

UNIVERSITY OF OSLO

Faculty of Mathematics and Natural Sciences

Exam in: GEF3450/GEF4450

Day of Exam: December 8, 2016

Exam hours: 3

This examination paper consists of 4 pages.

Appendices: None.

Permitted materials: Rottman, *Matematisk Formelsamling*; calculator

Make sure that your copy of this examination paper is complete before answering.

Useful equations:

$$\frac{d_H}{dt}u - fv = -g \frac{\partial}{\partial x} \eta$$

$$\frac{d_H}{dt}v + fu = -g \frac{\partial}{\partial y} \eta$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \eta + \frac{\partial}{\partial x} (Hu) + \frac{\partial}{\partial y} (Hv) = 0$$

$$\frac{d_H}{dt} (\zeta + f) = -(\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\frac{d_g}{dt} (\nabla^2 \psi + \beta y + \frac{f_0}{D_0} h) = \frac{1}{\rho_0 D_0} \nabla \times \vec{\tau}_w - r \nabla^2 \psi$$

$$\frac{d_g}{dt} [\nabla^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \beta y] = 0$$

$$\frac{d_g}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{N^2}{f_0} w = 0$$

$$c_i \left[\int_0^L \int_0^D \frac{|\hat{\psi}|^2}{|U - c|^2} \left(\frac{\partial}{\partial y} q_s \right) dz dy + \int_0^L \frac{f_0^2}{N^2} \frac{|\hat{\psi}|^2}{|U - c|^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} U \right) \Big|_0^D dy \right] = 0$$

Problem 1: Back to basics

English:

- a) Satellite data reveals that the sea surface height decreases by 50 cm over a distance of 100 km, across the Gulf Stream. Estimate the surface velocity, assuming $f = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$.
- b) Calculate the pressure at 25 m below the ocean surface, assuming the density of water is $\rho_c = 1000 \text{ kg/m}^3$.
- c) The 500 mb geopotential height is 6.30 m lower at Gardermoen than in Oslo. Assuming Gardermoen is due north of Oslo, calculate the wind speed in between (Gardermoen is 50 km from Oslo).
- d) At the same time, the temperature at Hønefoss (which is west of Oslo) is 1C warmer than at Gardermoen. Which way does the wind turn with height?

Bokmål:

- a) Satellittdata viser at over Golfstrømmen senker havoverflaten seg med 50 cm over en avstand på 100 km. Beregn overflatestrømmen. Anta $f = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$.
- b) Beregn trykket 25 m under havoverflaten. Anta at tettheten er $\rho_c = 1000 \text{ kg/m}^3$.
- c) Den 500 mb geopotensielle høyden er 6,30 m lavere på Gardermoen enn i Oslo. Anta at Gardermoen ligger rett nord for Oslo og beregn vindhastigheten mellom de to (Gardermoen er 50 km fra Oslo).
- d) Samtidig er temperaturen på Hønefoss (som ligger vest for Oslo) 1C varmere enn på Gardermoen. Hvilken vei snur vinden med høyden?

Problem 2: Kelvin waves

English:

There is a wall at $x = 0$, with a constant density ocean which lies to the left of the wall (where $x < 0$). Assume the depth, H , is also constant.

- a) What is the boundary condition to apply at $x = 0$?
- b) Use this to obtain a simplified set of linear shallow water equations for waves trapped along the boundary.
- c) Obtain a wave equation for the height, η . What is the phase speed?
- d) Write a general form for the wave solution for η , and also for v .
- e) Use a second equation which shows how the waves decay away from the wall. Substitute in the general forms from (d) and solve for the lateral structure (x -dependence). Which solution is realistic?
- f) How do the waves propagate in the northern hemisphere, and in the southern hemisphere?

Bokmål:

Det er en vegg på $x = 0$, med et hav til venstre for veggen (der $x < 0$). Havet har konstant tetthet. Anta en konstant dybde, H .

- a) Hvilken grensebetingelse bruker man ved $x = 0$?

- b) Bruk dette til å få et forenklet sett av lineære shallow water ligninger for bølger fanget langs grensen.
- c) Finn en bølgeligning for høyden, η . Hva er fasehastigheten?
- d) Skriv en generell form for bølgenløsningen for η , og for v .
- e) Bruk en annen ligning som viser hvordan bølgene avtar med avstanden fra veggen. Sett i bølgenløsningen fra (d) og løs for lateralstrukturen (x-avhengighet). Hvilken løsning er realistisk?
- f) Hvordan beveger bølgene seg på den nordlige halvkule, og på den sørlige halvkule?

Problem 3: Baroclinic Rossby waves

English:

Consider a stratified ocean over a continental shelf, like that off the west coast of Norway. The total depth is given by:

$$H = H_0 - \alpha x$$

There is a constant N , and we can ignore β . In addition there is a mean flow in the north-south direction, V .

- a) Linearize the baroclinic PV equation. Propose a proper wave solution, and substitute this into the linearized PV equation.
- b) Solve for the vertical structure. Assume the bottom is at $z = 0$, and that the flow vanishes moving upward (toward large positive z).
- c) Write the linear equation of motion for the lower boundary.
- d) Obtain the dispersion relation for the waves.
- e) What is the meridional (y) phase speed? Which way do the waves propagate without the mean flow?
- f) Can the waves be stationary? If so, what is the stationary wavenumber?

Bokmål:

Anta et stratifisert hav over en kontinentalsokkel, som den utenfor vestkysten av Norge. Den totale dybden er gitt ved:

$$H = H_0 - \alpha x$$

N er konstant, og vi kan ignorere β . I tillegg finnes det en strøm i nord-sør retning, V .

- a) Lineariser den barokliniske PV ligningen. Foreslå en bølgeløsning, og bruk denne i den lineariserte PV ligningen.
- b) Løs for den vertikale strukturen. Anta at bunnen er ved $z = 0$, og at bølgen forsvinner oppover (mot stor positiv z).
- c) Beregn dispersjonsrelasjonen for bølgene.
- d) Hva er meridionale (y) fasehastigheten? Hvilken vei beveger bølgene uten strømmen, V ?
- e) Kan bølgene være stasjonære? Hvis ja, hva er det stasjonære bølgetallet?

Problem 4: Instability

English:

Consider a region with $-1 \leq y < 1$ and $0 \leq z \leq 1$. We have the following velocity profiles:

- i) $U = 1 - y^2$
- ii) $U = \exp(-y^2)$
- iii) $U = z^3 + z$
- iv) $U = z^2(1 - y^2)$

Assume $f_0/N = 1$. For each profile, specify:

- a) if the flow is stable or unstable with $\beta = 0$,
- b) which of the four conditions applies and
- c) if the flow can be stabilized by β (in cases when it is unstable). Assume $\beta > 0$ but otherwise can take any value.

Bokmål:

Anta en region med $-1 \leq y < 1$ og $0 \leq z \leq 1$. Vi har følgende hastighetsprofiler:

- i) $U = 1 - y^2$
- ii) $U = \exp(y^2)$
- iii) $U = z^3 + z$
- iv) $U = z^2(1 - y^2)$

Anta $f_0/N = 1$. For hver profil, spesifiser:

- a) om strømmen er stabil eller ustabil med $\beta = 0$,
- b) hvilken av de fire vilkårene gjelder og
- c) om strømmen kan stabiliseres ved β (i tilfeller der den er ustabil). Anta $\beta > 0$, men ellers kan ha alle verdier.