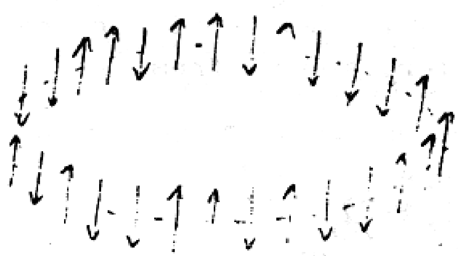
UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: FYS 203 - Statistisk fysikk.
Eksamensdag: Lørdag 9.juni 1990.
Tid for eksamen: Kl.0900-1500.
Oppgave settet er på 4 sider.
Vedlegg:
Tillatte hjelpemidler: Godkjente elektroniske regnemaskiner. Clark: Physical and Mathematical Tables. Oliver & Boyd: Science Data Book. Matematiske og fysiske tabeller for gymnaset. Rottmann: Matematishe Formelsammlung.

<u>**Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.**</u>



Oppgave 1

Hamilton-funksjonen for en ringformet kjede med N Ising-spinn $\sigma_i = \pm 1$ er gitt på formen

$$H = -\varepsilon \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} , \qquad (\sigma_{N+1} = \sigma_1)$$

der vekselvirkningsenergien ε er en konstant. Partisjonsfunksjonen for denne kjeden kan skrives på formen

$$(1) \quad Q_N = 2^N((\cosh\beta\varepsilon)^N + (\sinh\beta\varepsilon)^N)$$

der $\beta = 1/kT$, T = temperaturen og k = Boltzmanns konstant. Uttrykket (1) forlanges ikke utledet.

a) Utled partisjonsfunksjonen for det tilfellet at N = 4. Vis at resultatet stemmer med den generelle formel (1).

b) Beregn systemets energi U og presiser hva slags energi dette er. Beregn varmekapasiteten C og skisser C som funksjon av T.

c) Finn middelverdiene $\langle\sigma_1\rangle$ og $\langle\sigma_1\sigma_2\rangle$!

Oppgave 2

Vi skal studere adsorpsjon* av gassmolekyler på en overflate.

Flaten har N_o adsorpsjonssentre og adsorberer N gassmolekyler ($N \leq N_o$). Vi ser bort fra vekselvirkningen mellom de adsorberte molekylene.

Et adsorpsjonssenter som ikke har et adsorbert molekyl, betegnes som tilstand 0, og et som har et molekyl med energi ε_i betegnes som tilstand "i". Hvert av sentrene kan da anta tilstandene 0,1,2, ... uavhengig av hverandre.

a) Vis at den stor-kanoniske partisjonsfunksjonen for dette tilfellet er

$$Q_g = (1 + e^{\beta\mu}q)^{N_o} ,$$

der $\beta = 1/kT$, μ = kjemisk potensial og $q = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_i}$ er partisjonsfunksjonen for et enkelt adsorbert molekyl.

b) Vis deretter at det kjemiske potensial er

$$\mu = kT[\ln \frac{\bar{N}}{N_o-\bar{N}} - \ln q] ,$$

der $\bar{N}$ er middelverdien av N.

c) Ved å skrive ut høyre siden av det oppgitte uttrykket for Q_g, eller på annen måte, skal en vise at den kanoniske partisjonsfunksjonen er lik

$$Q = \frac{N_o!}{N!(N_o-N)!} q^N .$$

Finn deretter det kjemiske potensial μ ved å benytte Q. Sammenlign med svaret i b) og kommentér resultatet.

* adsorpsjon: dannelse av et tynt lag av et (fremmed) stoff på en ugjennomtrengelig flate.

Oppgave 3

En relativistisk elektrongass består av frie elektroner i et volum V. En-elektronenergien er $\varepsilon = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$. Anta at gassen er ekstremt relativistisk slik at elektronenes energi er meget stor sammenliknet med mc^2. Antall tilstander i impulsintervallet d^3p omkring impulsen $\vec{p}$ er gitt ved

$$g(\vec{p})\, d^3p = 2\frac{V}{(2\pi)^3}\, d^3k \quad \text{med} \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}\ .$$

a) Betrakt først forholdene ved $T = 0$.
Finn Fermienergien μ_o uttrykt ved tettheten $\rho = N/V$ og deretter den midlere energi U/N uttrykt ved μ_o.

b) Finn så hvordan μ varierer med T for $T \ll T_F = \frac{\mu_o}{K}$

Oppgitt:

$$I = \int_0^\infty f(\varepsilon)\,\frac{d}{d\varepsilon}F(\varepsilon)d\varepsilon = F(\mu) + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2F''(\mu) + \ldots$$

hvor $\qquad F(\varepsilon) = \text{konst}\cdot\varepsilon^\alpha \qquad (\alpha>0)$

og $\qquad f(\varepsilon) = \dfrac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon-\mu)}}$

Oppgave 4

a) Formuler og bevis det klassiske ekvipartisjonsprinsippet når Hamiltonfunksjonen kan skrives på formen

$$H(p_1,p_2,\ldots p_s,q_1,q_2,\ldots q_s) = \sum_{j=1}^{s} a_j p_j^2 + \sum_{j=1}^{s} b_j q_j^2$$

der a_j og b_j er konstanter, p_j og q_j er generaliserte impulser og koordinater h.h.v.

b) Hva gir dette prinsippet for C_v til en ideell gass av

i) enatomige molekyler,

ii) toatomige molekyler.

c) Beskriv kort den eksperimentelle situasjonen relativt ekvipartisjonsprinsippet.

Hvorfor er gyldigheten av prinsippet begrenset ?