UNIVERSITETET I OSLO

Det Matematisk-Naturvitenskapelige Fakultet

Eksamen i: FYS 203 Statistisk Fysikk
Eksamensdag: Onsdag, 19 mai 1993
Tid for eksamen: 0900 - 1500
Oppgavesettet er på 2 sider
Vedlegg:
Tillatte hjelpemidler: Clark: Physical and Mathematical Tables
Oliver, Boyd: Science Data Book
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken
Regnestav, logaritmetabell
Godkjent elektronisk kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Et fast materiale består av $N \gg 1$ atomer som danner et 3-dimensjonalt gitter. Det er ingen vekselvirkning mellom atomene. Hvert atom kan være i tre forskjellige energi egentilstander med egenverdier $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = \epsilon$ og $\epsilon_3 = 2\epsilon$ som ikke er degenererte. Systemet er i termisk likevekt ved temperatur T.

a) Forklar hvordan du lett kan skrive ned med en gang den indre energi for dette systemet i de to grensene $T \to 0$ og $T \to \infty$.

b) Finn det midlere antall partikler i tredje energinivå som funksjon av temperaturen.

c) Beregn den indre energi for systemet og vis at den stemmer med resultatet i a) når $T \to 0$ og $T \to \infty$.

d) Beregn den spesifikke varmen (varme-kapasiteten) for dette materialet og plot eller skissér hvordan den varierer med temperaturen.

e) Beregn entropien for systemet som funksjon av temperaturen og sjekk at den stemmer med dine forventninger i grensene $T \to 0$ og $T \to \infty$.

Oppgave 2

Når gitter-vibrasjonene i en 3-dimensjonal krystall med N atomer kvantiseres, danner de en kvantegass av fononer.

a) Beskriv med få ord hvordan disse gitter-vibrasjonene beskrives i Debye-approksimasjonen. Utled resultatet $\omega_D = v(6\pi^2 N/V)^{1/3}$ for Debye-frekvensen hvor v er lydhastighten i krystallen som har volum V.

b) Vis at den fri energi til fonongassen er nå gitt ved integralet

$$F(T,V) = \frac{3VkT}{2\pi^2 v^3}\int_0^{\omega_D} d\omega\, \omega^2 \ln\left(1 - e^{-\hbar\omega/kT}\right)$$

c) Bruk dette uttrykket til å utlede tilsvarende resultat for entropien S og den indre energi U til gassen.

d) Beregn U/N når temperaturen $T \ll \hbar\omega_D/k \equiv T_D$ uttrykt ved T og T_D. Du trenger kanskje integralet

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

Oppgave 3

En gass av N elektroner befinner seg i et 3-dimensjonalt volum V med et konstant, magnetisk felt B langs z-aksen. Hamilton-funksjonen som beskriver hvert elektron er derfor

$$H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 - \mu_B \sigma_z B$$

hvor μ_B er et Bohr-magneton og σ_z er komponenten av spinnet langs z-aksen som kan ta verdiene $\sigma_z = \pm 1$.

a) Beregn partisjonsfunksjonen til gassen ved høye temperaturer hvor Maxwell-Boltzmann statistikk kan brukes. Finn hvordan trykket varierer i gassen som funksjon av temperatur og volum.

b) Bruk dette resultatet til å finne midlere energi $\langle H \rangle$ av hvert elektron i gassen og beregn det kjemiske potensial μ som funksjon av T, B og tettheten $\rho = N/V$.

c) Ved lavere temperaturer må Fermi-Dirac statistikk benyttes. Beregn den første kvantekorreksjonen til fugasiteten $\lambda = e^{\mu/kT}$.

d) Benytt dette resultatet til å finne den første kvantekorreksjonen til det klassiske gasstrykket beregnet i a). Uttrykk resultatet ved den andre virialkoeffisienten B_2.