UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Exam FYS 3130
Eksamensdag: Onsdag 16.juni 2004
Tid for eksamen: 0900 - 1200
Oppgavesettet er på 2 sider
Tillatte hjelpemidler:
Clark: Physical and Mathematical Tables
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken
Oliver and Boyd: Science Data Book
Tabeller i fysikk for den videregående skole
Rottmann: Matematisk formelsamling
Godkjent numerisk elektronisk kalkulator

Kontrollér at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene

Oppgave 1: Ultra-relativistisk klassisk gass

1(a) Vi betrakter en ultra relativistisk gass av N identiske partikler med energien $\epsilon = cp$. Her er p impulsen og c lyshastigheten.

Beregn partisjonsfunksjonen ved hjelp av klassisk statistikk (Boltzmann) og vis at gassen tilfredstiller tilstandsligningen

$$PV = NkT\,.$$

Her P er trykket, V volumet og N antall partikler.

1(b) Vis relasjonen

$$PV = U/3\,,$$

hvor U er den interne energien.

1(c) Hva er forholdet $\gamma = C_P/C_V$ for en slik gass?

1(d) Beregn den termiske de Broglie bølgelengden λ_T. Sammenlign denne lengden med den midlere avstanden mellom partiklene og finn den temperaturen der beskrivelsen basert på klassisk statistikk ventes å miste sin gyldighet for en ultrarelativistisk gass.

Oppgave 2: En avgrenset Bose gass

Betrakt en *klassisk* ideell Bose gass som er avgrenset av et *to-dimensjonalt* harmonisk potensial

$$V(\mathbf{r}) = \frac{m\omega_0^2\mathbf{r}^2}{2}\,. \tag{1}$$

Her er m partikkelens masse, mens frekvensen ω_0 karakteriserer styrken på potensialet.

Ordet *klassisk* indikerer at vi kan neglisjere energinivåenes diskrete natur og beskrive systemet ved en klassisk Hamilton funksjon

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 \mathbf{r}_i^2}{2} \right) ,$$

og erstatte summen over diskrete kvantetall α, med integrasjonen over klassiske impulser og koordinater

$$\sum_{\alpha} \to \int \frac{d^2p \; d^2r}{h^2} .$$

Her er $h \equiv 2\pi\hbar$ Plancks konstant. Bruk disse tilnærmelsene

2(a) Vis at antallet en-partikkel tilstander, $\mathcal{N}(\varepsilon)$, som har energier mindre enn ε er gitt ved uttrykket

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{2s+1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{\hbar\omega_0} \right)^2 . \tag{2}$$

2(b) Bruk ligning (2) til å vise at tilstandstettheten, $g(\varepsilon)$, er gitt ved uttrykket

$$g(\varepsilon) = \frac{(2s+1)\varepsilon}{(\hbar\omega_0)^2} . \tag{3}$$

2(c) Beregn temperaturen T_c for Bose kondensasjonen og diskuterer dens avhengighet av partikkeltallet N og frekvensen ω_0.

Hint: (i) Det er nyttig å huske at det kjemiske potensialet, som er definert ved normaliseringsbetingelsen

$$\int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)\, d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/kT} - 1} = N ,$$

er null ved $T = T_c$.
(ii) du kan muligens komme til å trenge integralet

$$\int_0^\infty \frac{x\, dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6} .$$

2(d) Finn antallet kondenserte og ikke-kondenserte partikler ved $T < T_c$ som en funksjon av temperaturen.

Hint: Husk at i hele temperatur intervallet $T < T_c$ er det kjemiske potensialet 0, og at Bose distribusjonen beskriver partiklene som ikke er kondensert, $N_{\varepsilon>0}$.

2(e) Ved $T < T_c$, beregn den interne energien U og den spesifikke varmekapasiteten C.

Hint: Du kan komme til å trenge integralet

$$\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{e^x - 1} = 2\zeta(3) \approx 2.4 ,$$

hvor $\zeta(x)$ er Riemanns ζ-funksjon.

2(f) Finn en typisk radius, a, som partiklene vil holde seg innenfor når de er i potensialet (1) ved temperaturen T. Vis ved å sammenligne a med den termiske de Broglie bølgelengden $\lambda = \hbar/\sqrt{2mkT}$ at resultatene for en klassisk, avgrenset gass bare er gyldige når $\hbar\omega_0 \ll kT$.