FASIT
Ukeoppgave FYS 1000 uke 8 vår 2010

Oppgave 1

a) Leddene i likningen er to ulike uttrykk for akselerasjonen, $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ og $a = \frac{F}{m} = \frac{k}{m}x$. Begge utrykkene må gi samme akselerasjon: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{m}x$.

b) A er amplituden, dvs maksimalutslaget for x. ω er sirkelfrekvensen: $\omega = \sqrt{k/m}$. ϕ er fasevinkelen, der $x(0) = A\sin(\phi)$.

c)

$$\frac{A}{2} = A\sin(\phi) \Rightarrow \sin(\phi) = 0,5 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{6}(= 30°). \tag{1}$$

d) Perioden T er gitt ved $\omega \cdot T = 2\pi$, dvs:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2}$$

e) Farten finner vi ved å derivere $x(t)$:

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi) \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
x = 0 \Rightarrow \quad & \omega t + \phi = 0 & \Rightarrow v = \pm A\omega \quad & (4)\\
x = \frac{A}{2} \Rightarrow \quad & \omega t + \phi = \tfrac{\pi}{6},\, \tfrac{5\pi}{6}... & \Rightarrow v = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A\omega \quad & (5)\\
x = A \Rightarrow \quad & \omega t + \phi = \tfrac{\pi}{2} & \Rightarrow v = 0 \quad & (6)\\
& & & (7)
\end{aligned}$$

f) Mekanisk energi er bevart: Når $x = 0$ er $E_p = 0$ og $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = E_{tot}$.
Når $x = A$ er $E_p = \frac{1}{2}kA^2 = E_{tot}$ og $E_k = 0$.
For mellomtilfellet $x = \frac{A}{2}$ er $E_p + E_k = E_{tot}$.
Dermed får vi for $x = 0$:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}}A = A\omega, \tag{8}$$

for $x = A$:

$$v = 0 \tag{9}$$

og for $x = \frac{A}{2}$:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(A/2)^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}A = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega A \tag{10}$$

g) $v(t) = 0$ når $\cos(\omega t + \phi) = 0$, dvs når $\omega t + \phi = \pi/2,\, 3\pi/2,\, 5\pi/2...$ Men siden $\phi = \pi/6$ får vi:

$$t = \frac{1}{\omega} \cdot (\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}...) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{(3n-2)\pi}{3},\ n = 1,\, 2,\, 3... \tag{11}$$

Oppgave 2

a)

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{500\,\mathrm{s}^{-1}} = 0,002\,\mathrm{s}. \tag{12}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = 0,5\,\mathrm{m} \cdot 500 s^{-1} = 250\,\mathrm{m/s}. \tag{13}$$

b) Argumentet i sinusfunksjonen er en vinkel. Sinus får samme verdi om vinkelen øker med 360 grader eller 2π radianer. Samtidig gir selve definisjonen på en vandrende bølge at utsvinget skal være det samme i en avstand på èn bølgelengde langs x-aksen. Dermed har vi følgende formel:

$$A \sin[k((x+\lambda) - vt)] = A \sin[k(x - vt) + 2\pi], \tag{14}$$

Som gir:

$$[kx + k\lambda - kvt] = [kx - kvt + 2\pi], \tag{15}$$

dvs: $k\lambda = 2\pi$, eller bølgetallet uttrykt ved bølgelengden er $k = 2\pi/\lambda$. Tallverdien blir:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{0,5\,\mathrm{m}} = 12,5\,\mathrm{m}^-1. \tag{16}$$

c) Den transversale farten er definert ved $v_y = dy/dt$, som gir:

$$v_y = -Akv \cos[k(x - vt)]. \tag{17}$$

Den maksimale tallverdien $v_{y\,max}$ oppnås når cosinus er lik 1:

$$v_{y\,max} = |Akv| = 0,01\,\mathrm{m} \cdot 12,57\,\mathrm{m}^{-1} \cdot 250\,\mathrm{m/s} = 31,4\,\mathrm{m/s}. \tag{18}$$

d) I avstanden $x = 0,1$ m fra origo inntreffer dette første gang når følgende ligninger er oppfylt:

$$kx - kvt = 0\,\text{som gir}\,t = \frac{x}{v} = \frac{0,1\,\mathrm{m}}{250\,\mathrm{m/s}} = 0,0004\,\mathrm{s}. \tag{19}$$

e) Det blir stående bølger langs strengen fordi den bølgen som treffer festepunktet i enden av strengen reflekteres slik at man får møtende bølger med samme bølgelengde og periode, men motsatt fase. De møtende bølgene interferer med hverandre. Resultanten representerer energi i form av svingninger, men ikke forflyttning av energi noe sted. Den stående bølgen får knutepunkter der hvor strengen henger fast, i dette tilfellet i endene. Ved å holde strengen forsiktig i ro et vilkårlig sted tvinger man frem et knutepunkt på dette stedet og endrer utvalget av mulige bølgelengder.

f) Grunntonen har en bølgelengde $\lambda = 2L$, hvor L er strengens lengde. Grunntonefrekvensen blir da:

$$f = \frac{v}{2L} = \frac{250\,\mathrm{m/s}}{2 \cdot 1\,\mathrm{m}} = 125\,\mathrm{Hz}. \tag{20}$$