Prosjekt 1, FYS-KJM4480, Høst 2009

Prosjekt 1, frist kl 12 (formiddag) fredag 25 september

Vi skal studere en skjematisk modell (Lipkin modellen, Nucl. Phys. **62** (1965) 188) for vekselvirkning av 4 fermioner som kan fordele seg på to energinivåer. Hvert nivå har degenerasjon $d = 4$. De to nivåa har kvantetall $\sigma = \pm 1$, hvor øverste nivå har $\sigma = +1$ og energi $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ og nederste nivå har $\sigma = -1$ og energi $\varepsilon_2 = -\varepsilon/2$. I tillegg er undertilstandene til hvert nivå karakterisert ved $p = 1, 2, 3, 4$.

Vi definerer enpartikkel tilstandene for Lipkin modellen

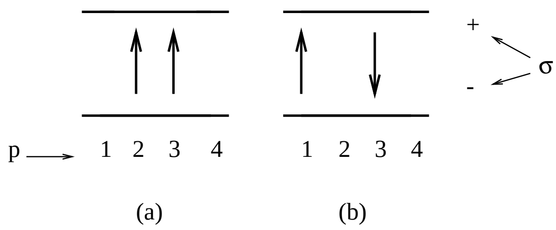
$$|u_{\sigma=-1,p}\rangle = a^\dagger_{-p}|0\rangle \qquad |u_{\sigma=1,p}\rangle = a^\dagger_{+p}|0\rangle \,.$$

Enpartikkel tilstandene spenner ut en ortonormal basis.

Systemets Hamilton operator er gitt ved

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_1 + H_2 \\ H_0 &= \tfrac{1}{2}\varepsilon \sum_{\sigma,p} \sigma a^\dagger_{\sigma,p} a_{\sigma,p} \\ H_1 &= \tfrac{1}{2}V \sum_{\sigma,p,p'} a^\dagger_{\sigma,p} a^\dagger_{\sigma,p'} a_{-\sigma,p'} a_{-\sigma,p} \\ H_2 &= \tfrac{1}{2}W \sum_{\sigma,p,p'} a^\dagger_{\sigma,p} a^\dagger_{-\sigma,p'} a_{\sigma,p'} a_{-\sigma,p} \end{aligned}$$

V og W er konstanter. H_1 kan bare flytte fermionpar opp og ned som vist i figur (a) mens H_2 er et spinnutvekslingsledd. Som vist i figur (b) så forandrer H_2 et fermionpar fra en tilstand $(p\sigma, p'-\sigma)$ til en tilstand $(p-\sigma, p'\sigma)$.



a) Introduser kvasispin operatorene

$$\begin{aligned} J_+ &= \sum_p a^\dagger_{p+} a_{p-} \\ J_- &= \sum_p a^\dagger_{p-} a_{p+} \\ J_z &= \tfrac{1}{2}\sum_{p\sigma} \sigma a^\dagger_{p\sigma} a_{p\sigma} \\ J^2 &= J_+J_- + J_z^2 - J_z \end{aligned}$$

Vis at kvasispinn operatorene tilfredsstiller kommuteringsrelasjonene for angulært moment.

b) Uttrykk H vha. av kvasispinn operatorene og antallsoperatoren

$$N = \sum_{p\sigma} a^\dagger_{p\sigma} a_{p\sigma}.$$

c) Vis at H kommuterer med J^2, dvs. J er et godt kvantetall

d) Betrakt deretter en tilstand med alle fire fermioner i laveste tilstand (se figuren), gitt ved

$$|\Phi_{J_z=-2}\rangle = a^\dagger_{1-} a^\dagger_{2-} a^\dagger_{3-} a^\dagger_{4-} |0\rangle \,.$$

Denne tilstanden har $J_z = -2$ og tilhører settet av projeksjoner for $J = 2$. Vi kan bruke korthåndsnotasjonen $|J, J_z\rangle$ for tilstander med ulike verdier av spinn J og spinnprojeksjon J_z.

De andre mulige tilstandene har $J_z = -1$, $J_z = 0$, $J_z = 1$ og $J_z = 2$. Bruk stige eller senke operatorene J_+ og J_- til å konstruere tilstandene for spinn $J_z = -1$ $J_z = 0$, $J_z = 1$ og $J_z = 2$. Virkninga av disse operatorene på en gitt tilstand med totalt spinn J og projeksjon J_z er gitt ved ($\hbar = 1$) henholdsvis $J_+ |J, J_z\rangle = \sqrt{J(J+1) - J_z(J_z+1)}\,|J, J_z+1\rangle$ og $J_- |J, J_z\rangle = \sqrt{J(J+1) - J_z(J_z-1)}\,|J, J_z-1\rangle$.

e) Bruk deretter operatorene for kvasispinn til å konstruere Hamilton matrisa H i dette fem-dimensjonale rommet. Løs egenverdiproblemet enten numerisk eller analytisk for følgende sett av verdier:

$$\begin{array}{l} (1)\ \ \varepsilon = 2,\ \ V = -1/3,\ \ W = -1/4 \\ (2)\ \ \varepsilon = 2,\ \ V = -4/3,\ \ \ W = -1 \end{array}$$

Det enkleste her, dersom du ikke har utvikla et eget program for diagonalisering av et egenverdiproblem, er å bruke Matlab eller Octave sine innebygde funksjoner for diagonalisering. Hvilken tilstand er grunntilstanden? Kommenter gjerne resultatene.

f) Enpartikkel tilstandene for Lipkin modellen

$$|u_{\sigma=-1,p}\rangle = a^\dagger_{-p}\,|0\rangle \qquad\qquad |u_{\sigma=1,p}\rangle = a^\dagger_{+p}\,|0\rangle$$

kan nå brukes som basis for en ny enpartikkel tilstand $|\phi_{\alpha,p}\rangle$ ved hjelp av en unitær transformasjon

$$|\phi_{\alpha,p}\rangle = \sum_{\sigma=\pm 1} C_{\alpha\sigma}\,|u_{\sigma,p}\rangle$$

hvor $\alpha = \pm 1$ og $p = 1, 2, 3, 4$. Hvorfor er p den samme i $|\phi\rangle$ som i $|u\rangle$? Vis at den nye basisen også er ortonormal.

g) Med den nye basisen kan vi konstruere en ny Slater determinant gitt ved $|\Psi\rangle$

$$|\Psi\rangle = \prod_{p=1}^{4} b^\dagger_{\alpha,p}\,|0\rangle$$

med $b^\dagger_{\alpha,p}\,|0\rangle = |\phi_{\alpha,p}\rangle$.

Vis at en ny Slater determinant som kan konstrueres med den nye basisen kan skrives som Slater determinanten som er kontruert med basisen i a) og determinanten til matrisa C.

Vis også at den nye og den gamle Slater determinanten er like med unntak av en konstant. Hva er verdien til denne konstanten?

h) Bruk Slater determinanten fra forrige oppgave til å beregne

$$E = \langle\Psi|\,H\,|\Psi\rangle\,,$$

som funksjon av koeffisientene $C_{\sigma\alpha}$.

i) Vis at

$$\frac{\epsilon}{3} > V + W,$$

må være oppfylt for å finne et minimum. Hint: rekn ut den funksjonalderiverte av energien med tanke på koeffisientene $C_{\sigma\alpha}$.