GEF1100 - Løsningsforslag til oppgaver fra kapittel 1

i.h.h.karset@geo.uio.no

Oppgave 1.4.1

Oppgave:

- Vi får oppgitt at gravitasjonsakselerasjonen, g, avtar med kvadratet av avstanden fra jordens sentrum
- Vi skal finne den prosentvise endringen i g fra bakken og opp til 100 km.

Løsning:
Har at

$$g = \frac{k}{r^2},$$

hvor k er en proporsjonalitetskonstant, mens r er avstanden fra jordens sentrum.

Ved bakken:

$$g_{0km} = \frac{k}{a^2} = \frac{k}{(6,37 \cdot 10^6)^2},$$

(a er jordens radius. Fra tabeller finner vi at denne er $6,37 \cdot 10^6$ m.)

Ved 100 km:

$$\frac{k}{(a + 100000)^2} = \frac{k}{6,47 \cdot 10^6}.$$

Finner den prosentvise endringen:

$$\begin{aligned}
\frac{g_{100km}}{g_{0km}} &= \frac{\frac{k}{(6,47 \cdot 10^6)^2}}{\frac{k}{(6,37 \cdot 10^6)^2}} \\
&= \frac{6,37^2}{6,47^2} \\
&= 0,97 \\
\Rightarrow g_{\%endring} &= 3\ \%.
\end{aligned}$$

Kommentar:
Mesteparten av massen i atmosfæren befinner seg under 100 km. Da g bare er 3 % lavere ved 100 km enn ved bakken, er det i mange sammenhenger greit å anta at g er konstant med høyden.

Oppgave 1.4.2

Oppgave:
Vi skal finne gjennomsnittstrykket ved bakken basert på følgende opplysninger:

- Total masse i atmosfæren, $M_a = 5,26 \cdot 10^{18}$ kg.
- Gravitasjonsakselerasjonen, $g = 9,81$ ms^{-2}.
- Jordens radius, $a = 6,37 \cdot 10^6$ m.

Løsning:
Vi bruker sammenhenger mellom trykk, kraft, areal og masse som vi kjenner til fra tidligere:

$$\begin{aligned} p &= \frac{F}{A} \\ &= \frac{M_a g}{4\pi a^2} \\ &= \frac{5,26 \cdot 10^{18} \cdot 9,81}{4\pi \cdot (6,37 \cdot 10^6)^2} \\ &= 1,012 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\ &= 1012 \text{ hPa} \end{aligned}$$

Kommentar:
Lufttrykk i atmosfæren oppgis ofte i hektopascal eller millibar. Disso to enhetene er like (1 mbar = 1 hPa). Lufttrykket ved bakken er i snitt 1013 hPa (avrunding gjørde at vi fikk 1012 i denne oppgaven...), men det varierer med noen titalls hPa når man har høytrykk/lavtrykk. Bestiger man høye fjell, kan lufttrykket bli noen hundre hPa lavere.

Oppgave 1.4.3

Oppgave:

a) Først skal vi finne ut hvor mange epler (hvert på 0,2 kg) vi må dekke hver kvadratmeter på jorda med for at de skal utføre det samme trykket på bakken som det lufta gjør (altså 1,012$\cdot 10^5$ Pa).

b) Deretter skal vi finne ut hvor høyt disse eplene må stables dersom vi bare kan ha fem epler per m^3 og vi vil oppnå et bakketrykk på 1000 hPa.

Løsning:

a) Trykket ved bakken skal være 1,012$\cdot 10^5$ Pa, altså 1,012$\cdot 10^5$ Nm^{-2}. Tyngden av eplene per kvadratmeter må altså utføre en kraft på 1,012·10^5 N:

$$
\begin{aligned}
G &= m \cdot g \\
\Rightarrow m &= \frac{G}{g} \\
&= \frac{1,012 \cdot 10^5}{9,81} \\
&= 10347 \text{ kg/m}^2. \leftarrow \text{Massen til alle eplene på 1 m}^2. \\
\text{Antall epler per m}^2 &= \frac{\text{Massen til alle eplene på 1 m}^2}{\text{massen til ett eple}} \\
&= \frac{10347 \text{ kg/m}^2}{0,2 \text{ kg per eple}} \\
&= 51735 \text{ epler per m}^2.
\end{aligned}
$$

b) Vi gjør det samme som i a), men nå for $1 \cdot 10^5$ Pa. Får da 50968 epler per m^2. Siden vi bare får lov til å ha fem stykker per høydemeter, får vi at eplene vi nå høyden:

$$\text{høyde} = \frac{50968}{5} = 10194 \text{ m}.$$

Kommentar:
Høyden vi kom fram til er litt over skalahøyden i troposfæren (7 km) som forteller oss hvor høyt vi må opp for at trykket skal ha avtatt med en faktor e ($\approx$ 2,72) fra bakken og opp. Fem epler per m^3 veier totalt sett 1 kg, ca det samme som massen til lufta ved bakken som veier litt over 1 kg.

Oppgave 1.4.4

Oppgave: Vi skal beregne dem maksimale mengden vanndamp per enhetsvolum luft som lufta ved bakken og ved 10 km klarer å holde på.

Løsning:

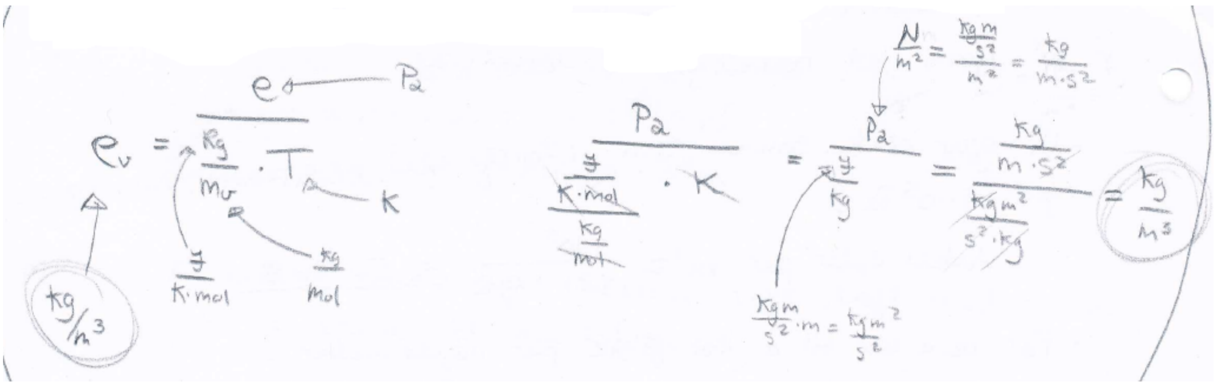
- Ved bakken har vi at $T_s = 288\ K = 15°$C. Bruker Clausius Clapeyron til å finne metningsvanndampstrykket ved denne temperaturen:

$$
\begin{aligned}
e_s(T) &= Ae^{\beta T} \\
&= 6,11 \cdot 10^2 \cdot e^{0,067 \cdot 15} \leftarrow \text{NB: i denne versjonen av likingen oppgir vi T i Celsius!} \\
&= 1669,2 \text{ Pa}.
\end{aligned}
$$

Vi har nå funnet trykket, men vil ha tettheten. Da kan vi bruke ideell gasslov:

$$
\begin{aligned}
e &= \rho_v R_v T \\
\Rightarrow \rho_v &= \frac{e}{R_v T} \\
&= \frac{e}{\frac{R_g}{m_v} \cdot T} \\
&= \frac{1669,2}{\frac{8,3143 \cdot 288}{18,02 \cdot 10^{-3}}} \\
&= 0,0126 \text{ kgm}^{-3} \\
&= 1,26 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^{-3}
\end{aligned}
$$

Utfører en enhetssjekk for å undersøke om vi har gjort riktig:



- Ved 10 km har vi at $T = 220\ K = -53°$C. Gjør vi det samme her som ved bakken, får vi at $e_s = 17,53$ hPa, mens $\rho_v = 1,7 \cdot 10^{-4}$ kgm^{-3}.

Kommentar:
Vi ser at mettet luft ved bakken inneholder 1,26 % vanndamp, mens det ved 10 km kun er 0,017 %. Det er altså en faktor 10^{-2} mindre! Jo høyere opp i troposfæren vi kommer (redusert T), jo tørrere blir det.