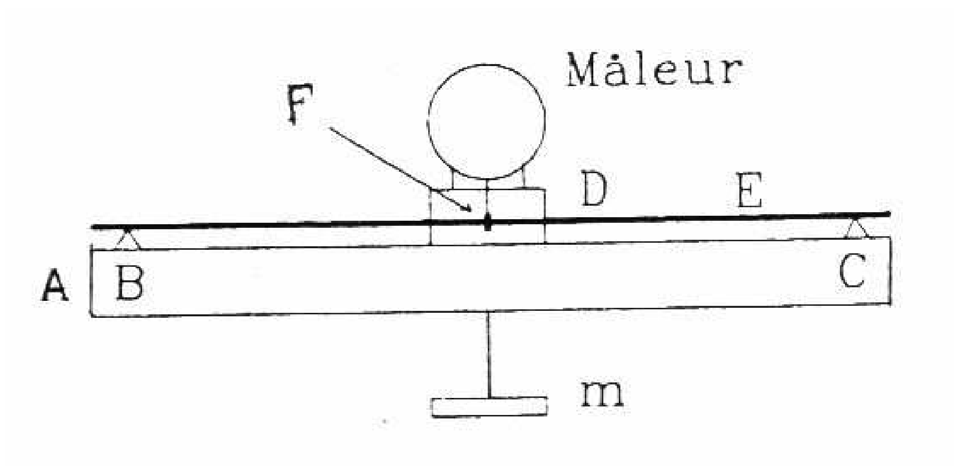
FYS2150LAP
ØVELSE 7
ELASTISITET

Fysisk institutt, UiO

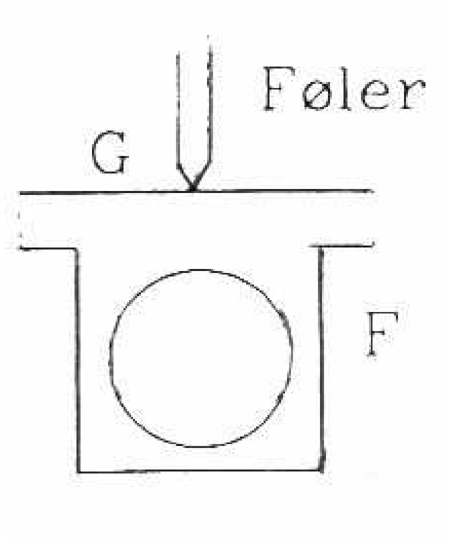
7.1 Apparatur for måling av en bjelkes nedbøying

Apparaturen er vist skjematisk i fig. 7.1. En bjelke A med u-profil er utstyrt med to kniver B og C og et stativ D med måleur. Knivene og stativet kan forskyves langs A. Prøven E som skal undersøkes, hviler på knivene. På prøven er montert en holder F, se fig. 7.1.



Figur 7.1: *Apparatur for måling av en bjelkes nedbøying.*

Måleurets føler registrerer den vertikale posisjonen til holderens anleggsflate G, se fig. 7.2. En vekt, et målebånd og et mikrometer inngår i apparaturen.



Figur 7.2: *Detalj fra fig. 7.1*

Oppgave 1. Bøying av en messingstav med sirkulært tverrsnitt

a) Legg staven slik at avstandene mellom holderen F og knivene B og C blir like store. Drei staven til anleggsflaten G blir horisontal.

b) Bestem anleggsflatens vertikale posisjon h som funksjon av belastningen $n \times m$, der $m = 0,5$kg og $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Fremstill måleresultatene grafisk.

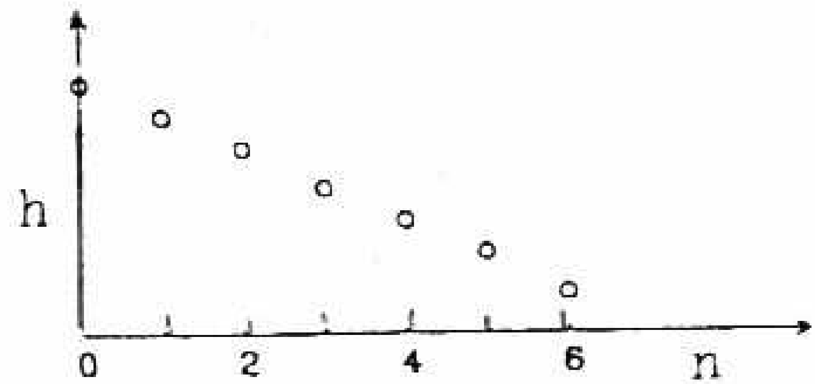
Sammenhengen mellom n og h blir lineær, som antydet i fig. 7.3. Vi ønsker å legge en rett linje $h = An + B$ på beste måte gjennom målepunktene, og bestemme linjens stigningsforhold A med usikkerhet. Dette gjøres ved hjelp av minste kvadraters metode.

Oppgave 2. Utjevning etter minste kvadraters metode

Bestem stigningsforholdet A med usikkerhet s_A.

Oppgave 3. Bestemmelse av elastisitetsmodulen

a) Mål stavens diameter d og avstanden l mellom knivene. Anslå usikkerhetene i d og l.



Figur 7.3: *Målte verdier av n og h.*

b) Beregn E og s_E ved hjelp av uttrykkene

$$E = \frac{4l^3mg}{3\pi|A|d^4},$$

$$s_E = E\sqrt{\left(\frac{s_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{4s_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{3s_l}{l}\right)^2}.$$

Dynamisk bestemmelse av E ved måling av lydhastighet

Denne metoden for bestemmelse av E beror på at utbredelses-hastigheten v for longitudinalbølger i en stav er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

der ρ er mediets tetthet.Utbredelseshastigheten v kan bestemmes ved å måle sammenhørende verdier av frekvens f og bølgelengde λ idet vi har sammenhengen

$$v = \lambda f.$$

Bølgelengde og frekvens kan bestemmes ved måling på en stående bølge i staven. Det kan vises (se Appendiks) at ved frie longitudinelle svingninger i en homogen stav med lengde L opphengt i midtpunktet og med frie ender, får vi stående bølger slik at

$$L = n\frac{\lambda}{2} \text{ der } n = 1, 3, 5, \ldots$$

Ved å gi staven et slag i aksial retning, eksiteres flere av disse stående bølgene (egensvingninger), men den med lengst bølgelengde, $\lambda = 2L$, blir den sterkeste og dempes minst. Etter en kort tid er derfor dette den dominerende bølgen i staven. Ved passende valg av L gir disse svingningene hørbar lyd i luften omkring staven. Frekvensen f kan bestemmes ved å sammenlikne lyden fra staven med lyden fra en høyttaler som er koplet til en tonegenerator. Sammenlikningen foregår ved å observere svevninger mellom lyden fra staven og lyden fra høyttaleren. Målingen går ut på å innstille høyttaleren slik at svevefrekvensen blir så liten som mulig (i grensetilfellet 0), og så måle høyttalerfrekvensen som da er lik frekvensen f for bølgen i staven (grunntonen). Svevningene blir mest utpreget og lettest å høre når de to lydene er omtrent like sterke. For hastigheten v har vi da

$$v = 2Lf.$$

Tettheten ρ til materialet i staven kan bestemmes ved å måle stavens lengde L, diameter d og masse M. Da er

$$\rho = \frac{4M}{\pi d^2 L}.$$

For E får vi uttrykket

$$E = \frac{16MLf^2}{\pi d^2}, \tag{7.1}$$

slik at vi kan bestemme E ved å måle grunntonefrekvensen f og stavens lengde, diameter og masse.

Oppgave 4. Dynamisk bestemmelse av elastisitetsmodulen

a) Mål stavens lengde L, diameter d og masse M. Anslå usikkerhetene i L, d og M.

b) Bruk verdiene for L, d og M sammen med verdien for E funnet ved bøyingsforsøk til å beregne en tilnærmet verdi for grunnfrekensen f fra likning 7.1. Innstill denne frekvensen på tonegeneratoren.

c) La staven henge horisontalt og gi den et aksialt slag med en plasthammer. Etter kort tid er det grunnfrekvensen man hører fra staven.

   Reguler styrken på høyttaleren slik at man tydelig kan høre svevninger mellom lydene fra høyttaleren og staven. Reguler så høyttalerfrekvensen til svevningsfrekvensen er tilnærmet lik null. Den frekvensen man da måler tas som den beste verdi for grunnfrekvensen f. Anslå usikkerheten i f. Beregn verdien av E fra likning 7.1, og usikkerheten i E som er gitt ved

$$s_E = E\sqrt{\left(\frac{2s_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{2s_f}{f}\right)^2 + \left(\frac{s_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{s_M}{M}\right)^2}.$$

Vurdering av overensstemmelse

"Full overensstemmelse" mellom to måleresultater skulle tilsi at differansen D mellom dem er null. På grunn av måleusikkerhet aksepterer vi "overensstemmelse" selv om D er noe forskjellig fra null. Usikkerheten i $D = E_1 - E_2$ er gitt ved

$$s_D = \sqrt{s_{E_1}^2 + s_{E_2}^2}.$$

Hvis $|D| < s_D$ er det derfor stor sannsynlighet for at forskjellen bare skyldes tilfeldige avvik på grunn av måleusikkerhet. I slike tilfeller må vi akseptere at det er "overensstemmelse innenfor måleusikkerheten". Er $|D| > 2s_D$, er det på den annen side liten sannsynlighet for at forskjellen beror på måleusikkerhet.

Oppgave 5. Sammenlikning av verdier for elastisitetsmodulen

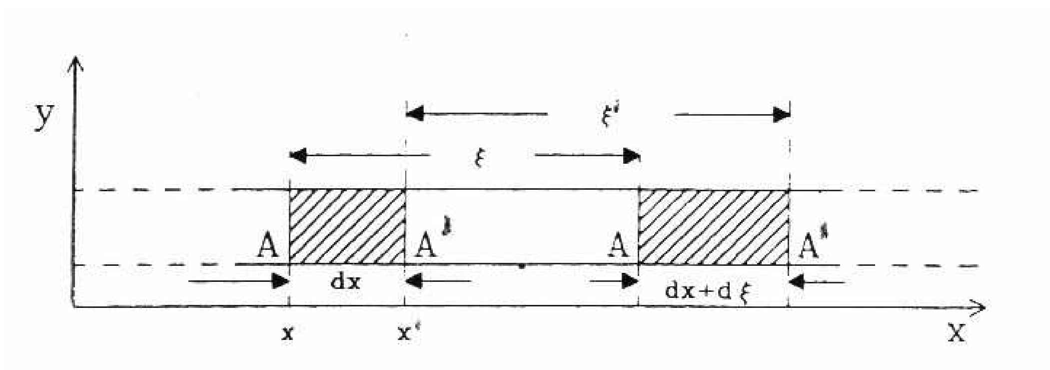
Undersøk om dine to verdier for elastisitetsmodulen kan anses som like innenfor måleusikkerhetene.

Appendiks

Elastiske bølger i en stav

Fig. 4 viser et utsnitt av en rett, jevntykk og homogen stav. Staven befinner seg opprinnelig i en likevektstilstand. Et aksialt støt bringer staven ut av likevektstilstanden ved at hvert tverrsnitt forskyves en strekning ξ i stavens lengderetning. Forskyvningen er en funksjon av tverrsnittets likevektsposisjon x. Den nye tilstanden er vanligvis ikke en likevektstilstand. Staven vil derfor være i bevegelse. Bevegelsen vil være fullstendig beskrevet når vi kjenner ξ som funksjon av posisjonen x og tiden t, dvs. $\xi = \xi(x,t)$. For å bestemme denne funksjonen, tar vi for oss et utsnitt (skravert) av staven mellom tverrsnittene A og A', som i likevektstilstanden har posisjonene x og $x+dx$, se fig. 4. Ved tiden t er forskyvningene av de to tverrsnittene gitt ved $\xi = \xi(x)$ og $\xi' = \xi(x+dx) = \xi + d\xi$. Massen til det skraverte utsnittet er $\mathrm{d}m = \rho_0 A \mathrm{d}x$, der ρ_0 er stavens opprinnelige tetthet. Utsnittets akselerasjon i x-retningen er

$$a = \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$



Figur 4: *Parametre for beskrivelse av elastiske bølger i en stav.*

Resultantkraften $\mathrm{d}F$ på utsnittet i x-retningen skyldes normalspenningen R som virker over A og A'. Normalspenningen er en funksjon av tverrsnittets likevektsposisjon x og t, $R = R(x,t)$. På tverrsnittene A og A' virker følgelig kreftene $AR(x,t)$ og $AR(x+\mathrm{d}x,t)$, som gir

$$\mathrm{d}F = AR(x+\mathrm{d}x,t) - AR(x,t) = A\frac{\partial R(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x.$$

Avstanden mellom A og A' er etter forskyvningen

$$(x' + \xi') - (x + \xi) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}\xi.$$

Den skraverte delen av staven har derfor en relativ forlengelse

$$e = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}.$$

Ifølge definisjonslikningen for elastisitetsmodulen har vi

$$R = Ee = E\frac{\partial \xi}{\partial x},$$

slik at $\mathrm{d}F = AE\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\mathrm{d}x$ Vi benytter til slutt Newtons 2. lov $\mathrm{d}F = a\mathrm{d}m$ og finner bølgelikningen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{der} \quad v^2 = \frac{E}{\rho_0}.$$

Bølgelikningen har løsninger av formen $\xi(x,t) = f(x \pm vt)$, det vil si longitudinelle bølger med forplantningshastighet v.

Stående bølger i en stav festet i midtpunktet.

Vi legger x-aksens origo i stavens midtpunkt som skal ligge fast, slik at $\xi(0,t) = 0$. Kreftene som virker i stavens endepunkter $x = \pm\frac{L}{2}$ er lik null, hvilket medfører at

$$\left(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}\right)_{x=\pm\frac{L}{2}} = 0.$$

Funksjonen $\xi = \frac{\xi_0}{2}[\sin(kx+\omega t)+\sin(kx-\omega t)] = \xi_0 \sin kx \cos \omega t$ tilfredsstiller bølgeliknigen og den første grensebetingelsen såfremt $\frac{\omega}{k} = v$. For å tilfredsstille de andre grensebetingelsene må vi kreve at

$$k\frac{L}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

det vil si $k = (2n+1)\frac{\pi}{L}$. Bølgelengdene $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ svarende til de forskjellige egensvingningene ("normal modes") blir

$$\lambda = 2L, \frac{2L}{3}, \frac{2L}{5}, \ldots$$

Grunntonens frekvens er

$$f = \frac{d}{4}\sqrt{\frac{\pi E}{ML}}.$$

Svevninger

En harmonisk løsning av bølgelikningen har formen

$$\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

der $\frac{\omega}{k} = v$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ og $\omega = 2\pi f$. For en bølge som er sammensatt av to harmoniske bølger, blir

$$\xi = \xi_0[\sin(kx-\omega t)+\sin(k'x-\omega' t)] = 2\xi_0 \cos\frac{(k'-k)x-(\omega'-\omega)t}{2} \sin\frac{(k'+k)x-(\omega'+\omega)t}{2}$$

Hvis $k' \approx k$ og $\omega' \approx \omega$, får vi tilnærmet

$$\xi \approx 2\xi_0 \cos\frac{(\Delta kx - \Delta\omega t)}{2} \sin(kx - \omega t),$$

der $\Delta k = k' - k$ og $\Delta\omega = \omega' - \omega$. Vi ser at bølgen kan oppfattes som et produkt av en raskt svingende del, $2\xi_0 \sin(kx - \omega t)$, og en langsomt svingende del,

$$\cos\frac{(\Delta kx - \Delta\omega t)}{2},$$

med forplantningshastighet $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$. Variasjonene i amplityden til den raskt svingende delen kalles svevninger (eng. beats). Svevningenes frekvens er

$$\frac{|\omega - \omega'|}{2\pi}.$$