UNIVERSITY OF OSLO

Faculty of Mathematics and Natural Sciences

Exam in: GEF3450/GEF4450
Day of Exam: December 14, 2014
Exam hours: 3
This examination paper consists of 4 pages.
Appendices: None.
Permitted materials: Rottman, *Matematisk Formelsamling*; calculator

Make sure that your copy of this examination paper is complete before answering.

Useful equations:

$$\frac{d_H}{dt}(\zeta + f) = -(\zeta + f)(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})$$

$$\frac{d_H}{dt}(\eta + H) + \nabla \cdot (\vec{u}(\eta + H)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2)\,\eta - \nabla \cdot (c_0^2\,\nabla\eta)\} - f\,g\,J(H,\eta) = 0$$

$$\frac{d_g}{dt}(\nabla^2\psi + \beta y + \frac{f_0}{D_0}h) = \frac{1}{\rho_0 D_0}\nabla \times \vec{\tau}_w - r\nabla^2\psi$$

$$\frac{d_g}{dt}[\nabla^2\psi + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}) + \beta y] = 0$$

$$\frac{d_g}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{N^2}{f_0}w = 0$$

Problem 1: Back to basics

English:

a) If the atmosphere had constant density, how would the temperature vary with height? Hint: use the hydrostatic balance and the ideal gas law to write an expression for $T(z)$.

b) Satellite data reveals a circular region where the sea surface height is 10 cm higher than the surroundings. The region is 100 km across. Calculate the associated geostrophic velocity. Which way is the flow going? Assume $f = 10^{-4}$ sec^{-1}.

c) “Pressure work” is the work which the flow does against the pressure gradients and contributes to the energy. This comes from the dot product of the horizontal velocity and the pressure gradient term. Calculate the pressure work for geostrophic flow.

d) The sea surface height decreases by 10 cm over 20 km across the Gulf Stream. Over the same distance, the surface temperature increases by 1°C. Use this information to estimate how deep the current extends. Assume an thermal expansion coefficient of 10^{-4} deg^{-1}.

Bokmål:

a) Om atmosfæren hadde konstant tetthet, hvordan ville temperaturen variere med høyden? Hint: Bruk likningene for hydrostatisk balanse og den ideelle gassloven for å finne et uttrykk for $T(z)$.

b) Satellittdata viser et sirkulært område hvor høyden på havoverflaten er 10 cm høyere enn omgivelsene. Regionen er 100 km bred. Beregn de tilhørende geostrofiske hastighetene. Hvilken vei går strømmen? Anta $f = 10^{-4}$ sec^{-1}.

c) “Trykkarbeid” er arbeidet som strømmen gjør mot trykkgradienten og bidrar til energien. Dette kommer fra prikkproduktet av den horisontale hastigheten og trykkgradientleddet. Beregn trykkarbeidet for geostrofisk strøm.

d) Over Golfstrømmen senker høyden på havoverflaten seg med 10 cm over 20 km. Over den samme distansen, øker overflatetemperaturen med 1°C. Bruk denne informasjonen til å anslå hvor dyp strømmen går. Anta en termisk utvidelseskoeffisient på 10^{-4} deg^{-1}.

Problem 2: Vorticity

English:

Consider a constant density fluid.

a) If the horizontal velocities are in geostrophic balance, show that they have no vertical shear.

b) Use the result from (a) in the horizontal momentum equations, and derive the vorticity equation.

c) Make the necessary approximations to write the quasi-geostrophic vorticity equation. Use the β-plane approximation to express f.

d) Linearize this equation, assuming a constant zonal wind, U.

e) Suppose that the horizontal divergence is given by:

$$(\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v) = A\cos(kx - \omega t)$$

Use a wave solution in the linearized vorticity equation and solve for ψ. Neglect any variation in y.

f) What is the phase relation between ψ and the divergence?

Bokmål:

Vi ser på en fluid med konstant tetthet

a) Vis at dersom de horisontale hastighetene er i geostrofiske balanse, er det ikke vertikalskjær.

b) Bruk resultatet fra (a) i de horisontale bevegelseslikningene (momentumslikningene), og utled virvlingslikningen.

c) Gjør de nødvendige tilnærmelser for å skrive ned den kvasi-geostrofiske virvlingslikningen. Bruk β-plan tilnærmingen til å uttrykke f.

d) Anta en konstant zonal vind U og gjør likningen fra c) lineær.

e) Anta at den horisontale divergensen er gitt ved:

$$(\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v) = A\cos(kx - \omega t)$$

Bruk en bølgeløsning i virvlingslikningen og løs for ψ. Anta at vi ikke har variasjon i y.

f) Hva er faseforholdet mellom ψ og divergensen?

Problem 3 : Gravity waves

English:

Consider a constant density fluid with a flat bottom and an initial height perturbation given by:

$$\eta(x, t = 0) = exp(-x^2/L^2)$$

Neglect variations in the y direction.

a) Suppose $L = 1$ m and the feature isn't moving initially ($\frac{\partial}{\partial t}\eta(x, 0) = 0$). Solve for the resulting evolution. Which way do the resulting perturbation(s) go?

b) Now imagine the feature is changing in time, so that:

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(x, 0) = c_0 \frac{4x^2}{L^2} e^{x^2/L^2}$$

Solve for the resulting evolution. Which way do the resulting perturbation(s) go?

c) Now suppose $L = 1000$ km and the initial perturbation lies next to a wall at $y = 0$. Solve for the evolution. Which way do the resulting perturbation(s) go?

d) Compare the speed of propagation in the three cases.

Bokmål:

Vi ser på en væske med konstant tetthet. Anta at bunnen er flat. En initial høydeperturbasjon er gitt ved:

$$\eta(x, t = 0) = exp(-x^2/L^2)$$

Ignorer variasjoner i y-retningen.

a) Anta at $L = 1$ m og perturbasjonen ikke er i bevegelse i utgangspunktet ($\frac{\partial}{\partial t}\eta(x, 0) = 0$). Løs for den resulterende evolusjonen. Hvilken vei går de(n) resulterende perturbasjonen(e)?

b) Anta at perturbasjonen endrer seg i tid, slik at:

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(x,0) = c_0 \frac{4x^2}{L^2} e^{x^2/L^2}$$

Løs for den resulterende evolusjon. Hvilken vei går de(n) resulterende perturbasjonen(e)?

c) Det antas nå at $L = 1000$ km og den initielle perturbasjonen befinner seg ved siden av en vegg ved $y = 0$. Løs for utviklingen. Hvilken vei går de(n) resulterende perturbasjonen(e)?

d) Sammenlign (propagerings) hastighetene i de tre tilfellene.

Problem 4: Baroclinic Rossby waves

English:

There is constant density fluid in a channel with walls at y=0 and y=L. There is a mean flow U, but no Ekman layers. The Brunt-Vaisala frequency, N is constant. There is a (smooth) rigid lid at the upper surface, at $z = 0$. The bottom surface (at $z = -H$) is flat but *rough*, so that there is no horizontal flow there.

a) Linearize the baroclinic PV equation. Propose a proper wave solution, and substitute this into the linearized PV equation.

b) Solve for the vertical structure taking into account the conditions at the upper and lower boundaries. Note that the density equation is only applicable at the upper boundary; it is violated at the lower boundary.[1]

c) Obtain the dispersion relation for the waves.

d) What is the zonal phase speed? What is the fastest wave? Compare the speed to that of a barotropic Rossby wave with a (smooth) flat bottom?

Bokmål:

Vi ser på en væske med konstant tetthet i en kanal med vegger ved y=0 og y=L. Det er en middelstrøm U, men ingen Ekman-lag. Brunt-Vaisala frekvensen, N, er konstant. Anta at overflaten er et tett lokk (dette er rigid lid antagelsen) men glatt, ved $z = 0$. Bunnen (ved $z = -H$) er flat, men *grov*, slik at det ikke er noen horisontal strøm der.

a) Lineariser den barokline PV-likningen. Foreslå en bølgeløsning, og erstatt dette inn i den lineariserte PV-likningen.

b) Løs for den vertikale strukturen hvor du tar hensyn til grensebetingelsene på den øvre og nedre flaten. Legg merke til at tetthetslikningen kun gjelder på den øvre flaten; den er ikke gyldig på den nedre flaten.

c) Finn dispersjonsrelasjonen for bølgene.

d) Hva er den zonale fasehastigheten? Hvilken bølge er raskest? Sammenlign hastigheten med hastigheten til en barotrop Rossby bølge hvor du antar en flat, men glatt bunn.

[1] Thanks to Sara B. for pointing this out.