Oppgaver til kapittel 6 - GEF1100

Oppgave 1

a)

Hva er forskjellen mellom Lagrangesk og Eulersk representasjon av en væskebevegelse? Gi et eksempel på hver av dem.

b)

Uttrykket i Likning (1) viser den totalderiverte av hastigheten $\mathbf{u}$. Er dette snakk om Lagrangesk eller Eulersk derivasjon? Begrunn svaret.

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u} \tag{1}$$

c)

Skriv om Likning (1) til å være på kartesiske koordinater, og sorter dem på komponent-form.

Oppgave 2

a)

Skriv opp hele bevegelseslikningen i z-retning og forklar hva de ulike leddene står for

b)

Bruk uttrykket du fant i oppgave a) til å komme fram til hydrostatisk likning, $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$. Hvilke antagelser må gjøres, og under hvilke forhold er det greit å gjøre disse antagelsene?

c)

Integrer hydrostatisk likning mellom to trykkflater, p_1 og p_2, som ligger i høyden z_1 og z_2 og vis at

$$p_2 = p_1 e^{\frac{z_1 - z_2}{H}},$$

der $H = \frac{R\overline{T}}{g}$, mens $\overline{T}$ er gjennomsnittstemperaturen i lufta mellom de to trykkflatene.

Oppgave 3

a)

Hva går massebevaringsloven/kontinuitetslikningen ut på? Skriv opp det matematisk uttrykket og løs dette opp til kartesiske koordinater

b)

Under hvilke omstendigheter kan kontinuitetslikningen reduseres til uttrykket i Likning (2)? Hvorfor kan denne likningen brukes for havet, og ikke for atmosfæren?

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

c)

Kontinuitetslikningen for atmosfæren kan reduseres til

$$\nabla_p \cdot \mathbf{u}_p = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial p} = 0. \tag{3}$$

Hva betyr subscriptet p og hvilke antagelser er gjort for å komme fram til Likning (3)?

Oppgave 4

Utviklingen til et fluid kan bestemmes ved hjelp av fem likninger som tilsamenn går under navnet "The governing equations". Disse kommer dere til å få mye med å gjøre gjennom senere kurs innen meteorologi, oseanografi, fluidmekanikk m.m. I oppgavene over, har vi allerede jobbet med fire av dem; de tre bevegelseslikningene (disse er egentlig Newtons andre lov, men siden man ser på per enhetsmasse, får man uttrykk for akselerasjon) og massebevaringsloven (kontinuitetslikningen).

a)

Hva er den femte og siste av disse likningene? Skriv opp likningen, og forklar hva de ulike leddene står for.

b)

Hva betyr isobarisk bevegelse? Hvordan blir likningen du kom fram til i a) seende ut ved isobarisk bevegelse?

c)

Hva betyr adiabatisk bevegelse? Hvordan bli likningen du kom fram til i a) seende ut ved adiabatisk bevegelse?

d)

Vi har en bevegelse som både er isobarisk og adiabatisk. Skriv opp likningen du fant i oppgave a) tilpasset denne bevegelsen.

e)

Vis at likningen du fant i oppgave d) kan skrives slik på Eulersk form:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} - v\frac{\partial T}{\partial y} - w\frac{\partial T}{\partial z}$$

Oppgave 5

Atmosfæren og havet er roterende fluider, hvilket betyr at bevegelseslikningene må inkludere to ekstra krefter enn hva som er tilfelle for ikke-roterende fluider.

a)

Hvilke krefter er det snakk om? Fortell kort hvordan disse kreftene virker på bevegelser på jorda.

b)

Skriv opp bevegelseslikningen for et roterende fluid på Lagrangesk form (uten forenklinger) og forklar hva alle leddene står for. Legg ekstra vekt på de nye leddene (sammenliknet med Likning (6-6) i boka, som beskriver bevegelsen til et ikke-roterende fluid).

c)

Coriolisakselerasjonen er gitt ved

$$-2\Omega \times \mathbf{u},$$

hvor $\Omega = 0\hat{\mathbf{i}} + \Omega\cos\phi\hat{\mathbf{j}} + \Omega\sin\phi\hat{\mathbf{k}}$, mens $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}}$. Vis at Coliolisakselerasjonen kan skrives som

$$-2\Omega \times \mathbf{u} \simeq fv\hat{\mathbf{i}} - fu\hat{\mathbf{j}},$$

hvor $f = 2\Omega\sin\phi$.

d)

Hva kalles f? Hvilke verdier har f for følgende steder:

1. Ekvator
2. 60°N

3. Nordpolen
4. 60°S
5. Sydpolen

e)

Anta at Coriolisakselerasjonen kan reduseres til uttrykket du fant i oppgave c), at vertikalkomponenten til friksjonskraften er neglisjerbar og at hydrostatisk likning gjelder. Skriv opp et nytt uttrykk for bevegelseslikningene, både som total derivert (Lagrangesk) og på komponentform i vårt lokale kartesiske koordinatsystem (se Figur 6.19 i boka).

Oppgave 6

Gjør oppgave 6.8.4 i boka. Hvis du står fast, kan du se om du får noe hjelp av denne lista med hint:

- Basert på opplysningene i oppgaveteksten, vil bevegelseslikningen kun bestå av Coriolisakselerasjonen og den tidsderiverte av lateralhastigheten (v, nord-sør)
- Anta at u-komponenten til hastighetsvektoren er konstant gjennom hele forflytningen
- Husk at vi har følgende sammenhenger mellom hastighet, akselerasjon og posisjon:
  - Akselerasjon: $a(t) = \frac{dv}{dt}$
  - Hastighet: $v(t) = \frac{dy}{dt}$ og $v(t) = \int a(t)\ dt$
  - Posisjon: $y(t) = \int v(t)\ dt$
- Og glem selvsagt ikke at vi for konstant hastighet har denne: $s = v \cdot t$