UNIVERSITETET I OSLO

Det Matematisk-Naturvitenskapelige Fakultet

Eksamen i: FYS 203 Statistisk Fysikk
Eksamensdag: Onsdag, 20 mai 1992
Tid for eksamen: 0900 - 1500
Oppgavesettet er på 3 sider
Vedlegg:
Tillatte hjelpemidler: Clark: Physical and Mathematical Tables
Oliver, Boyd: Science Data Book
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken
Regnestav, logaritmetabell
Godkjent elektronisk kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Et fast materiale består av $N \gg 1$ atomer som danner et 3-dimensjonalt gitter. Det er ingen vekselvirkning mellom atomene. Hvert atom kan være i et av to mulige energi egentilstander ϵ_0 og ϵ_1. Systemet er i termisk likevekt ved temperatur T.

a) Forklar hvordan du lett kan skrive ned med en gang den indre energi for dette systemet i de to grensene $T \to 0$ og $T \to \infty$.

b) Bruk det kanoniske eller mikrokanoniske ensemble til å vise at den indre energi ved temperaturen T er

$$U = N\left[\epsilon_0 + \frac{k\theta}{1 + e^{\theta/T}}\right]$$

hvor $\theta = (\epsilon_1 - \epsilon_0)/k$ og k er Boltzmann's konstant.

c) Beregn den spesifikke varmen (varme-kapasiteten) for dette materialet og plot eller skissér hvordan den varierer med temperaturen.

d) Hva forventer du entropien til dette systemet vil være i de to grensene $T \to 0$ og $T \to \infty$?

e) Utled et matematisk uttrykk for entropien ved hjelp av resultatet i c) eller på annen måte. Sjekk at svaret stemmer med hva du fant i d).

Oppgave 2

En fri gass av $N \gg 1$ fermioner med masse m og spin $S = 1/2$ beveger seg i et plan med 2-dimensjonalt volum $V = L^2$. Tettheten $\rho = N/V$ er konstant, men temperaturen varierer.

a) Forklar hvorfor du kan bruke klassisk Maxwell-Boltzmann statistikk når temperaturen er meget høy. Vis at partisjonsfunksjonen for en partikkel er da gitt ved integralet

$$Z_1 = \frac{Vm}{\pi\hbar^2}\int_0^\infty d\epsilon\, e^{-\epsilon/kT}$$

b) Bruk dette resultatet til å beregne hvordan den indre energi U, trykket P og det kjemiske potensial μ for gassen varier med temperaturen.

c) Vis at partisjonsfunksjonen kan skrives som $Z_1 = V/\Lambda^2$ hvor Λ er den termiske bølgelengen. Forklar hvordan den kan brukes til å finne hvor lav temperaturen kan være før kvante-effektene begynner å bli viktige.

d) Ved lavere temperaturer må Fermi-Dirac statistikk brukes. Vis da at vi alltid har sammenhengen $P = U/V$ mellom trykket og energi-tettheten i denne 2-dimensjonale gassen.

e) Beregn for $T = 0$ det kjemiske potensial (Fermi-energien) og trykket uttrykt ved partikkel-tettheten ρ til gassen.

f) Finn en generell formel for det kjemiske potensialet til gassen gyldig ved alle temperaturer. Vis at den stemmer med de tidligere resultat i grensene $T \to 0$ og $T \to \infty$.

Oppgave 3

Et magnetisk materiale består av klassiske spinn $\mathbf{S_x}$ som alle har samme lengde S, men kan peke i forskjellige retninger. Posisjonsvektorene $\mathbf{x}$ danner et 3-dimensjonalt, kubisk gitter. Anta først at det ikke er noen vekselvirkning mellom spinnene, men at de alle befinner seg i et konstant, ytre magnetfelt $\mathbf{B}$ langs z-aksen. Energien til spinnene er da gitt ved Hamilton-funksjonen

$$H = -\sum_{\mathbf{x}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S_x}$$

a) Beregn partisjonsfunksjonen for dette systemet ved å integere over alle retningene til hvert spinn. Finn herav Gibbs fri energi $G(B,T)$.

b) Bruk dette resultatet til å finne magnetiseringen $m = \langle S_{\mathbf{x}z} \rangle$ av hvert spinn og vis at den kan skrives som

$$m = S\left(\coth\frac{BS}{kT} - \frac{kT}{BS}\right)$$

Skissér hvordan funksjonen varierer med B-feltet og diskutér resultatet. Regn spesielt ut hvordan den varierer med B i grensen $B \to 0$.

c) Nærmere undersøkelser av materialet viser at hvert spinn er koblet til sine nærmeste naboer slik at energien til systemet er gitt ved den klassiske Heisenberg Hamilton-funksjonen

$$H = -J \sum_{<\mathbf{x},\mathbf{x}'>} \mathbf{S}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{x}'} - \sum_{\mathbf{x}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{x}}$$

Her er J en koblingskonstant. Beskriv med ord de viktigste magnetiske egenskapene som materialet vil ha.

d) Bruk middelfelt-approksimasjonen til Weiss for å finne det effektive magnetfeltet som virker på hvert spinn. Vis hvordan du herav også kan beregne den kritiske temperaturen til dette magnetiske materialet og bestem denne.

****

Du kan få bruk for integralet

$$\int \frac{dx}{ae^{x} + 1} = -\ln\left(a + e^{-x}\right)$$