Week 39 and 40, Fall 2010

Exercise 13

Vi skal studere en skjematisk modell (Lipkin modellen, Nucl. Phys. **62** (1965) 188) for vekselvirkning av 4 fermioner som kan fordele seg på to energinivåer. Hvert nivå har degenerasjon $d = 4$. De to nivåa har kvantetall $\sigma = \pm 1$, hvor øverste nivå har $\sigma = +1$ og energi $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ og nederste nivå har $\sigma = -1$ og energi $\varepsilon_2 = -\varepsilon/2$. I tillegg er undertilstandene til hvert nivå karakterisert ved $p = 1, 2, 3, 4$.

Vi definerer enpartikkel tilstandene for Lipkin modellen

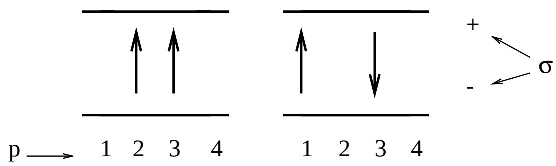
$$|u_{\sigma=-1,p}\rangle = a^\dagger_{-p}|0\rangle \qquad |u_{\sigma=1,p}\rangle = a^\dagger_{+p}|0\rangle .$$

Enpartikkel tilstandene spenner ut en ortonormal basis.

Systemets Hamilton operator er gitt ved

$$\begin{aligned} H =& \; H_0 + H_1 + H_2 \\ H_0 =& \; \tfrac{1}{2}\varepsilon \textstyle\sum_{\sigma,p} \sigma a^\dagger_{\sigma,p} a_{\sigma,p} \\ H_1 =& \; \tfrac{1}{2}V \textstyle\sum_{\sigma,p,p'} a^\dagger_{\sigma,p} a^\dagger_{\sigma,p'} a_{-\sigma,p'} a_{-\sigma,p} \\ H_2 =& \; \tfrac{1}{2}W \textstyle\sum_{\sigma,p,p'} a^\dagger_{\sigma,p} a^\dagger_{-\sigma,p'} a_{\sigma,p'} a_{-\sigma,p} \end{aligned}$$

V og W er konstanter. H_1 kan bare flytte fermionpar opp og ned som vist i figur (a) mens H_2 er et spinnutvekslingsledd. Som vist i figur (b) så forandrer H_2 et fermionpar fra en tilstand $(p\sigma, p' - \sigma)$ til en tilstand $(p - \sigma, p'\sigma)$.



(a) (b)

a) Introduser kvasispin operatorene

$$\begin{aligned} J_+ =& \; \textstyle\sum_p a^\dagger_{p+} a_{p-} \\ J_- =& \; \textstyle\sum_p a^\dagger_{p-} a_{p+} \\ J_z =& \; \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{p\sigma} \sigma a^\dagger_{p\sigma} a_{p\sigma} \\ J^2 =& \; J_+J_- + J_z^2 - J_z \end{aligned}$$

Vis at kvasispinn operatorene tilfredsstiller kommuteringsrelasjonene for angulært moment.

b) Uttrykk H vha. av kvasispinn operatorene og antallsoperatoren

$$N = \sum_{p\sigma} a^\dagger_{p\sigma} a_{p\sigma}.$$

c) Vis at H kommuterer med J^2, dvs. J er et godt kvantetall

d) Betrakt deretter en tilstand med alle fire fermioner i laveste tilstand (se figuren), gitt ved

$$|\Phi_{J_z=-2}\rangle = a^\dagger_{1-} a^\dagger_{2-} a^\dagger_{3-} a^\dagger_{4-} |0\rangle .$$

Denne tilstanden har $J_z = -2$ og tilhører settet av projeksjoner for $J = 2$. Vi kan bruke korthåndsnotasjonen $|J, J_z\rangle$ for tilstander med ulike verdier av spinn J og spinnprojeksjon J_z.

De andre mulige tilstandene har $J_z = -1$, $J_z = 0$, $J_z = 1$ og $J_z = 2$. Bruk stige eller senke operatorene J_+ og J_- til å konstruere tilstandene for spinn $J_z = -1$ $J_z = 0$, $J_z = 1$ og $J_z = 2$. Virkninga av disse operatorene på en gitt tilstand med totalt spinn J og projeksjon J_z er gitt ved ($\hbar = 1$) henholdsvis $J_+ |J, J_z\rangle = \sqrt{J(J+1) - J_z(J_z+1)}\, |J, J_z+1\rangle$ og $J_- |J, J_z\rangle = \sqrt{J(J+1) - J_z(J_z-1)}\, |J, J_z-1\rangle$.

e) Bruk deretter operatorene for kvasispinn til å konstruere Hamilton matrisa H i dette fem-dimensjonale rommet. Løs egenverdiproblemet enten numerisk eller analytisk for følgende sett av verdier:

$$\begin{array}{ll} (1) & \varepsilon = 2,\; V = -1/3,\; W = -1/4 \\ (2) & \varepsilon = 2,\; V = -4/3,\quad W = -1 \end{array}$$

Det enkleste her, dersom du ikke har utvikla et eget program for diagonalisering av et egenverdiproblem, er å bruke Matlab eller Octave sine innebygde funksjoner for diagonalisering. Hvilken tilstand er grunntilstanden? Kommenter gjerne resultatene.

f) Enpartikkel tilstandene for Lipkin modellen

$$|u_{\sigma=-1,p}\rangle = a^\dagger_{-p} |0\rangle \qquad\qquad |u_{\sigma=1,p}\rangle = a^\dagger_{+p} |0\rangle$$

kan nå brukes som basis for en ny enpartikkel tilstand $|\phi_{\alpha,p}\rangle$ ved hjelp av en unitær transformasjon

$$|\phi_{\alpha,p}\rangle = \sum_{\sigma=\pm 1} C_{\alpha\sigma} |u_{\sigma,p}\rangle$$

hvor $\alpha = \pm 1$ og $p = 1, 2, 3, 4$. Hvorfor er p den samme i $|\phi\rangle$ som i $|u\rangle$? Vis at den nye basisen også er ortonormal.

g) Med den nye basisen kan vi konstruere en ny Slater determinant gitt ved $|\Psi\rangle$

$$|\Psi\rangle = \prod_{p=1}^{4} b^\dagger_{\alpha,p} |0\rangle$$

med $b^\dagger_{\alpha,p} |0\rangle = |\phi_{\alpha,p}\rangle$.

Bruk denne Slater determinanten til å beregne

$$E = \langle\Psi| H |\Psi\rangle,$$

som funksjon av koeffisientene $C_{\sigma\alpha}$. Koeffisientene er reelle.

i) Vis at

$$\frac{\epsilon}{3} > V + W,$$

må være oppfylt for å finne et minimum. Hint: rekn ut den funksjonalderiverte av energien med tanke på koeffisientene $C_{\sigma\alpha}$.