GEF1100 - Løsningsforslag til oppgaver fra kapittel 3

i.h.h.karset@geo.uio.no

Oppgave 3.5.1

Oppgave:

a) Vi skal først bruke hydrostatisk likning til å vise at massen til en kolonne med luft over 1 m^2 på jorda, helt opp til TOA, er gitt som $M_a = \frac{p_s}{g}$.

b) Deretter skal vi bruke dette uttrykket til å estimere den totale massen til atmosfæren.

Løsning:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dz} &= -\rho g \\
\int_{p(z=0)}^{p(z=\infty)} dp &= \int_{z=0}^{z=\infty} -\rho g dz \\
\int_{p_s}^{0} dp &= -g \int_{0}^{\infty} \rho(z) dz \quad \leftarrow \text{Antar at g er konstant med høyden} \\
\int_{0}^{p_s} dp &= g \int_{0}^{\infty} \rho(z) dz \quad \leftarrow \text{Fjerner - på H.S. og snur om på grensene på V.S.} \\
p_s &= g \int_{0}^{\infty} \rho(z) dz
\end{aligned}$$

Integralet på høyre side gjenkjenner vi som massen til hele atmosfæren over 1 m^2 på jorda, M_a, fordi

$$\begin{aligned}
\rho dz &= \frac{m}{dV} dz \\
&= \frac{m}{dAdz} dz \\
&= \frac{m}{dA} \\
\Rightarrow \int_{0}^{\infty} \rho(z) dz &= M_a.
\end{aligned}$$

Vi har derfor at

$$\begin{aligned} p_s &= gM_a \\ \Rightarrow M_a &= \frac{p_s}{g}. \end{aligned}$$

b) Siden bakketrykket er i snitt lik 1013 hPa, får vi at:

$$\begin{aligned} M_a &= \frac{p_s}{g} \\ &= \frac{101300}{9,81} \\ &= 1,0326 \cdot 10^4 \text{ kgm}^{-2} \\ \Rightarrow M_{a,total} &= 1,0326 \cdot 10^4 \cdot 4\pi(6,37 \cdot 10^6)^2 \\ &= 5,265 \cdot 10^{18} \text{ kg}. \end{aligned}$$

Oppgave 3.5.3

Oppgave:

a) Vi skal først finne ut hvor i atmosfæren massen til atmosfæren under og over er like store. Svaret skal gis både som trykk, tetthet og høyde.

b) Deretter skal vi finne ut hvor 90 % av massen til atmosfæren befinner seg lengre ned. Svaret skal gis både som trykk, tetthet og høyde.

Løsning:

a) Fra oppgave 3.5.1 har vi at massen til atmosfæren **over** trykknivået $p(z)$ er gitt ved:

$$M(z) = \frac{p(z)}{g}.$$

Ved bakken var den

$$M(0) = \frac{p_s}{g}.$$

Vi skal finne ut hvor $M(z) = \frac{M(0)}{2}$:

$$\begin{aligned} M(z) &= \frac{p(z)}{g} \\ \frac{M(0)}{2} &= \frac{p(z)}{g} \\ p(z) &= g \cdot \frac{M(0)}{2} \\ &= \frac{g \cdot \frac{p_s}{g}}{2} \\ &= \frac{p_s}{2} \end{aligned}$$

Vi ser altså at massen har halvert seg fra bakken og opp ved det samme stedet hvor trykket har halvert seg. Hvis bakketrykket er 1000 mbar, vil massen være halvert ved 500 mbar.

Bruker hydrostatisk likning til å finne høyden og tettheten ved dette nivået:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dz} &= -\rho g \\
&= -\frac{p}{RT} g \quad \leftarrow \text{ideell gasslov: } p = \rho RT \Rightarrow \rho = \frac{p}{RT}. \\
\frac{1}{p} dp &= -\frac{g}{RT} dz \\
\int_{p(z=0)}^{p(z)} \frac{1}{p} dp &= \int_{z=0}^{z=z} -\frac{g}{RT} dz \\
\ln\left(\frac{p(z)}{p_s}\right) &= -\frac{1}{H} \int_0^z dz \quad \leftarrow \text{Skalahøyde: } H = \frac{R\overline{T}}{g} \Rightarrow -\frac{g}{R\overline{T}} = -\frac{1}{H}. \\
&= -\frac{1}{H} \int_0^z dz \\
&= -\frac{z}{H} \\
\Rightarrow z &= -H \ln\left(\frac{p(z)}{p_s}\right) \\
&= -\frac{287 \cdot 263}{9,81} \cdot \ln\left(\frac{500}{1000}\right) \\
&= 5,33 \text{ km.}
\end{aligned}$$

Tettheten:

$$\begin{aligned}
p &= \rho RT \\
\rho &= \frac{p}{RT} \\
&= \frac{500000}{287 \cdot 263} \\
&= 0,662 \text{ kgm}^{-3}
\end{aligned}$$

b) 90 % av massen skal ligge under nivået vi nå skal finne. Det betyr at kun 10 % av massen skal ligge over:

$$\begin{aligned}
M(z) &= \frac{p(z)}{g} \\
0,1 \cdot M(0) &= \frac{p(z)}{g} \\
p(z) &= g \cdot 0,1 \cdot M(0) \\
&= g \cdot 0,1 \cdot \frac{p_s}{g} \\
&= 0,1 \cdot p_s \\
&= 0,1 \cdot 1000 \\
&= 100 \text{ mbar } (100 \text{ hPa}).
\end{aligned}$$

Gjør som i a) for høyden og tettheten, og får at $z = 17,73$ km og $\rho = 0,132$ kgm^{-3}.