

GEF1100 - Løsningsforslag til oppgaver fra kapittel 7

i.h.h.karset@geo.uio.no

Oppgave 1 - Geostrofisk balanse

a) Vi har geostrofisk balanse,

$$f\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

Hvilke krefter er i balanse?

Svar: Corioliskraften og trykkgradientkraften.

b) Løs likningen med hensyn på vinden og finn uttrykk for den geostrofiske vinden i zonal (x -) og meridional (y -) retning.

Svar:

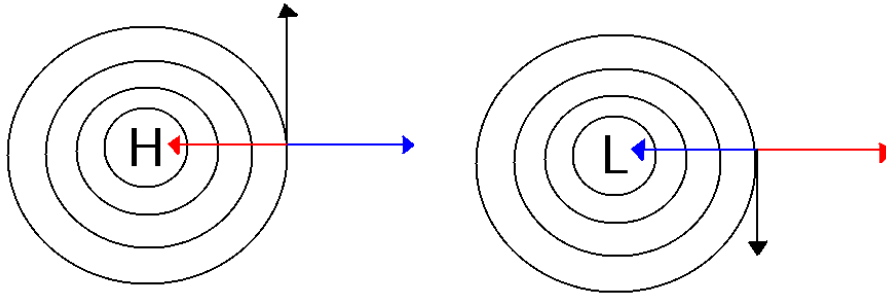
$$f\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$
$$f \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ u & v & w \end{vmatrix} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$
$$f \left((0w - 1v)\hat{\mathbf{i}} - (0w - 1u)\hat{\mathbf{j}} + (0v - 0u)\hat{\mathbf{k}} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

x-retning:

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$
$$v = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x}$$

y-retning:

$$fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$
$$u = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y}$$



Figur 1: Krefter (rød: Corioliskraften, blå: trykkgradientkraften) som virker på en strømning rundt et høytrykk (a) og rundt et lavtrykk (b) på sørlig halvkule, samt vindretningen (svart).

- c) Verifiser at svaret du kom fram til i b) er det samme som gitt ved følgende vektoruttrykk:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_g &= \frac{1}{f\rho} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla p \\
 &= \frac{1}{f\rho} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{f\rho} \left((0 \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - 1 \cdot \frac{\partial p}{\partial y}) \hat{\mathbf{i}} - (0 \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - 1 \cdot \frac{\partial p}{\partial x}) \hat{\mathbf{j}} + (0 \cdot \frac{\partial p}{\partial y} - 0 \cdot \frac{\partial p}{\partial x}) \hat{\mathbf{k}} \right) \\
 &= \frac{1}{f\rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial y} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial p}{\partial x} \hat{\mathbf{j}} \right)
 \end{aligned}$$

Vi ser at dette er det samme som vi fikk i b).

- d) Tegn kreftene som virker på en geostrofisk strømning rundt et høytrykk og rundt et lavtrykk på sørlig halvkule.

Svar: Figur 7.1 i boka viser dette for nordlig halvkule. Retningene er reversert på sørlig halvkule siden Coriolisparameteren har motsatt fortegn her. Svaret er skissert i Figur 1.

- e) Vi har geostrofisk balanse. Hvilket alternativ er riktig på hvert av punktene?
- På sørlig halvkule virker Coriolis til **venstre/høyre** for vindretningen Svar: *venstre*
 - På nordlig halvkule virker Coriolis til **venstre/høyre** for vindretningen Svar: *høyre*
 - Trykkgradientkraften virker alltid fra **lavt/høyt** trykk mot **lavt/høyt** trykk. fra *høyt mot lavt*

- Trykkgradienten er positiv i retningen fra **lavt/høyt** trykk mot **lavt/høyt** trykk. *fra lavt mot høyt*
 - Strømingene går **med/mot** klokka rundt lavtrykk og **med/mot** klokka rundt høytrykk på nordlig halvkule *mot og med*
- f) Vi har geostrofisk balanse. Beregn hvor stor strykkgradientkraften må være dersom vi skal klare å opprettholde denne balansen ved 45 °N dersom vindhastigheten er på 10 m/s og tettheten til lufta er på 1 kg/m³. Beregn også hvor stor trykkforskjell dette utgjør over en strekning på 1000 km (typisk lengdeskala i atmosfæren).

Svar:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{u}_g| &= \frac{1}{f\rho} \cdot |\nabla p| \\
 |\nabla p| &= f \cdot \rho \cdot |\mathbf{u}_g| \\
 &= 2 \cdot \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \cdot \sin 45 \cdot 1 \cdot 10 \\
 &= 1,028 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^{-2}\text{s}^{-2}
 \end{aligned}$$

Beregner Δp :

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{u}_g| &= \frac{1}{\rho f} \cdot \left| \frac{\Delta p}{\Delta s} \right| \\
 |\Delta p| &= f \cdot \rho \cdot |\Delta s| \cdot |\mathbf{u}_g| \\
 &= \nabla p \cdot \Delta s \\
 &= 1,028 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 \\
 &= 10,28 \text{ hPa}
 \end{aligned}$$

Oppgave 2 - Rossby tallet

- a) Rossby tallet er definert som $R_0 = \frac{U}{fL}$. Vis hvordan man kommer fram til dette.

Svar: Rossby tallet finner vi ved å se på bevegelseslikningen, skalere den, for så å se på forholdet mellom akselerasjonsleddet og Coriolis leddet.

$$\begin{aligned}
 \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \phi + f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} &= \mathbf{F} \\
 \frac{d\mathbf{u}}{dt} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \phi + f \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} &= \mathbf{F}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &\propto \frac{U^2}{L} \\
f\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} &\propto fU \\
\Rightarrow R_0 &= \frac{\text{Skalert akselerasjon}}{\text{Skalert Coriolis}} \\
&= \frac{\frac{U^2}{L}}{fU} \\
&= \frac{U}{fL}
\end{aligned}$$

- b) Hvorfor er vi interesserte i dette tallet, og hva betyr det at det er lite/stort?

Svar: Siden Rossbytalet er forholdet mellom akselerasjonsleddet og Coriolisleddet, sier dette tallet noe om hvilke av leddene som dominerer. Dominerer Coriolisleddet har vi små verdier for R_0 . Dette skjer ved geostrofisk balanse for storskalabevegelser i den frie atmosfære.

- c) For storskala bevegelser i atmosfæren ved 45° N er typiske verdier $U = 10$ m/s og $L = 1000$ km. Beregn f og R_0 .

Svar:

$$\begin{aligned}
f &= 2\Omega \sin \phi \\
&= 2 \cdot \frac{2\pi}{24 \cdot 3600 \text{ s}} \cdot \sin 45 \\
&= 1,028 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} \\
R_0 &= \frac{U}{fL} \\
&= \frac{10}{1,028 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} \\
&= 0,1
\end{aligned}$$

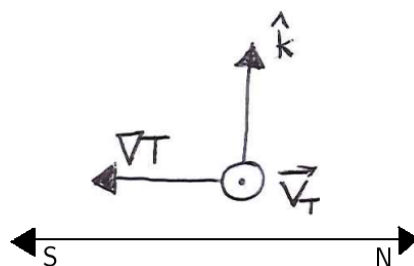
Oppgave 3 - Termalvind

- a) Fra termalvindlikningen har vi at

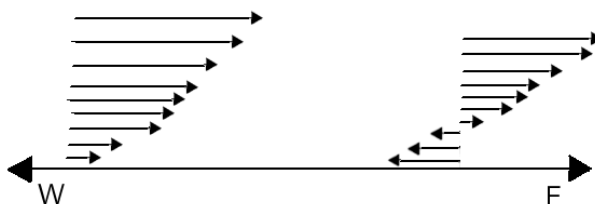
$$\mathbf{v}_T \propto \hat{\mathbf{z}} \times \nabla T$$

Hva er \mathbf{v}_T ?

Svar: $\mathbf{v}_T = \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial z}$, altså et uttrykk for hvordan den geostrofiske vinden varierer med høyden. Vi ser på både på hvordan retningen og styrken til vinden endres med høyden.



Figur 2: Illustrasjon av hvordan termalvinden påvirkes av temperaturen når det er kaldere i nord enn i sør.



Figur 3: Illustrasjon av hvordan den geostrofiske vinden kan variere med høyden som følge av lavere temperaturer i nord enn i sør.

Vi ser på et tilfelle hvor temperaturen i lufta er kaldere i retning nord enn i retning sør.

b) Hvordan vil den geostrofiske vinden variere med høyden?

Svar: Når det er kaldere i nord enn i sør, vil temperaturgradienten være positiv sørover. Kryssproduktet vil gi oss termalvind i retning øst, det vil si at vi får sterkere vestavind (husk at vestavind/westerlies er det vi får når det blåser fra vest mot øst, altså eastwards). Den geostrofiske vinden vil altså bli sterkere fra vest mot øst når vi beveger oss oppover i atmosfæren. To slike tilfeller er illustrert i Figure 3.

c) Hvordan vil den geopotensielle høyden til en trykkflate variere når vi beveger oss lengre nordover i dette tilfellet?

Svar: Siden lufta lengre nord er kaldere, vil den komprimeres og ta mindre plass enn den varme lufta i sør. Dette fører til at den geopotensielle høyden til en trykkflate avta når vi beveger oss nordover.

Oppgave 4 - Subgeostrofisk balanse

Vi ser på horisontalkomponentene av bevegelseslikningen

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla_{HP} - f\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} + \mathbf{F}$$

- a) Hva kalles balansen vi får når ingen av leddene på høyre side er neglisjerbare (vi har balanse mellom disse tre)?

Svar: Subgeostrofisk balanse.

- b) Hvorfor går den geostrofiske balansen over til denne balansen når vi beveger oss ned fra den frie troposfæren og mot grenselaget?

Svar: Fordi strømingene blir utsatt for friksjon.

- c) Figur 4 viser isobarene i grenselaget over et stort område på nordlig halvkule ved midlere breddegrader. Tegn inn piler som viser hvordan vindfeltet ser ut.

Svar: Se Figur 5

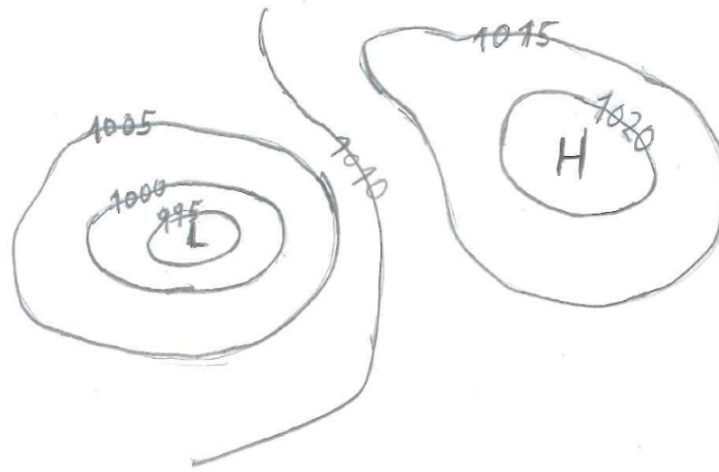
- d) Vi har subgeostrofisk balanse. Tegn inn kreftene som virker på en strømning rundt et høytrykk på sørlig halvkule. Tegn også inn bevegelsesretningen.

Svar: Følger du disse stegene, ender du opp med en Figur á la Figur 6 (men du kan selvsagt komme fram til figuren via andre steg også):

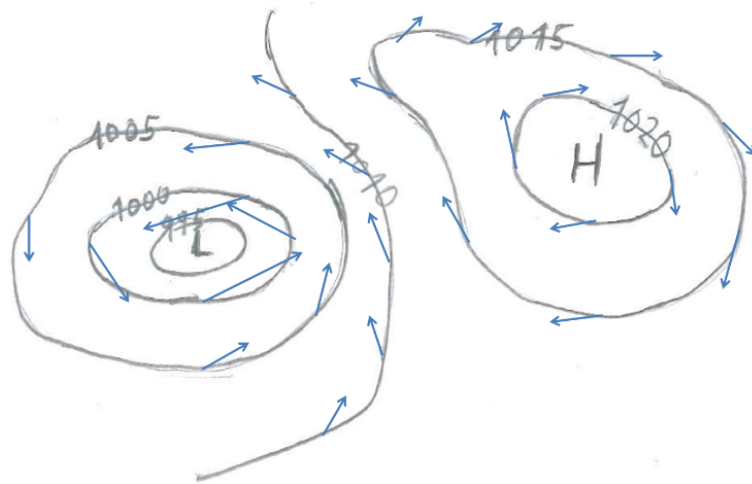
- Begynn med å tegne inn trykkgradientkraften (blå). Den skal alltid virke fra høyt mot lavt trykk.
 - Tegn inn summen av Corioliskraften og friksjonskraften (oransje). Denne skal balansere trykkgradientkraften.
 - Tegn inn bevegelsesretningen. Siden dette er et høytrykk på sørlig halvkule, vet vi at den skal gå mot klokka. Siden vi har subgeostrofisk balanse, vet vi at bevegelsen ikke er helt radiell, men litt utover (siden det er høytrykk).
 - Tegn inn Corioliskraften (rød), som skal virke 90° til venstre for bevegelsen siden vi er på sørlig halvkule, og friksjonskraften (grønn), som skal virke i motsatt retning av bevegelsen. Sørg for at størrelsen på disse to kreftene er slik at summen (oransje) balanserer trykkgradientkraften (blå).
- e) Basert på svarene fra de forrige oppgavene, hvor får vi konvergens og hvor får vi divergens? Hva betyr dette for de vertikale bevegelsene overfor grenselaget på disse stedene, og kan vi ut ifra dette si noe om hvorfor lavtrykk ofte medfører nedbør,

mens høytrykk ofte gir oss pent vær?

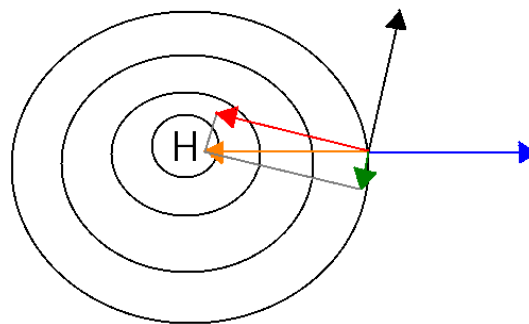
Svar: Fra figurene vi har tegnet ser vi at vi får konvergens ved lavtrykkene og divergens ved høytrykkene. Konvergens tvinger lufta oppover, og basert på hva vi har lært om Clausius Clapeyron, vet vi at dette kan føre til at en umettet luftpakke blir mettet, og følgelig kan vi få nedbørsdannelse. Divergens ved høytrykk fører til at lufta over vil synke. Lufta over er tørr, og bli enda tørrere ved nedsynking. Følgelig får vi ofte fint vær. (I enkelte høytrykksområder kan vi likevel ha skydannelse (eks: stratocumulusskyer. Mer om dette i senere kurs). Se Figur 7 for illustrasjon.



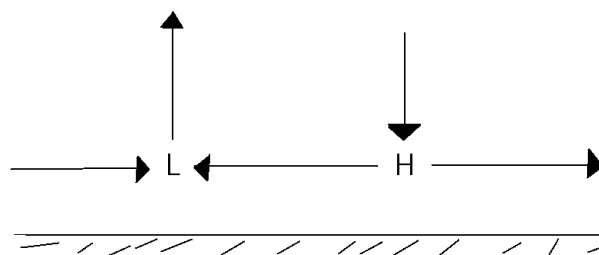
Figur 4: Isobarer i grenselaget.



Figur 5: Bevegelsesretning rundt høytrykk og lavtrykk på norlig halvkule ved subgeostrofisk balanse.



Figur 6: Krefter og bevegelsesretning rundt et høytrykk på sørlig halvkule ved subgeostrofisk balanse.



Figur 7: Konvergens og divergens i områder med lavtrykk og høytrykk.