Brøkregning og likninger med teskje

Dette heftet gir en uformell trinn for trinn gjennomgang av grunnleggende regler for brøkregning og likninger. Dette er stoff som vi i FYS 1000 egentlig forventer at dere er godt kjent med fra før, og mange av dere vil synes at dette stoffet er lett. Likevel vet vi av erfaring at det er en del som sliter unødvendig mye med kurset rett og slett fordi skolematematikken ikke sitter helt som den skal. Dette er altså et ekstratilbud til dere som ikke føler dere helt stø på brøkregning og likninger. Les igjennom teksten og gjør så mange (eller få) oppgaver du trenger for å føle at du behersker teknikkene. I dette heftet har vi vært pinlig nøye med å ta med *alle* mellomregningene, slik at det ikke skal være noe som er mystisk. Dette kan være lurt å gjøre i starten, til du føler deg sikker på hva som foregår. Etterhvert bør du være i stand til å gjøre liknende oppgaver nesten automatisk, uten mye grubling. Dersom du blir stående fast kan du spørre gruppelæreren din om hjelp.

LYKKE TIL!

I. BRØKREGNING

Fysikere liker å regne med brøk, fordi det ofte både er mer nøyaktig og mer håndterbart enn desimaltall. For eksempel er $\frac{1}{3} = 0.33333333333333333...$, så hvis vi bruker $\frac{1}{3}$ slipper vi å gjøre unødvendige tilnærmelser. I tillegg vil dere se etterhvert at brøk er praktisk i likninger.

Først repeterer vi noen begreper: Når det står pluss eller minus mellom tall (eller symboler) kaller vi delene for *ledd*. Eks: $4a - b + 3$ har leddene $+4a$, $-b$ og $+3$. Når det står gange eller dele mellom tall (eller symboler) kaller vi delene for *faktorer*. Eks: $\frac{(4a+b)\cdot 7}{2}$ har faktorene $(4a+b)$,7 og $\frac{1}{2}$. *Faktorisering* er å dele opp et tall (eller et uttrykk) i faktorer som kan ganges sammen for å få det opprinnelige tallet. Eks: $18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$, $28 = 7 \cdot 2 \cdot 2$ og $264 = 11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Tallet over brøkstreken kaller vi *teller*, mens tallet under brøkstreken kalles *nevner*. Vi trenger å kunne forkorte brøker og vite hvordan brøker oppfører seg ved addisjon, substraksjon, multiplikasjon og divisjon.

A. Forkorting av brøk

Vi forsøker alltid å jobbe med så enkle tall som mulig, derfor faktoriserer vi teller og nevner for å sjekke om en brøk inneholder like faktorer over og under brøkstreken. Hvis den gjør det kan den *forkortes*. Nedenfor følger noen eksempler:

$$\frac{18}{12} = \frac{3\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{20}{32} = \frac{5\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \underline{\underline{\frac{5}{8}}}$$

$$\frac{15}{6} = \frac{5\cdot 3}{3\cdot 2} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{15}{4} = \frac{5\cdot 3}{2\cdot 2} = \underline{\underline{\frac{15}{4}}}$$

Som vi ser kan ikke alle brøker forkortes.

B. Addisjon og substraksjon av brøk

Når vi skal legge sammen eller trekke fra hverandre brøker dreier mye seg om å finne *felles nevner* og sette på *felles brøkstrek*. Nevneren kan endres med å gange med det samme tallet både over og under brøkstreken. Eksemplene nedenfor viser hvordan det gjøres:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

$$\frac{4}{7} - \frac{1}{2} = \frac{4\cdot 2}{7\cdot 2} - \frac{1\cdot 7}{2\cdot 7} = \frac{8}{14} - \frac{7}{14} = \frac{8-7}{14} = \underline{\underline{\frac{1}{14}}}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1\cdot 3}{4\cdot 3} + \frac{1\cdot 2}{6\cdot 2} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3+2}{12} = \underline{\underline{\frac{5}{12}}}$$

$$2 - \frac{3}{5} = (2\cdot\frac{5}{5}) - \frac{3}{5} = \frac{10}{5} - \frac{3}{5} = \frac{10-3}{5} = \underline{\underline{\frac{7}{5}}}$$

C. Multiplikasjon og divisjon av brøk

Å gange eller dele brøker er mer rett fram, vi ganger (eller deler) teller med teller og nevner med nevner. Husk at et helt tall kan skrives som en brøk der nevneren er 1, feks $3 = \frac{3}{1}$. Nedenfor følger noen eksempler:

$$\frac{1}{7} \cdot 2 = \frac{1\cdot 2}{7\cdot 1} = \underline{\underline{\frac{2}{7}}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{1\cdot 4}{2\cdot 1} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} = \underline{\underline{\frac{8}{15}}}$$

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

$$\frac{5}{3} : \frac{1}{3} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{1}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{1}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{1} = \frac{5\cdot 3}{3\cdot 1} = \frac{5}{1} = \underline{\underline{5}}$$

Her vil den observante leser oppdage at det å dele på en brøk blir det samme som å gange med den omvendte brøken.

D. Brøk med både tall og symboler

I fysikk bruker vi mye algebra. I stedet for å måtte gjøre lange og kompliserte utregninger hver gang vi har ett nytt måleresultat kan vi gjøre utregningen ett stykke på vei med symboler. Så kan vi bytte ut symbolene i svaret med nye verdier etterhvert som det passer.

Symbolene kan være nesten hva som helst. I algebra begynner man ofte først i alfabetet på a og b og i likninger brukes ofte x og y, men det blir ikke noe anderledes om vi bytter ut med feks L eller g eller den greske bokstaven θ (theta). I fysikken har symbolene navn etter hvilken fysisk størrelse de representerer, feks T for temperatur, m for masse, t for tid, P for trykk eller v for fart. De samme regnereglene gjelder for symboler som for tall. Noen eksempler på regning med symboler:

$$\begin{gathered} a+a=\underline{\underline{2a}} \\ 8a-5a=\underline{\underline{3a}} \\ a\cdot a=\underline{\underline{a^2}} \\ a\cdot a\cdot a=\underline{\underline{a^3}} \\ \tfrac{a}{a}=\underline{\underline{1}} \\ \tfrac{5a}{a}=\underline{\underline{5}} \\ \tfrac{a}{5a}=\underline{\underline{\tfrac{1}{5}}} \\ \tfrac{2a}{4}=\underline{\underline{\tfrac{a}{2}}} \end{gathered}$$

Eksempler på brøkregning med symboler:

$$\begin{gathered} \tfrac{a}{2}+\tfrac{a}{4}=\tfrac{a\cdot 2}{2\cdot 2}+\tfrac{a}{4}=\tfrac{2a+a}{4}=\underline{\underline{\tfrac{3a}{4}}} \\ \tfrac{a}{7}-\tfrac{1}{b}=\tfrac{a\cdot b}{7\cdot b}-\tfrac{1\cdot 7}{b\cdot 7}=\tfrac{ab}{7b}-\tfrac{7}{7b}=\underline{\underline{\tfrac{ab-7}{7b}}} \\ \tfrac{3}{a}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{3\cdot 4}{a\cdot 4}+\tfrac{1\cdot a}{4\cdot a}=\tfrac{12}{4a}+\tfrac{a}{4a}=\underline{\underline{\tfrac{12+a}{4a}}} \\ \tfrac{1}{7}\cdot u=\tfrac{1\cdot u}{7\cdot 1}=\underline{\underline{\tfrac{u}{7}}} \\ \tfrac{1}{2}:\tfrac{x}{3}=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{x}=\underline{\underline{\tfrac{3}{2x}}} \end{gathered}$$

Hvis du er usikker på om det du har gjort stemmer kan du alltid sjekke det med å sette inn et tall for symbolet. Setter $a=1$ i det første regnestykket og sammenlikner det opprinnelige uttrykket...

$$\tfrac{a}{2}+\tfrac{a}{4}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{1\cdot 2}{2\cdot 2}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{2+1}{4}=\underline{\underline{\tfrac{3}{4}}}$$

med sluttsvaret

$$\tfrac{3a}{4}=\tfrac{3\cdot 1}{4}=\underline{\underline{\tfrac{3}{4}}}$$

...og ser at begge gir samme svar, slik de skal. Ser også at den siste utregningen er kortere enn den første, og da begynner vi å nærme oss det som er poenget med å regne med symboler...

Når vi regner med symboler blir det ekstra nyttig å ha klart for seg hvilke regler som gjelder for rekkefølgen vi utfører regneoperasjoner. Hvis det står $4\cdot 3+1$ vet vi at vi at vi skal regne ut $4\cdot 3$ først og så legge til 1, slik at svaret blir 13. Hvis det derimot står $4(3+1)$ skal vi regne ut $3+1$ først og så gange med 4, slik at svaret blir 16. Dette er viktig å huske når vi regner med brøk. Eksempel: Brøken $\frac{4\cdot a+1}{4}$ kan ikke forkortes og blir bare $\frac{4a+1}{4}$, mens brøken $\frac{4(a+1)}{4}$ lett kan forkortes til $\frac{4}{4}\cdot\frac{a+1}{1}=1\cdot(a+1)=a+1$, dvs at vi kan stryke et firetall over og under brøkstreken. Når vi regner med brøk og likninger bruker vi dette mye motsatt vei: Vi faktoriserer alle tallene og leter etter felles faktorer som vi kan sette utenfor en parentes. Nedenfor finner du noen eksempler på dette:

$$\begin{gathered} \tfrac{3a+6}{3}=\tfrac{3\cdot a+3\cdot 2}{3}=\tfrac{3(a+2)}{3}=\underline{\underline{a+2}} \\ \tfrac{5a+a^2}{15+3a}=\tfrac{5\cdot a+a\cdot a}{5\cdot 3+3\cdot a}=\tfrac{a(5+a)}{3(5+a)}=\underline{\underline{\tfrac{a}{3}}} \\ \tfrac{12a+6ab}{18a^2+6a}=\tfrac{6\cdot 2\cdot a+6\cdot a\cdot b}{6\cdot 3\cdot a\cdot a+6\cdot a}=\tfrac{6a(2+b)}{6a(3a+1)}=\underline{\underline{\tfrac{2+b}{3a+1}}} \end{gathered}$$

II. LIKNINGER

Likninger forteller oss noe om sammenhengen mellom ulike størrelser, feks sammenhengen mellom tid (t), avstand (x) og fart(v) som er gitt ved $t=\frac{x}{v}$. Vi ser at for en konstant avstand vil det ta kortere tid jo høyere farten er. Hvis det derimot er hastigheten som er konstant og vi vil vite hvor langt vi kan komme i løpet av forskjellige tidsrom må vi omforme likningen slik at det er x som står alene:

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{v} \\ t\cdot v &= \frac{x}{v}\cdot v \\ x &= v\cdot t \end{aligned} \tag{1}$$

For å skille mellom konstanter og variable kan vi markere hva som er variabelen på følgende måte:

$$x(t)=vt$$

...betyr at vi skal behandle den tilbakelagte avstanden som en funksjon av tiden, mens farten er konstant.

$$x(v) = vt$$

...betyr at vi skal behandle den tilbakelagte avstanden som en funksjon av farten, mens tiden er konstant.

A. Å løse likninger

Dere vil ganske snart møte likninger som er vesentlig mer innviklet enn eksempelet over, så da gjelder det å sørge for at det grunnleggende sitter. Det sentrale i en likning er likhetstegnet (=). Det forteller oss rett og slett at det som står på den ene siden er lik det som står på den andre siden. Med andre ord kan alle regnereglene for likninger oppsummeres i en setning: Så lenge du passer på å gjøre den samme regneoperasjonene på begge sider av likhetstegnet er du trygg. Nedenfor følger noen eksempler:

Finn a:

$$\begin{aligned} 2a+1 &= 3 \\ 2a+1-1 &= 3-1 \\ 2a &= 2 \\ \frac{2a}{2} &= \frac{2}{2} \\ a &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Som du ser kan vi altså flytte et ledd, i dette tilfellet +1, over på motsatt side av likhetstegnet så lenge vi skifter fortegnet. Det som *egentlig* skjer er at vi trekker fra det samme leddet på begge sider. Vi kan også *stryke* ledd eller faktorer som finnes på begge sider av et likhetstegn. I eksempelet over kunne vi stryke 2 i $2a = 2$. Det som *egentlig* skjedde var at vi delte på 2 på begge sider. Tilsvarende kan vi stryke feks -4 i $2a - 4 + b = c - 4$ og få $2a + b = c$. Det som *egentlig* skjer er at vi legger til $+4$ på begge sider: $2a - 4 + b + 4 = c - 4 + 4$.

Finn b:

$$\begin{aligned} 3a+b &= 5a \\ 3a+b-3a &= 5a-3a \\ b &= 2a \end{aligned} \tag{3}$$

Finn a i det samme uttrykket:

$$\begin{aligned} 2a &= b \\ \frac{2a}{2} &= \frac{b}{2} \\ a &= \frac{1}{2}b \end{aligned} \tag{4}$$

I fysikken vil du møte likninger når du skal løse fysiske problemer, og som oftest må du sette opp likningene selv utifra de opplysningene du har tilgjengelig. Tenk deg feks at en ball kastes rett oppover med en hastighet $v_{0_y} = 7.00$ m/s. Tyngdens akselerasjon er $g = 9.80$ m/s^2. På ett eller annet tidspunkt vil ballen snu og begynne å falle nedover. Hvor lang tid bruker ballen opp til dette toppunktet?

Bruker en bevegelseslikninger som dere kommer til å lære første uka for å løse dette:

$$v_y = v_{0_y} + a_y t \tag{5}$$

Hvorfor velger vi denne likningen? Vel, la oss gå igjennom de opplysningene vi har fått oppgitt: Vi kjenner utgangshastigheten $v_{0_y} = 7.00$ m/s og akselerasjonen som er $a_y = -g = -9.80$ m/s^2 (det blir minus fordi tyngdekraften virker nedover). I tillegg kan vi tenke oss til at i toppunktet der ballen snur må farten være $v_y = 0$ m/s. Da ser vi at den eneste ukjente størrelsen i likningen er t, som jo er akkurat det vi vil finne. Omformer likningen slik at vi får t alene på den ene siden:

$$\begin{aligned} v_y - v_{0_y} &= v_{0_y} - v_{0_y} + a_y t \\ a_y t &= v_y - v_{0_y} \\ \frac{a_y t}{a_y} &= \frac{v_y - v_{0_y}}{a_y} \\ t &= \frac{v_y - v_{0_y}}{a_y} \end{aligned} \tag{6}$$

Setter inn verdiene fra over:

$$\begin{aligned} t &= \frac{0\,\mathrm{m/s} - 7.00\,\mathrm{m/s}}{-9.80\,\mathrm{m/s}^2} \\ t &= 0.71\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{7}$$

Altså har vi funnet ut at det tar 0.71 s for ballen å nå toppunktet.

III. OPPGAVER

A. Forkorting av brøk

a) $\frac{3}{9} =$

b) $\frac{24}{3} =$

c) $\frac{64}{28} =$

d) $\frac{21}{14} =$

e) $\frac{34}{4} =$

f) $\frac{20a}{4} =$

g) $\frac{a^2}{3a} =$

h) $\frac{4+2a}{6} =$

i) $\frac{6a^2-3a}{2a-1} =$

j) $\frac{2a-12b+8}{-3a+18b-12} =$

B. Addisjon og substraksjon av brøk

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} =$

b) $\frac{2}{7} + \frac{1}{2} =$

c) $\frac{1}{9} + \frac{1}{6} =$

d) $\frac{4}{3} + \frac{1}{2} =$

e) $\frac{3}{4} + 5$

f) $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} =$

g) $\frac{2}{7} - \frac{1}{2} =$

h) $\frac{7}{5} - \frac{1}{3} =$

i) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} =$

j) $\frac{3}{5} - \frac{5}{7} =$

C. Multiplikasjon og divisjon av brøk

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} =$

b) $\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3} =$

c) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} =$

d) $\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{4} =$

e) $\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{4} =$

f) $\frac{1}{2} : \frac{4}{5} =$

g) $\frac{2}{3} : \frac{1}{6} =$

h) $\frac{2}{5} : \frac{8}{2} =$

i) $\frac{7}{2} : \frac{3}{2} =$

j) $\frac{2}{5} : \frac{2}{3} =$

D. Likninger

Finn a:

a) $a^2 + 4 = 8$

b) $2a - 4 = 3a + 2$

c) $a + 13 = 3a + 1$

d) $2a - 5 = 3 - 7a$

e) $5a - 2b + 3 = 3a + 7$

f) $3a + b = 4b - 3$

g) $\frac{3}{4}c - 2ac = \frac{1}{2}c + 6bc$

Finn b:

h) i oppgave e) over

i) i oppgave f) over

j) i oppgave g) over

IV. FASIT

A. Forkorting av brøk

a) $\frac{1}{3}$, b) 8, c) $\frac{16}{7}$, d) $\frac{3}{2}$, e) $\frac{17}{2}$, f) $5a$, g) $\frac{a}{3}$, h) $\frac{2+a}{3}$, i) $3a$, j) $-\frac{2}{3}$

B. Addisjon og substraksjon av brøk

a) $\frac{8}{15}$, b) $\frac{11}{14}$, c) $\frac{5}{18}$, d) $\frac{11}{6}$, e) $\frac{23}{4}$, f) $\frac{2}{15}$, g) $-\frac{3}{14}$, h) $\frac{16}{15}$, i) $\frac{1}{3}$, j) $-\frac{4}{35}$

C. Multiplikasjon og divisjon av brøk

a) $\frac{2}{5}$, b) $\frac{2}{21}$, c) $\frac{1}{6}$, d) $\frac{3}{10}$, e) $\frac{1}{7}$, f) $\frac{5}{8}$, g) 4, h) $\frac{1}{10}$, i) $\frac{7}{3}$, j) $\frac{3}{5}$

D. Likninger

a) $a = 2$, b) $a = -6$, c) $a = 6$, d) $a = \frac{8}{9}$, e) $a = b + 2$, f) $a = b - 1$, g) $a = \frac{1}{8} - 3b$, h) $b = a - 2$, i) $b = a + 1$, j) $b = \frac{1}{24} - \frac{1}{3}a$