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\bar{\mu}}+\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}}\right)G(\bar{\lambda},\bar{\mu})$$

Da $\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial t}=\bar{\mu}$ må

$$\boxed{\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial t}=\beta(\bar{\lambda})} \tag{103}$$

dvs. den effektive koplinga er bestemt av β-funksjonen:

$$\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t)}\frac{dx}{\beta(x)}=t \tag{104}$$

(For ϕ^4 teori er $\beta(\lambda)=\frac{3\lambda^2}{16\pi^2}+O(\lambda^3)$).
Med $\mu\to\bar{\mu}=e^t\mu$, $\lambda\to\bar{\lambda}(t)$ blir $\frac{d}{dt}=\bar{\mu}\frac{\partial}{\partial\bar{\mu}}+\beta(\bar{\lambda})\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}}$
slik at RGE likninga (98) blir omforma til:

$$\left\{\frac{d}{dt}-N\gamma(\bar{\lambda}(t))\right\}\Gamma^{(N)}(p_i,\bar{\lambda},\bar{\mu})=0 \tag{105}$$

$$\Rightarrow \Gamma^{(N)}(p_i,\bar{\lambda},\bar{\mu})=\Gamma^{(N)}(p_i,\lambda,\mu)\exp\left\{N\int_0^t\gamma(\bar{\lambda}(t'))dt'\right\} \tag{106}$$

Dimensjonsanalyse av $\Gamma^{(N)}$ gir

$$\Gamma^{(N)}(p_i,\lambda,\mu)=\mu^{4-N}f^{(N)}\left(\frac{p_i\cdot p_j}{\mu^2},\lambda\right) \tag{107}$$

$$\Rightarrow \Gamma^{(N)}(e^t p_i,\lambda,\mu)=e^{t(4-N)}\Gamma^{(N)}(p_i,\lambda,e^{-t}\mu) \tag{108}$$

Ved å kombinere (106) og (108) fås

$$\boxed{\Gamma^{(N)}(e^t p_i,\lambda,\mu)=\Gamma^{(N)}(p_i,\bar{\lambda}(t),\mu)\exp\left\{(4-N)t-N\int_0^t\gamma(\bar{\lambda}(t'))dt'\right\}} \tag{109}$$

hvor vi har brukt $e^{-t}\bar{\mu}=\mu$.

Altså: Skalering av impulsene med faktoren e^t kompenseres med en endring av koplinga $\lambda\to\bar{\lambda}(t)$ og en faktor $\exp\{\ \}$ som inneholder den normale dimensjonen (4-N) og den anomale dimensjonen $\gamma(\lambda)$

RGE for QCD

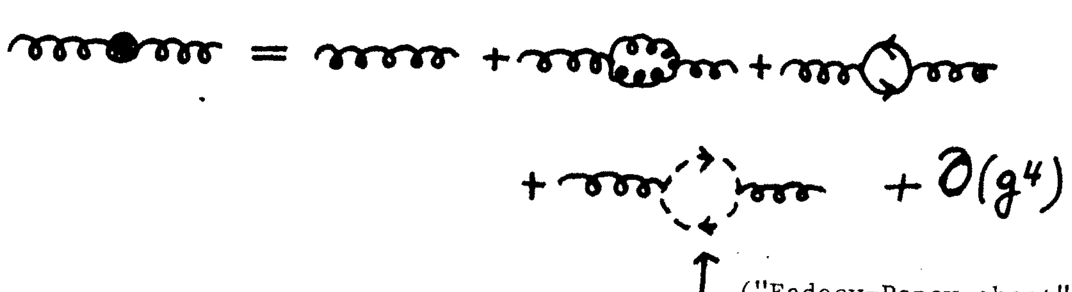
QCD inneholder både Fermion (dvs. kvark) - og Boson (- dvs- gluon) -felter- Disse får nå hver sin anomale dimensjon γ_F og γ_B :

$$\boxed{\left\{\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}+N_F\gamma_F(g)+N_B\gamma_B(g)\right\}\Gamma^{(N_F,N_B)}(p_i,g,\mu)=0} \tag{110}$$

(Dette gjelder for masselause kvarker i Landau-gauge).

Invers bosonpropagator (renormalisert):

$$\left[\Gamma^{(0,2)}(p)\right]^{\alpha\beta}_{p^2=-\mu^2}=\left[(\sqrt{Z_B})^2\Gamma_0^{(0,2)}\right]^{\alpha\beta}_{p^2=-\mu^2}=p^\alpha p^\beta-g^{\alpha\beta}p^2 \tag{111}$$



("Fadeev-Popov ghost")

For vilkårlig p fås i "leading log" -approksimasjonen:

$$\Gamma^{(0,2)}(p)^{\alpha\beta}=(p^\alpha p^\beta-g^{\alpha\beta}p^2)\left\{1+d_B g^2\ln\left(-\frac{p^2}{\mu^2}\right)+O(g^4)\right\} \tag{112}$$

Tilsvarende for <u>invers Fermionpropagator</u>:

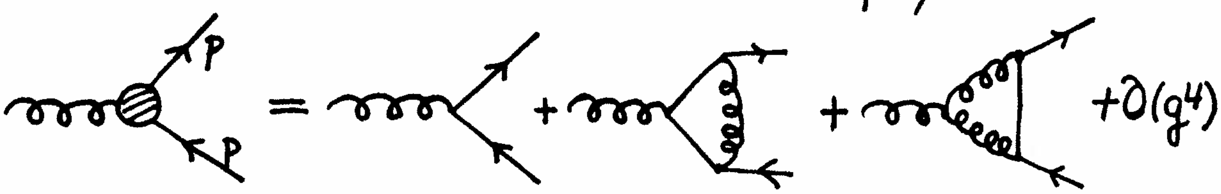
$$\left[\Gamma^{(2,0)}(p)\right]_{p^2=-\mu^2} = \left[(\sqrt{Z_F})^2\,\Gamma_0^{(2,0)}(p)\right]_{p^2=-\mu^2} = \gamma\cdot p \qquad (113)$$

For vilkårlig p :

$$\Gamma^{(2,0)}(p) = \gamma\cdot p\left\{1 + d_F\, g^2 \ln\left(-\frac{p^2}{\mu^2}\right) + O(g^4)\right\} \qquad (114)$$

For qGq vertex:

$$\left[\Gamma^{(2,1)}(p,p,k)\right]^{\mu,a}_{k=0;\,p^2=-\mu^2} = \left[(\sqrt{Z_F})^2(\sqrt{Z_B})\,\Gamma_0^{(2,1)}\right]^{\mu,a}_{k=0;\,p^2=-\mu^2} = g\gamma^\mu t^a \qquad (115)$$



$$\Gamma^{(2,1)}(p,p,k)^{\mu,a}_{k=0} = g\gamma^\mu t^a\left\{1 + d_V\, g^2 \ln\left(-\frac{p^2}{\mu^2}\right) + O(g^4)\right\} \qquad (116)$$

I Landau-gauge blir:

$$d_F = 0\,,\quad d_B = \frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{13}{6}C_1 - \frac{4}{3}C_2\right)\,,\quad d_V = \frac{1}{16\pi^2}\left(-\frac{3}{4}C_1\right) \qquad (117)$$

hvor $C_1\delta_{ab} = f_{abc}f_{bcd}$ og $C_2\delta_{ab} = N_f\,\mathrm{Tr}(t^a t^b)$;
N_f = antall "flavours". (For $SU(3)_{farge}$ er $C_1 = 3$, $C_2 = \frac{1}{2}N_f$)
Puttes uttrykka for $\Gamma^{(0,2)}(p)^{\alpha\beta}$, $\Gamma^{(2,0)}(p)$ og $\Gamma^{(2,1)}(p,p,k)^{\mu,a}_{k=0}$

inn i RG -likningene har en tre likninger for å bestemme γ_F, γ_B og β.
En finner

$$\gamma_F = d_F g^2 + \mathcal{O}(g^4), \gamma_B = d_B g^2 + \mathcal{O}(g^4) \;, \beta = (2d_V - d_B) g^3 + \mathcal{O}(g^5) \tag{118}$$

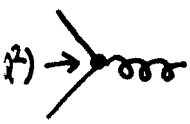
For $SU(3)_{farge}$ fås

$$\beta(g) = -b g^3 + \mathcal{O}(g^5) \quad ; b = \frac{1}{16\pi^2}\left(11 - \frac{2}{3} N_f\right) \tag{119}$$

For den effektive koplinga $\bar{g}(t)$ gjelder

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial t} = -b\bar{g}^3 + \mathcal{O}(\bar{g}^5) \Rightarrow \bar{g}^2 = \frac{g^2}{1 + 2b g^2 t} \tag{120}$$

for store t. Dette gir $\bar{g} \to 0$ når $t \to \infty$ for $b > 0$.
For store impulser Q, velg $t = \frac{1}{2} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}$ $(\Rightarrow \bar{\mu} = e^t \mu = Q)$:



$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} \hat{b} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \equiv \frac{4\pi}{\hat{b} \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \tag{121}$$

hvor $\hat{b} \equiv 16\pi^2 b = 11 - \frac{2}{3} N_f$. Eksperimentelt er $\Lambda \sim$ 100 - 400 MeV
(Avhengig av renormaliseringsprosedyre og eksperimentell situasjon).

Den typiske eksponentialfaktoren (se (106)) i RGE blir:

$$\exp\left\{\int_0^t dt' \gamma_B(\bar{g}(t'))\right\} = (1 + 2b g^2 t)^{\frac{d_B}{2b}} = \left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\alpha_s(Q^2)}\right)^{\frac{d_B}{2b}} \sim \left(\ln \frac{Q^2}{\mu^2}\right)^{\frac{d_B}{2b}} \tag{122}$$

for $Q \to \infty$. Etter dette blir f.eks.

$$[\Gamma^{(0,2)}(p)]^{\alpha\beta}_{RGE} = (p^\alpha p^\beta - p^2 g^{\alpha\beta}) \left\{1 + b[g(\mu^2)]^2 \ln\left(-\frac{p^2}{\mu^2}\right)\right\}^{\frac{d_B}{b}} \tag{123}$$

for $\left(\frac{p^2}{\cdot}\right) \gg 1$