

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: GEO3900/4900

Eksamensdag: Mandag 26. november 2018

Tid for eksamen: 0900 (tre timer)

Oppgavesettet er på 5 sider

Vedlegg: ingen

Tillatte hjelpemidler: K. Rottmann: "Matematisk Formelsamling", godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Formler:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_h \mathbf{u} + w \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + f \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla_h p + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial z} \quad (1)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} (f + \zeta) = -(f + \zeta) \nabla_h \cdot \mathbf{u}, \quad \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_h \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla_h \cdot \mathbf{u} h \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f + \zeta}{h} \right) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d_g}{dt} \left[\beta y + \zeta_g - \frac{f_0}{H} (\eta - h_b) \right] = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d_g}{dt} \left[\beta y + \nabla_h^2 \psi + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d_g}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{N^2}{f_0} w = 0 \quad (8)$$

$$c_i \left[\int_0^L \int_0^H \frac{|\hat{\psi}|^2}{|U-c|^2} \frac{\partial q_s}{\partial y} dz dy + \int_0^L \frac{f_0^2}{N^2} \frac{|\hat{\psi}|^2}{|U-c|^2} \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_0^H dy \right] = 0 \quad (9)$$

$$\nabla_h = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}}$$

Oppgave 1: Geostrofi og termalvind

1. Ta utgangspunkt i den horisontale momentumlikningen (likning 1). Hvis vi ignorerer stress-leddene, forklar skalerings-argumentene som fører til den geostrofiske balansen.
2. Utlede termalvind-likningene for en kontinuerlig-stratifisert væske fra de geostrofiske og den hydrostatiske likningene. Vis at geostrofisk vind/strøm i en ustratifisert væske ikke har et vertikalskjær.
3. Vi har trykk- og tetthetsobservasjoner fra en havregion. På 1000 m dyp øker trykket østover med gradient 0.01 N m^{-3} . Hva er den geostrofiske strømmen? I dypet minker tettheten nordover med gradient $10^{-5} \text{ kg m}^{-4}$. Hva er så strømmen på 900 m dyp? (Anta $g = 10 \text{ m s}^{-2}$, $\rho_0 = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ og $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$).

Oppgave 2: Virvling og potensiell virvling

1. Utlede uttrykket for potensiell virvling for et konstant-tetthetslag (likning 5) fra virvlings- og kontinuitetslikningene (likninger 3 og 4).
2. En luft-kolonne ved 60°N som strekker seg fra bakken og opp til en høyde av 10 km har opprinnelig ingen relativ virvling. Kolonnen beveger seg så sørover til den passerer over det 2.5 km høyt fjell ved 45°N . Vis uttrykket du vil bruke for å regne ut relativ virvling kolonnen har i det den passerer over fjellet. (Anta at tropospausen er flat og rigid.)
3. Hvis vinden er *helt* geostrofisk og i tillegg beveger seg på et f-plan ($f = f_0 = \text{konst.}$) som har en flat og rigid tropopause, forklar hvorfor den faktisk ikke kan strømme over fjell men i stedet må gå rundt.

4. **(Kun for GEO4900)** Diskuter deloppgaven over hvis vi tar høyde for at f kan variere.
5. Vi antar nå et beta-plan, dvs. $f = f_0 + \beta y$ hvor $|\beta y| \ll |f_0|$, og antar også et lite Rossby tall, dvs. $|\zeta| \ll |f_0|$. Vi antar også små endringer i lagtykkelse, dvs. $h = H + \eta - h_b$ hvor $\eta(x, y, t)$ er overflatehevning, $h_b(x, y)$ er bunntopografi og hvor $|\eta| \ll H$ og $|h_b| \ll H$. Vis at ligningen for PV konservering under denne 'kvasi-geostrofiske' (QG) antagelsen blir ligning 6 fra forsiden.
6. Omskriv uttrykket for QG PV ved å bruke den geostrofiske strømfunksjonen $\psi = (g/f_0)\eta$. Skaler leddene i uttrykket du får. Sammenlign deretter størrelsen på relativ-virvlingsleddet med 'strekke-leddet' (det som er assosiert med overflatehevningen) og vis at en horisontal lengdeskala separerer regimer hvor henholdsvis relativ virvling og strekking dominerer dynamikken. Hva kalles denne lengdeskalaen og i hvilket regime dominerer henholdsvis relativ virvling og strekking?

Oppgave 3: Ekman-transport og Sverdrup transport

1. Det sonale (fra vest til øst) vindstresset over havet ved en gitt breddegrad på den nordlige halvkule (hvor $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ og $\tau^x = 0.1 \text{ N m}^{-2}$). Anta en tetthet $\rho_0 = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ og estimer den dybde-integrerte vinddrevne Ekman-transporten. I hvilken retning peker den?
2. Anta nå at vinden minker lineært nordover til null over en distanse på 100 km. Vis hvordan denne endringen skaper en vertikalhastighet ved bunnen av overflate-Ekmanlaget i havet. Hvor stor er denne vertikalhastigheten?
3. Vertikalhastigheten ut av overflate-Ekmanlaget kan kompenseres ved et Ekmanlag ved bunnen. Men den kan også kompenseres av en divergens/konvergens av geostrofiske strømmer gjennom vannkolonnen dersom disse er på et beta-plan hvor $f = f_0 + \beta y$. Vis også dette.
4. Skriv opp uttrykket for Sverdrup-transporten som skapes av dette vindstressfeltet og lag en skisse av strømmene (er Sverdrup-transporten nordover eller sørover?).

Oppgave 4: Lineære QG Rossby bølger

1. Forklar den underliggende mekanismen for Rossby-bølger, enten de eksisterer pga. planetarisk beta eller pga. en skrående bunn.
2. Lineariser QG PV-ligningen rundt en stille bakgrunns-tilstand ($U = V = 0$). Anta en bølgeløsning og introduser en strømfunksjon for bølgen. Vis at dispersjons-relasjonen for bølgen er

$$\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + 1/L_d^2}, \quad L_d^2 = \frac{gH}{f_o^2}.$$

3. For $l = 0$, tegn dispersjons-relasjonen for bølgene ved å bruke konvensjonen $\omega > 0$. Tegn dette både for endelig og uendelig stor Rossby deformasjonsradius L_d .
4. Utled uttrykkene for gruppehastighetene både i x- og i y-retning. For $l = 0$, i hvilken retning er gruppehastigheten for bølgelengder større enn L_d ? Og for skalaer mindre enn L_d ? Verifiser resultatet ditt ved å sammenligne med helningen på dispersjons-kurven i de to regimene.
5. Vi introduserer nå en konstant bakgrunnsstrøm U i østlig retning ($U > 0$.) Hvis vi antar 'rigid lid' (dvs. uendelig stor L_d) hva blir dispersjons-ligningen? Vis at en horisontal skala eksisterer hvor bølgen står stille i forhold til omgivelsene. Skjer det samme dersom bakgrunnsstrømmen går i vestlig retning?
6. **(Kun for GEO4900)** Vi introduserer nå samme bakgrunnsstrøm U i østlig retning ($U > 0$) som ovenfor, men kan nå ikke anta 'rigid lid'. Hva blir nå dispersjons-relasjonen? Eksisterer det fremdeles en horisontal skala hvor bølgen står stille i forhold til omgivelsene?

Oppgave 5 Instabilitet og Charney-Stern kriteriet

1. I uttrykket for Charney-Stern kriteriet for stabiliteten av en sonal vind/strøm (ligning 9), hva representerer $\hat{\psi}$? Vis hvor $\hat{\psi}$ først blir introdusert i utledningene som til slutt leder til Charney-Stern kriteriet (du skal ikke utlede selve kriteriet, kun aller første steg).
2. I samme uttrykk er q_s bakgrunns-PV. For sonal (vest-øst) bakgrunnsstrøm $U(y, z)$, hva blir uttrykket for $\partial q_s / \partial y$?

3. Et nødvendig kriterie for instabilitet er at uttrykket innenfor klammene (dvs. summen av de to integralene) er null. Forklar hvorfor dette er et nødvendig (“necessary”) men ikke et tilstrekkelig (“sufficient”) kriterium for instabilitet. Forklar også at dersom uttrykket *ikke* er null så er dette et tilstrekkelig kriterium for å si at strømmen er stabil.
4. Forklar de fire mulighetene for å innfri Charney-Stern kriteriet.
5. For $N^2 = \text{konst.}$ og følgende bakgrunns strømprofil på beta-planet:

$$U(z) = \frac{U_0}{2} \left(1 + z^2/D^2\right),$$

diskuter stabiliteten av strømmen både for $U_0 < 0$ og $U_0 > 0$.