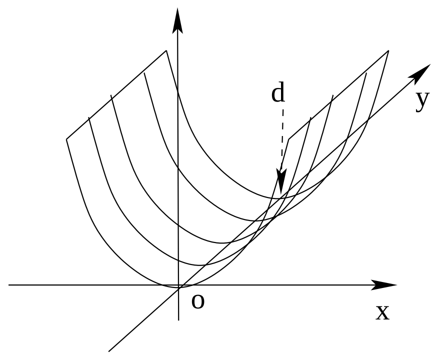
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS 203
Eksamensdag: Mandag 2.juni 2003
Tid for eksamen: 0900 - 1500
Oppgavesettet er på 3 sider
Tillatte hjelpemidler:
Clark: Physical and Mathematical Tables
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken
Oliver and Boyd: Science Data Book
Tabeller i fysikk for den videregående skole
Rottmann: Matematisk formelsamling
Godkjent numerisk elektronisk kalkulator
To sider egne notater

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene



Figur 1: Potensialet partiklene beveger seg i.

Oppgave 1: En klassisk ideel gass i to dimensjoner

1a: Vi skal studere en klassisk ideel gass av N partikler med masse m som beveger seg i potensialet ovenfor. I y-retningen er det ugjennomtrengelige vegger ved $y = 0$ og $y =$ d og i x-retningen er partiklene påvirket av potensialet $V = (1/2)m\omega^2 x^2$. Vis at partisjonsfunksjonen er gitt som

$$Z = \frac{d^N \sinh^{-N}(\beta\hbar\omega/2)}{N!}\left(\frac{2m}{\pi\hbar^2\beta}\right)^{N/2} \tag{1}$$

1b: Beregn den midlere energien U til systemet og diskuter resultatet i grensene $T \to 0$ og $T \to \infty$. Kunne du forutsagt disse resultatene ved hjelp av ekvipartisjonsprinsippet og uten å beregne Z ?

1c: Beregn varmekapasiteten $C_d = \partial U/\partial T|_d$ og diskuter kort resultatet i forhold til Einstein-krystallen.

1d: Beregn entropien S. Er den ekstensiv?

1e: Holder termodynamikkens 3. lov. Diskuter kort svaret.

Oppgave 2: Langevin ligningen for en enkelt partikkel og et system av to partikler

2a: Langevin ligningen for en enkelt partikkel med masse m som beveger seg i to dimensjoner, kan skrives

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\alpha \mathbf{v} + \mathbf{F}(t) \tag{2}$$

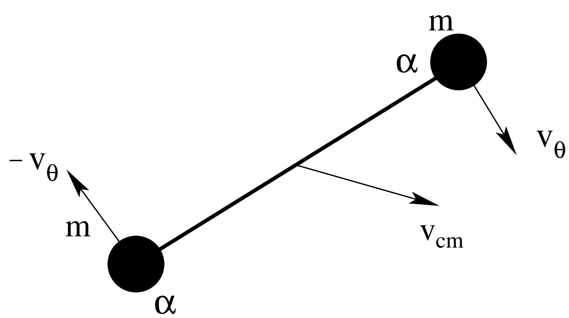
der

$$\langle F_i(t) F_j(0) \rangle = 2\alpha k_B T \delta(t) \delta_{ij} \ , \tag{3}$$

der i og j står for kartesiske komponenter x eller y. Forklar kort hva symbolene ellers står for og hva ligningene beskriver.

2b: Finn løsningen $\mathbf{v}(t)$ (hint: multipliser hele ligningen med $e^{(\alpha t/m)}$) og beregn $\langle v_x(t) v_x(0) \rangle$.

2c: Vis at løsningen for $\langle v_x(t) v_x(0) \rangle$ stemmer med ekvipartisjonsprinsippet.



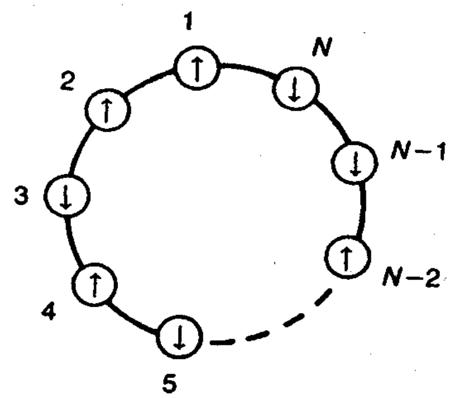
Figur 2: To partikler forbundet med en stiv masseløs stav.

2d: Vi skal nå se på to partikler som er stivt forbundet som i figuren ovenfor. Begge partiklene har samme masse og α. Vi skal beskrive systemet med massesenter hastigheten $\mathbf{v}_{cm}$ og partikkelhastighetene relativt til massesenteret $\mathbf{v}_{\Theta}$, som illustrert i figuren ovenfor.

Det er enkel transformasjonsoppgave (som ikke trenger å utføres!) å vise at enpartikkel Langevin ligningen gir følgende ligningsett for disse hastighetene

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}}_{cm} &= -\alpha \mathbf{v} + \mathbf{F}^{cm}(t) & (4) \\ m\dot{v}_{\Theta} &= -\alpha v_{\Theta} + F_{\Theta}(t) & (5) \\ \langle F_x^{cm}(t) F_x^{cm}(0) \rangle &= \langle F_{\Theta}(t) F_{\Theta}(0) \rangle = 2A k_B T \delta(t) & (6) \end{aligned}$$

Samme ligning som ovenfor gjelder for $F_y^{cm}(t)$. Vis ligning (4) fra defininsjonen av massesenterhastighet $\mathbf{v}_{cm} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2$ (der $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er partikkelhastighetene i et treghetsystem) og finn A. Skriv ned $\langle v_{\Theta}(t) v_{\Theta}(0) \rangle$ og $\langle v_{cm\,x}(t) v_{cm\,x}(0) \rangle$ og vis at ekvipartisjonsprinsippet holder også her.



Figur 3: Et en-dimensjonalt periodisk gitter med N gitterpunkter.

Oppgave 3: Virkningen av de magnetiske vekselvirkninger i en en-dimensjonal Ising modell

Vi skal se på Ising modellen med Hamilton funksjonen

$$E\{s_i\} = -\epsilon \sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} - \mu B \sum_{i=1}^{N} s_i \tag{7}$$

der $s_i = \pm 1$ og $s_{N+1} = s_1$.

3a: Vis at når spinn koblingskonstanten, $\epsilon = 0$ er partisjonsfunksjonen

$$Z_N = (2\cosh \beta\mu B)^N\,, \tag{8}$$

hvor $\beta = (kT)^{-1}$ og T er temperaturen.

3b: Beregn fra dette det magnetiske momentet M. Plot skjematisk M som funksjon av B for noen forskjellige T.

3c: Bruk nå middelfeltteori til å beregne Z_N, skriv ned et uttrykk for M (eller $\langle s \rangle$) og diskuter grensene $(T \to 0)$ og $(T \to \infty)$

3c: Finn den kritiske (Curie-) temperaturen T_C når $B = 0$ og analyser oppførselen til M nær T_C når både M og $\Delta\beta = 1/(k_B T) - 1/(k_B T_c)$ er små. Bruk dette til å finne M som funksjon av $(T - T_C)$ når $|T - T_C| \ll T_C$. Plot resultatet. Hva er den kritiske eksponenten som relaterer M og T?