Fasit eksamen Fys1000 vår 2009

Oppgave 1

a) Klossen A er påvirka av tre krefter:
1) Tyngda $m_A \vec{g}$ som peker loddrett nedover. Denne er det lurt å dekomponere i en komponent $m_A\, g\, sin\theta$ langs skråplanet nedover til venstre på figuren og komponenten $m_A\, g\, cos\theta$ som står normalt ned mot (det venstre) skråplanet.
2) Normalkrafta $\vec{N}_A$ normalt opp fra det venstre skråplanet
3) Snordraget $\vec{S}_A$ som virker til høgre langs snora (i retning trinsa).
Kreftene på klossen B er også påvirka av tre krefter på tilsvarende måte:
1) Tyngda $m_B \vec{g}$ som peker loddrett nedover. Denne dekomponeres i en komponent $m_B\, g\, sin\theta$ langs skråplanet nedover til høgre på figuren og komponenten $m_B\, g\, cos\theta$ som står normalt ned mot (det høgre) skråplanet.
2) Normalkrafta $\vec{N}_B$ normalt opp fra det høgre skråplanet
3) Snordraget $\vec{S}_B$ som virker til venstre langs snora (i retning trinsa).

Det er viktig å merke seg at snordraget alltid går langs snora, dvs at vektorene $\vec{S}_A$ og $\vec{S}_B$ ikke er paralelle, p.g. trinsa. Merk videre at når snora kan regnes som *masselaus* er snordraget likt i begge ender: $S_A = S_B = S$, der$|\vec{S}_A| = S_A$ og $|\vec{S}_B| = S_B$. (Dersom snora hadde hatt en masse m_{Snor} ville vi fått $S_B - S_A = m_{Snor} \cdot a_{Snor}$. Men for $m_{Snor} = 0$ og/eller $a_{Snor} = 0$ blir altså $S_A = S_B = S$).

Vi skjønner at når $m_B = m_A$ trekker tyngdekreftene (samt snordarget) like mye til høgre som til venstre og akselerasjonen blir null (-se forøvrig pkt b)). Snordraget må balansere komponenten av tyngdekrafta langs (både det til høgre og det til venstre). Snordraget blir altså
$S = m_A\, g\, sin\theta = 0,5 \cdot 9,80 \cdot 0,5$ N $= 2{,}45$ N .

b) Her er det viktig at akselerasjonen a til kloss B nedover til høgre er den samme som for kloss A oppover til høgre fordi systemet med klosser og snor henger sammen. Newton's 2. lov for kloss A gir da (positiv retning til høgre)

$$S \; - \; m_A\, g\, sin\theta \; = \; m_A\, a$$

Tilsvarende for kloss B får vi:

$$m_B\, g\, sin\theta \; - \; S \; = \; m_B\, a$$

Når vi eliminerer snordraget S fra disse to likningene får vi:

$$a \; = \; \frac{m_B - m_A}{m_B + m_A}\, g\, sin\theta$$

Her ser vi,- som kontroll, at $a = 0$ for $m_A = m_B$, jfr. pkt a). For $m_B = 2m_A$ får vi

$$a = \frac{1}{3}\, g\, sin\theta \; = \; \frac{1}{6}\, g \; = \; 1,63\,\mathrm{m/s^2}$$

En kan også tenke seg de to klossene og snora som *ett system* med masse $(m_A + m_B)$, og med krafta $(m_B\, g sin\theta)$ som drar mot høgre og krafta $(m_A\, g sin\theta)$ som drar mot venstre. Da fås direkte:

$$(m_B\, g sin\theta) \;-\; (m_A\, g\, sin\theta) \;=\; (m_A + m_B)\, a$$

som gir samme svar.

Snordraget blir nå $S = m_A\,(a + g\, sin\theta)$. Putter vi inn resultatet for a finner vi

$$S \;=\; \frac{2 m_A\, m_B}{(m_A \;+\; m_B)}\, g\, sin\theta$$

For tilfellet $m_A = m_B$ får vi tilbake resultatet i pkt a). For $m_B = 2m_A$ blir snordraget noe større:

$$S \;=\; \frac{4}{3}\, m_A\, g\, sin\theta \;=\; 3.27\,\mathrm{N}$$

c) Her blir normalkrafta N_A fra skråplanet på klossen $N_A \;=\; m_A\, g\, cos\theta$, mens friksjonskrafta retta oppover langs skråplanet blir $R_A = \mu\, N_A$. Akselerasjonen a i dette tilfelle er gitt ved Newton's 2. lov:

$$m_A g sin\theta - \mu\, m_A\, g\, cos\theta = m_A\, a$$

som gir: $a = g\,(sin\theta \;-\; \mu\, cos\theta)$. Det rette svaret fås da fra formelen $v^2 = 2as$. En kan også bruke energibetraktning der friksjonskrafta gjør et arbeid $s \,\cdot\, R_A$. Vi finner:

$$v \;=\; \sqrt{2 \,\cdot\, 0,2 \,\cdot 9,80\,(0,5 \;-\; 0,1 \,\cdot 0,865)}\;\mathrm{m/s} \;=\; 1,28\,\mathrm{m/s}$$

d) Bevaring av driv (bevegelsesmengde, rørslemengd) gir :

$$m_A\, v_0 \;=\; (m_A \;+\; m_B)\, u$$

som igjen gir det oppgitte resultatet for fellesfarta u etter støytet. Endringa i kinetisk energi blir da:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_A (v_0)^2 \;-\; \frac{1}{2}(m_A + m_B)\, u^2$$

Når vi setter inn for u og bruker $m_B = x \cdot m_A$ får vi:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_A (v_0)^2\,(1 \;-\; (1 + x)(\frac{u}{v_0})^2) \;= E_0 \frac{x}{(1 + x)}$$

For $m_B = 2m_A$ er $x = 2$ som gir $\Delta E = \frac{2}{3}\, E_0$. Dette betyr at 67 % av den kinetiske energien går tapt i kollisjonen.

Oppgave 2

a) Kirchhoffs lov for bevaring av ladning/strøm i forgreiningspunktet gir

$$I = I_1 + I_2 \qquad \text{dvs.} \quad I_2 = I - I_1$$

Kirchoffs lov for spenningsfall gjennom løkka med batteri og motstand R_1 blir:

$$V_0 - I\,r - I_1\,R_1 = 0$$

Spenninga mellom punkta a og b er entydig; -enten en går via motstanden R_1 eller motstanden R_2. Dermed blir:

$$I_1\,R_1 = I_2\,R_2 \qquad \text{dvs.} \quad I_2 = \frac{R_1}{R_2}\,I_1$$

Vi kan nå kombinere dette med den første likninga slik at vi får:

$$I_1 = \frac{I}{(1 + R_1/R_2)}$$

Nå kan denne siste likninga igjen kombineres med samt denne siste til å eliminere likninga som inneholder V_0. og vi finner det oppgitte svaret for I. Videre finner vi fra likninga over det oppgitte svaret for I_1. Da likningene for Kirchoffs lover er symmetriske i størrelsene med indekser 1 og 2, får vi uttrykket for I_2 ved å bytte om alle indekser 1 og 2 i uttrykket for I_1. Dette resultatet finner vi også direkte fra likningene over.

c) Effekten som tilføres motstanden R_1 blir:

$$P_1 = R_1\,(I_1)^2 = \frac{(V_0)^2\,R_1\,(R_2)^2}{[R_1R_2 + r(R_1 + R_2)]^2}\,,$$

d) Etter at vi har fått en stabil situasjon går det ingen strøm gjennom kondensatoren. Dermed blir $I_1 = I$ og $I_2 = 0$. Ladninga (dvs ladningene $\pm Q$ på kodensatoren er nå gitt ved $Q = C\,V_{ab}$. Fordi potensialet er entydig må spenninga (potensialforskjellen) over kondensatoren også bli $V_{ab} = R_1\,I_1$. I dette tilfelle vil (den ene av) Kirchoffs lov(er) fortsatt gi $V_0 - r\,I - R_1\,I_1 = 0$. Med $I = I_1$ får vi nå $I = \frac{V_0}{(r+R_1)}$. Dermed blir $V_{ab} = R_1\,I = \frac{R_1\,V_0}{(r+R_1)}$, slik at ladninga på kondensatorplatene blir:

$$Q = \frac{R_1}{(r + R_1)}\,C\,V_0$$

Oppgave 3

a) Den elektriske feltstyrken E mellom platene er gitt ved $V = E \cdot d$ som gir:

$$E = \frac{V}{d} = \frac{4000}{0,02}\,\text{Volt/m} = 2 \cdot 10^5\,\text{Volt/m}$$

. Dette feltet er retta loddrett på platene fra positiv mot negativ ladning. Ladninga ($\pm Q$) på platene er gitt ved :

$$Q = \sigma \cdot A = \epsilon_0 E\, A = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 0,5\,\text{Coul.} = 8,85 \cdot 10^{-7}\,\text{Coul.}$$

b) Den potensielle energien til en elektrisk partikkel med ladning q i et potensial V er (i absoluttverdi) $U = |q|\,V$. Det er denne energien partikkelen har når den blir sleppt ved den ene plata. Når den kommer fram til den andre plata har den elektriske potensielle energien gått over til kinetisk energi $E_K = \frac{1}{2}\, m\, v^2$. Når vi setter $U = E_K$ (bevaring av energi), får vi den oppgitte formelen for v^2. Når partikkelen er et proton får vi:

$$v = \sqrt{\frac{2\,e\,V}{m_p}} = 0,87 \cdot 10^6\ \text{m/s}$$

c) Krafta på en elektrisk partikkel med ladning q i et magnetfelt $\vec{B}$ er $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$. Partikkelen vil gå i en sirkel fordi krafta, og dermed akselerasjonen alltid er loddrett på farta, og videre at krafta og dermed akselerasjonen er konstant i absoluttverdi fordi $\vec{B}$ er konstant i rommet (feltet er uniformt). $\vec{F} = m\,\vec{a}$ og $|\vec{a}| = v^2/r$ gir da

$$m\frac{v^2}{r} = |q|\,v\,B \qquad \text{som igjen gir} \quad r = \frac{m\,v}{|q|B}$$

Vi kan snu denne likninga slik at vi får

$$m = \frac{r|q|B}{v}$$

Dette betyr at dersom en kjenner $|q|, B$ og v og måler r kan en finne massen m. Dette blir utnytta i *massespektrometeret*, jfr. læreboka, Figur 27.24 på side 930.

d) Radien r i løkka er gitt ved $l = 2\pi r$. Løkka har et areal $A = \pi\, r^2$. Fluksen gjennom løkka blir da $\Phi = A\,B = l^2\,B/(4\pi)$, og fluksendringa i løpet av tida Δt= 0.02 sek blir

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{0 - \Phi}{\Delta t}$$

Den induserte spenninga er $\mathcal{E} = -\Delta\Phi/\Delta t$ slik at den induserte strømmen blir (jfr. Ohms lov):

$$I = \frac{1}{R}\,\frac{\Phi}{\Delta t} = \frac{l^2 B}{4\pi\, R\, \Delta t} = \frac{(0,2)^2 \cdot 2}{4\pi \cdot 0.1 \cdot 0,02}\,\text{Amp.} = 3,2\,\text{Amp.}$$

(I engelsk og nynorsk utgave står det (desverre) at *radien* er 0,2 m. I så fall vil strømmen bli en faktor $(2\pi)^2$*større*.

Retninga for strømmen blir *mot* klokka (positiv omløpsretning),- jfr læreboka side 998, Figur 29.6b .

Oppgave 4

a) $N(0)$ er antall radioaktive kjerner ved tiden $t = 0$, og λ er desintegrasjonskonstanten. λ har enheten invers tid.

b) Halveringstiden for en radioaktiv stoffmengde er den tiden det tar fra $t = 0$ til $t = t_{1/2}$ slik at $N(t_{1/2}) = N(0)/2$:

$$\frac{N(0)}{2} = N(0) \cdot exp(-\lambda \cdot t_{1/2}).$$

Ligningen løses mhp. $t_{1/2}$:

$$\frac{1}{2} = exp(-\lambda \cdot t_{1/2}) \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}}.$$

c) Vi bruker resultatet fra oppgave b) og får:

$$\lambda_{238} = \frac{\ln(2)}{t_{238}} = 1,55 \cdot 10^{-10} \text{ år}^{-1} = 4,91 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}.$$

$$\lambda_{235} = \frac{\ln(2)}{t_{235}} = 9,85 \cdot 10^{-10} \text{ år}^{-1} = 3,11 \cdot 10^{-17} \text{ s}^{-1}.$$

d) Vi skal finne jordas alder, som vi kaller t. Vi forutsetter at mengden av uranisotopene ved tiden $t = 0$ er begge lik $N(0)$. Vi har derfor:

$$N(t)_{238} = N(0) \cdot exp(-\lambda_{238} \cdot t),$$

$$N(t)_{235} = N(0) \cdot exp(-\lambda_{235} \cdot t).$$

Forholdet mellom $N(t)_{238}$ og $N(t)_{235}$ blir da:

$$\frac{N(t)_{238}}{N(t)_{235}} = \frac{99,27}{0,73} = \frac{exp(-\lambda_{238} \cdot t)}{exp(-\lambda_{235} \cdot t)} = exp(-(\lambda_{238} - \lambda_{235}) \cdot t).$$

$$\ln \frac{99,27}{0,73} = 4,912 = (\lambda_{235} - \lambda_{238}) \cdot t \Rightarrow \quad t = 5,92 \cdot 10^{9} \text{ år}.$$

(Det beste estimatet for jordas alder er $4,54 \cdot 10^{9}$ år. Det betyr at det må ha vært noe større andel Uran$_{235}$ ved tiden $t = 0$.)

Oppgave 5

a) Tilstandsligningen for en ideell gass er:

$$p \cdot V = n\,RT.$$

Symbolene er:
p - er gassens trykk i pascal = N/m^2.
V - er gassens volum i m^3
n - er antall mol i volumet V
R - er den molare gasskontant, $R = 8,314$ J/(mol $\cdot$ kelvin)
T - er gassens temperatur i kelvin.

b) Massen til lufta i rommet er: $m = \rho \cdot V = 1,29(\text{ kg/m}^3) \cdot 800 \text{ m}^3 = 1032 \text{ kg}$.

c) Går ut

d) Går ut.