

Forelesning nr.3 IN 1080

Mekatronikk

Norton- og Thévenins teoremer
ac-analyse og kondensatorer



Dagens temaer

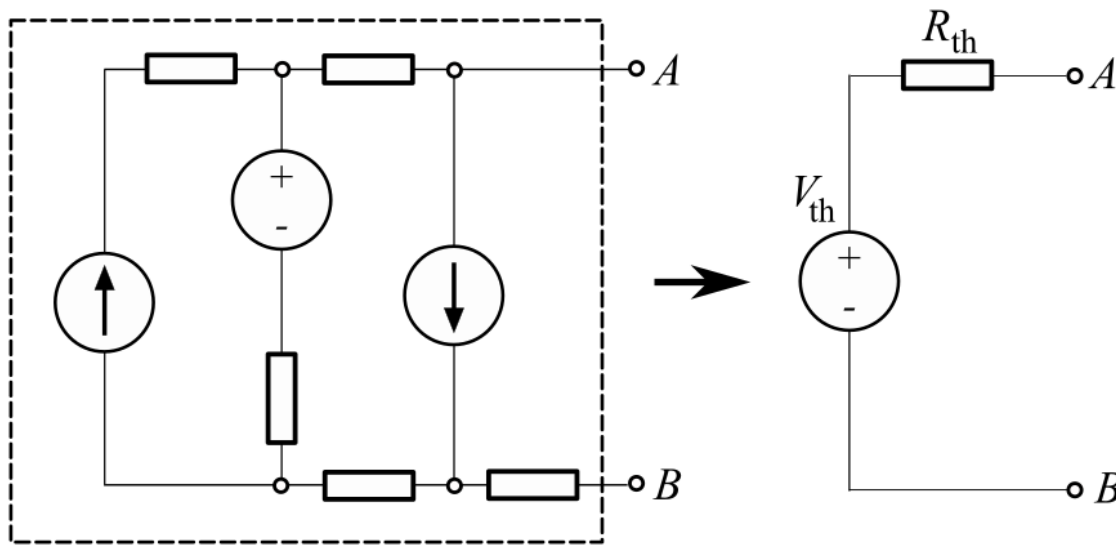
- Kahoot-quiz
- Nortons og Thévenins teoremer
- Representasjon av sinussignaler
- Kondensatorer
- Tidsrespons til RC-krets

Repetisjonsquiz

Gå til **kahoot.it** i en nettleser og tast deretter inn pin-nummeret som straks vises på skjermen.

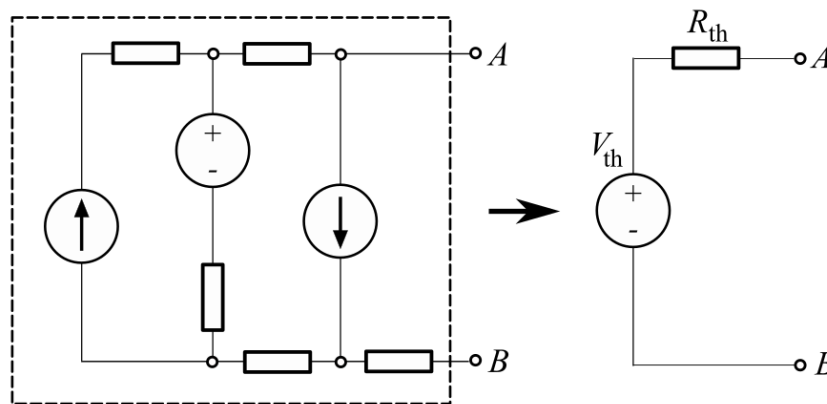
Thévenins teorem

- «Ethvert lineært to-terminalers nettverk bestående av strømkilder, spenningskilder og resistorer kan erstattes av en ekvivalent krets med én spenningskilde i serie med én resistor»



Thévenins teorem (forts)

- Fremgangsmåte
 - Identifiser (del)kretsen som skal erstattes av en Thévenin-ekvivalent
 - Beregn V_{th} og R_{th}
 - V_{th} : Spenningen V_{AB} mellom A og B etter at resten av kretsen er fjernet
 - R_{th} : Resistansen mellom A og B når spenningskildene kortsluttes og strømkildene åpnes

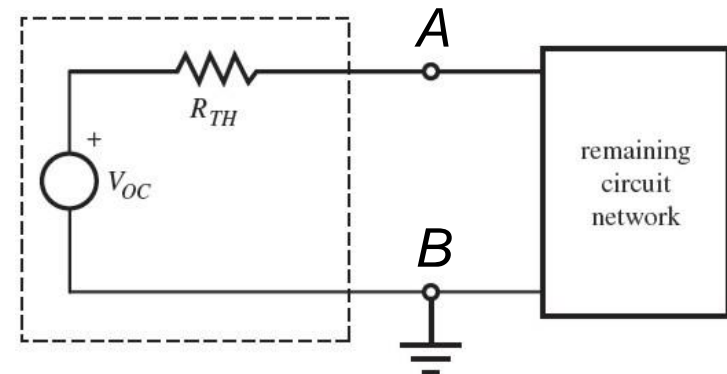
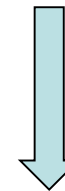
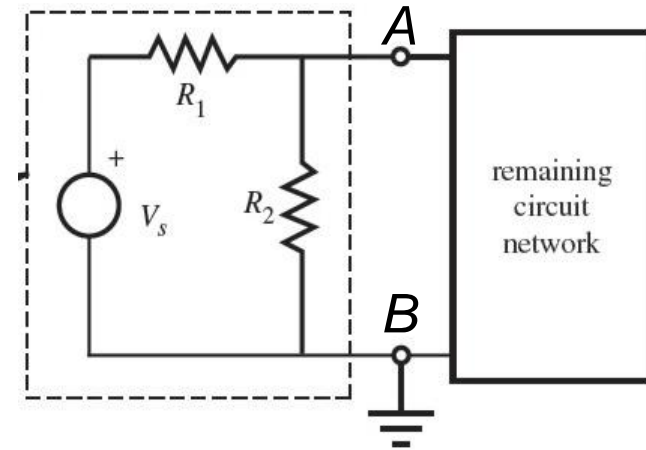


Thévenins teorem (forts)

- Eksempel
 - V_{th} : Spenningen mellom A og B etter at resten av kretsen er fjernet (OC = «Open Circuit»)
 - R_{th} : Resistansen mellom A og B når V_s kortsluttes

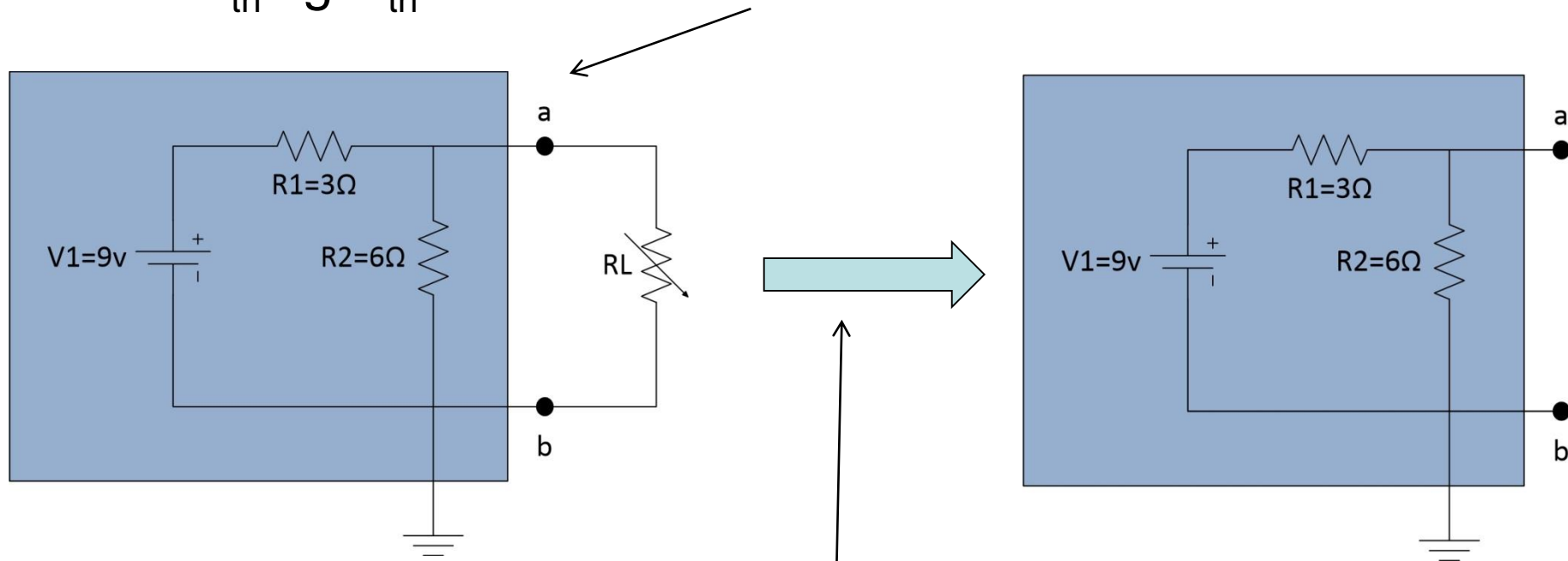
$$V_{th} = V_{oc} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_s$$

$$R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



Thévenins teorem (forts)

- Finn V_{th} og R_{th} for den blå delen



Fjerner kretsen som ikke skal inngå (dvs tar bort R_L)

Thévenins teorem (forts)

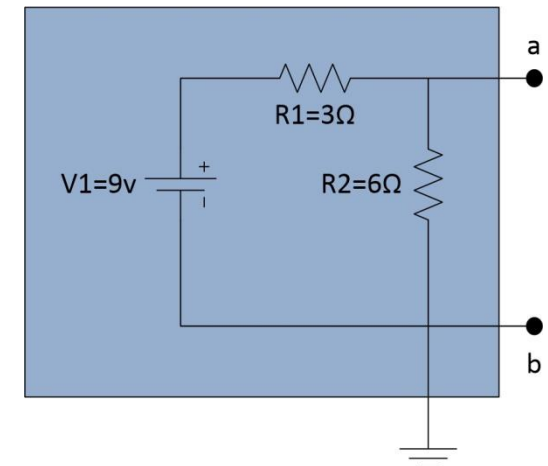
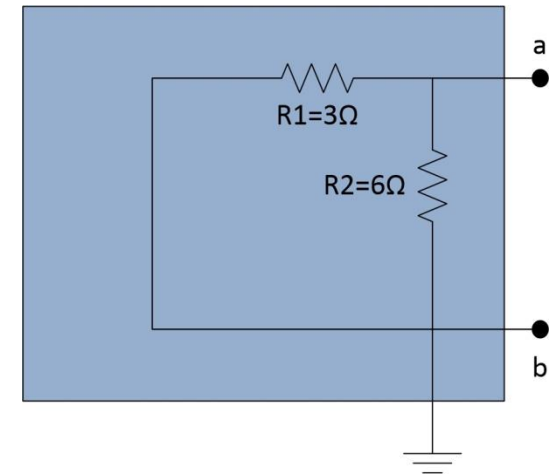
1. Nuller ut kilden(e): Kortslutter V1

2. Beregner R_{th} mellom node a og b:

$$R1 \parallel R2 = (R1 * R2) / (R1 + R2) = (3\Omega * 6\Omega) / (3\Omega + 6\Omega) = 2\Omega$$

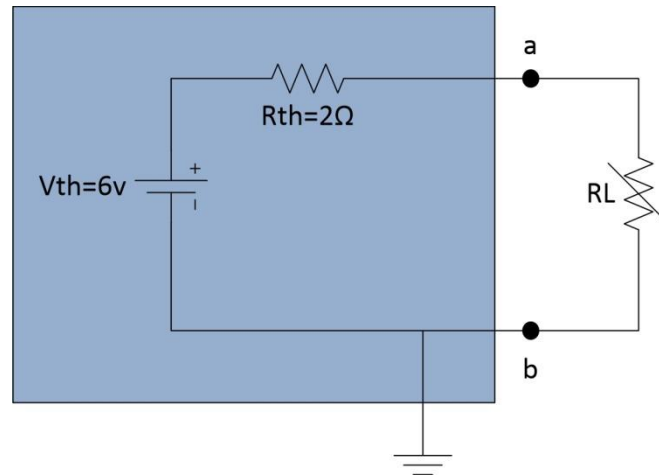
3. Setter tilbake V1 og finner Vab:

$$V_{ab} = V_{th} = V1 * (R2 / (R1 + R2)) = 9v * (6\Omega / (3\Omega + 6\Omega)) = 6v$$



Thévenins teorem (forts)

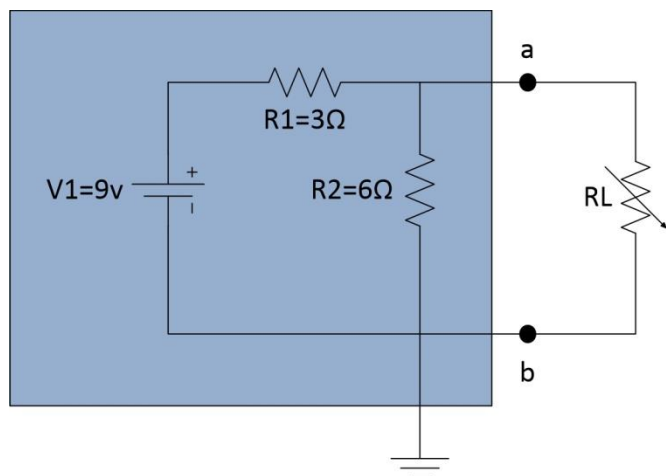
- Setter sammen ekvivalenten og kobler til resten:



- For ulike verdier av den variable resistoren R_L er det nå enklere å beregne f.eks hvordan strømmen gjennom den varierer

Thévenins teorem (forts)

Uten Thévenin-forenkling



$$I_L = V_{ab}/R_L \text{ og } V_{ab} = V_1 \cdot R_1 / (R_1 + R_2 || R_L)$$

$$I_L = V_1 \cdot R_1 / (R_1 + R_2 \cdot R_L / (R_2 + R_L)) / R_L$$

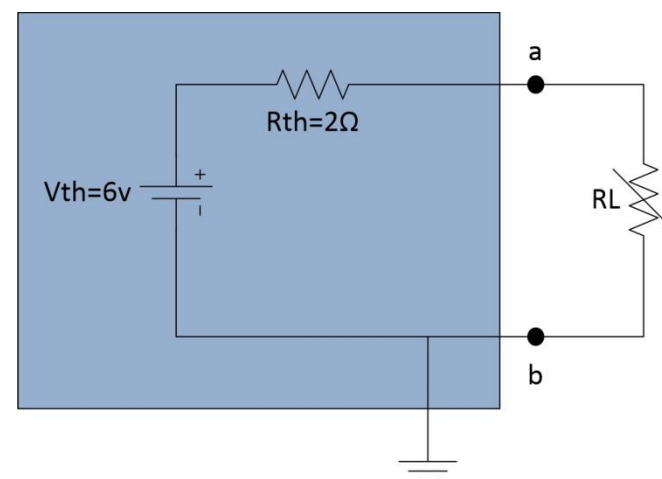
$$R_L = 2\Omega : I_L = 9\text{V} \cdot 3\Omega / (3\Omega + 6\Omega \cdot 2\Omega / (6\Omega + 2\Omega)) / 2\Omega = 1.5\text{A}$$

$$R_L = 10\Omega : I_L = 9\text{V} \cdot 3\Omega / (3\Omega + 6\Omega \cdot 10\Omega / (6\Omega + 10\Omega)) / 10\Omega = 0.5\text{A}$$

$$R_L = 100\Omega : I_L = 9\text{V} \cdot 3\Omega / (3\Omega + 6\Omega \cdot 100\Omega / (6\Omega + 100\Omega)) / 100\Omega = 0.06\text{A}$$



Med Thévenin-forenkling



$$I_L = V_{th} / (R_{th} + R_L)$$

$$R_L = 2\Omega : I_L = 6\text{V} / (2\Omega + 2\Omega) = 1.5\text{A}$$

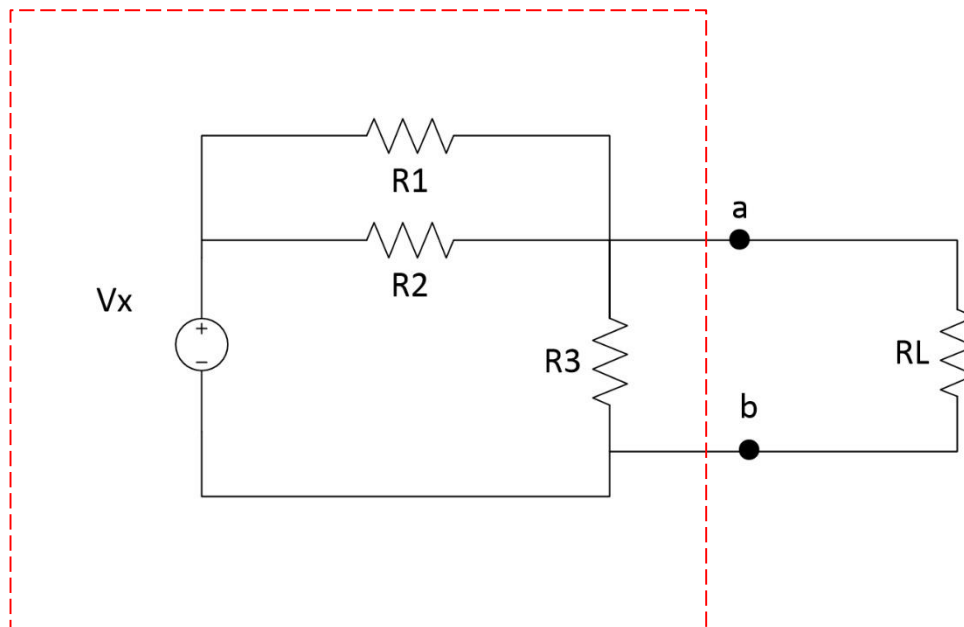
$$R_L = 10\Omega : I_L = 6\text{V} / (2\Omega + 10\Omega) = 0.5\text{A}$$

$$R_L = 100\Omega : I_L = 6\text{V} / (2\Omega + 100\Omega) = 0.06\text{A}$$



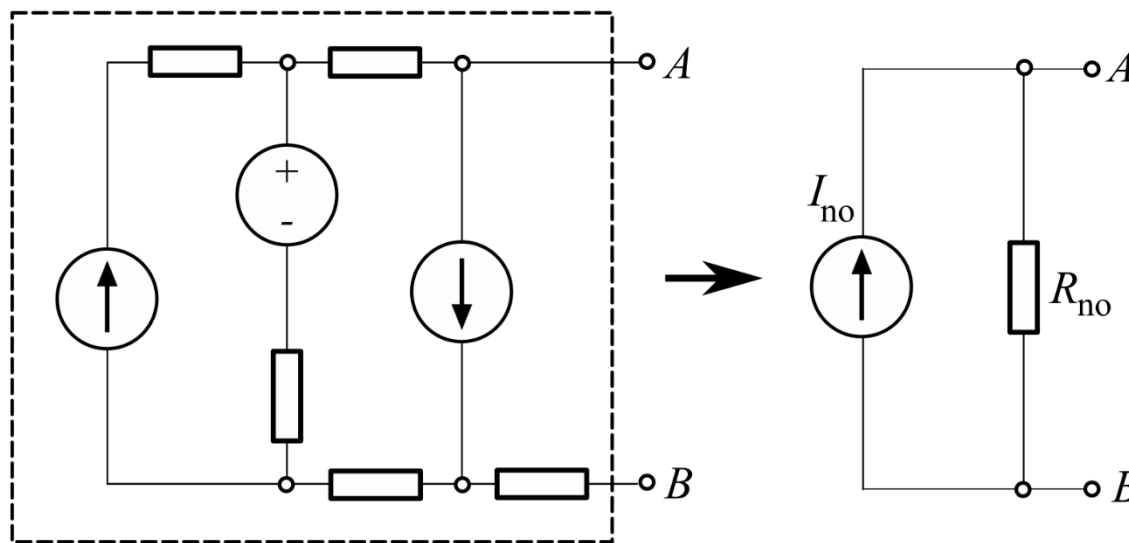
Oppgave

- Finn Thévenin-ekvivalenten til kretsen til venstre for terminalene **a** og **b** når $V_x=12\text{v}$, $R_1=10\text{ k}\Omega$, $R_2=40\text{ k}\Omega$ og $R_3=2\text{ k}\Omega$



Nortons teorem

- Variant av Thévenins teorem
- «Ethvert lineært to-terminalers nettverk bestående av strømkilder, spenningskilder og resistorer kan erstattes av en ekvivalent krets med én strømkilde i parallell med én resistor»



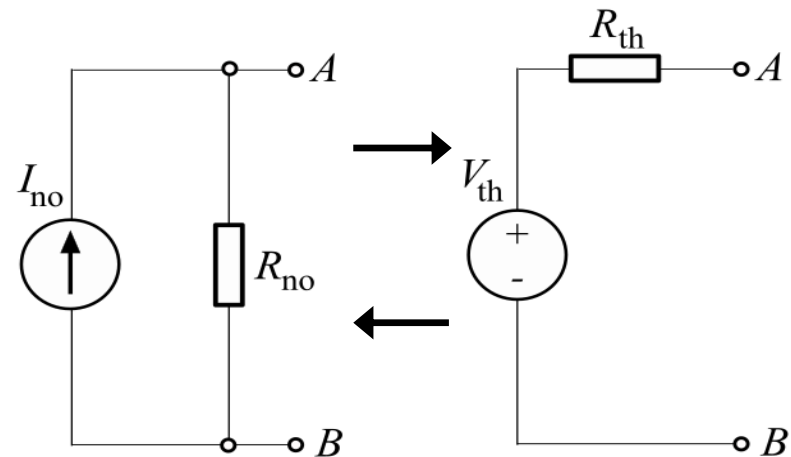
Nortons teorem

- Samme metode som for Thévenins teorem
 - Likhet: Kildene kortsluttes (spenningskilder) eller åpnes (strømkilder)
 - Forskjell: Terminalene A og B kortsluttes for å finne strømmen gjennom dem (istedenfor å beregne spenningen over dem)
- Sammenhengen mellom Norton- og Thévenin-ekvivalenter:

$$R_{th} = R_{no}$$

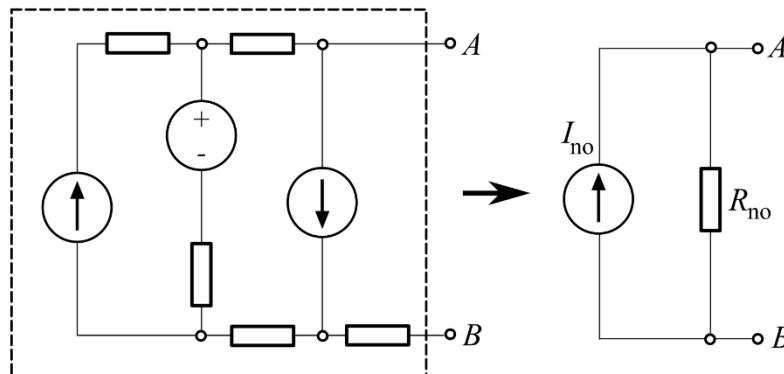
$$V_{th} = I_{no} R_{no}$$

$$\frac{V_{th}}{R_{th}} = I_{no}$$



Nortons teorem (forts)

- Fremgangsmåte
 - Identifiser (del)kretsen som skal erstattes av en Norton-ekvivalent
 - Beregn I_{no} og R_{no}
 - I_{no} : Strømmen fra A til B når resistorene erstattes med R_{th} og kildene med V_{th}
 - R_{no} : Samme som Thévenin-resistansen R_{th}

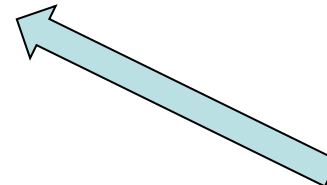
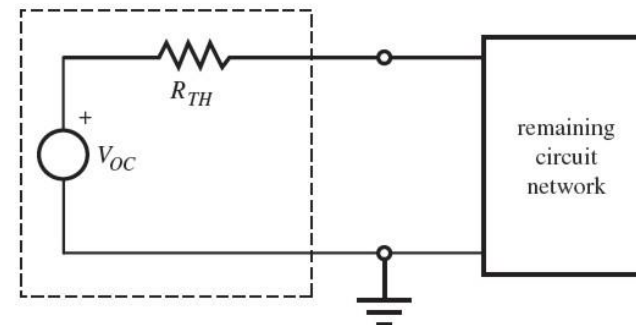
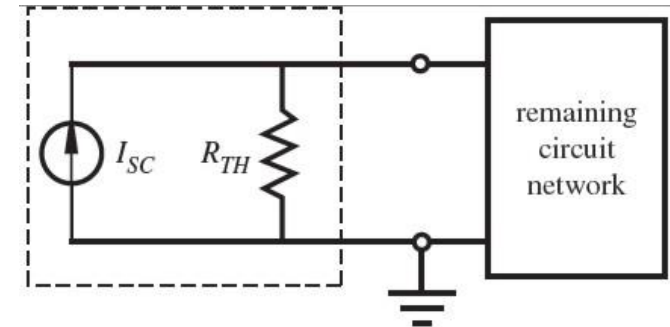
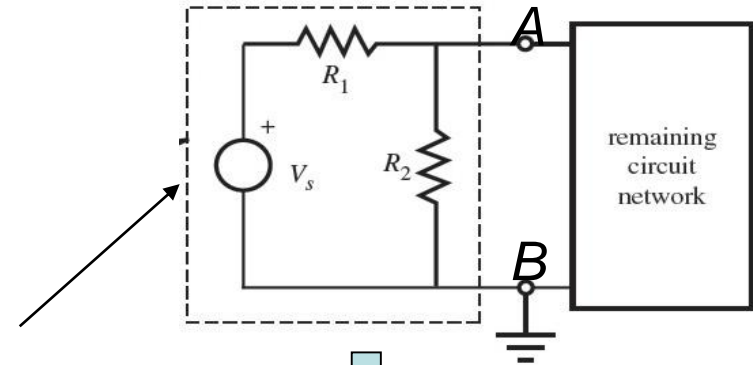


Nortons teorem (forts)

- Eksempel
 - Identifiser (del)kretsen som skal erstattes med Norton-ekvivalenten
 - Beregn I_{no} og R_{no}

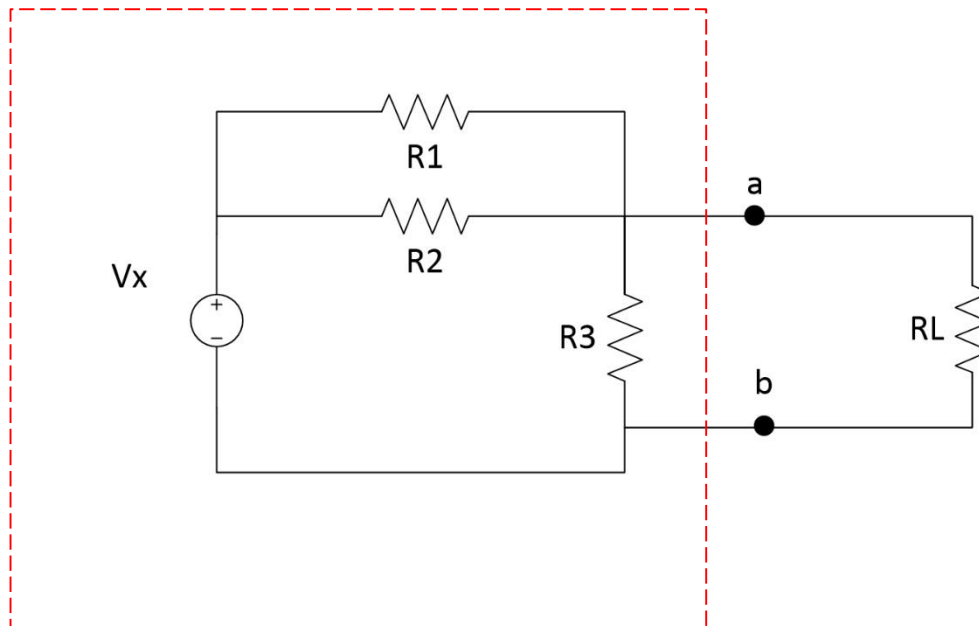
$$R_{no} = R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_{no} = \frac{V_{th}}{R_{th}}$$



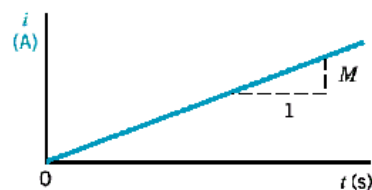
Oppgave

- Finn Norton-ekvivalenten til kretsen på side 17 når $V_x=12\text{v}$, $R_1=10\text{ kOhm}$, $R_2=40\text{kOhm}$ og $R_3=2\text{kOhm}$

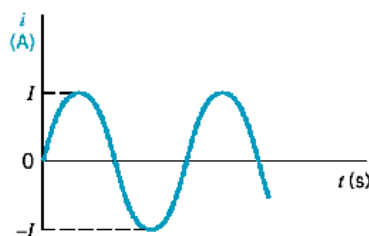


Signaler

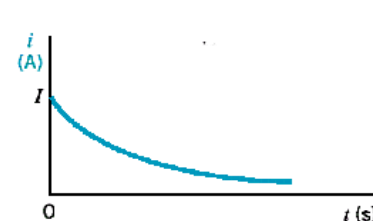
- Et *signal* er en strøm eller spenning som overfører informasjon
- Signaler som varierer over tid kalles ac-signaler
 - Informasjonsinnholdet kan ligge i tidsvariasjonen
 - Variasjonen kan være *periodisk* (b), dvs. den gjentar seg med faste mellomrom, eller *ikke-periodisk* ((a) og (c))
- dc-signaler også kan variere over tid, men dette er som regel ikke tilsiktet (f.eks. batteri som lades ut)



(a)



(b)



(c)

Sinussignaler

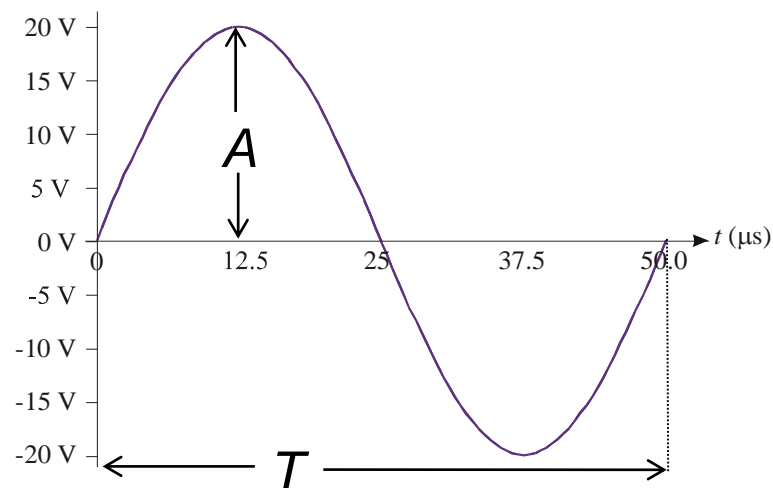
- Mange naturlige fenomener varierer med sinus-karakteristikk
- Sinussignaler og deres egenskaper kan beskrives presist matematisk
- Vilkårlige signaler kan representeres som summer av sinusformede signaler
- Sinussignaler er viktige i bla lyd- og bildebehandling



Amplitude og periode

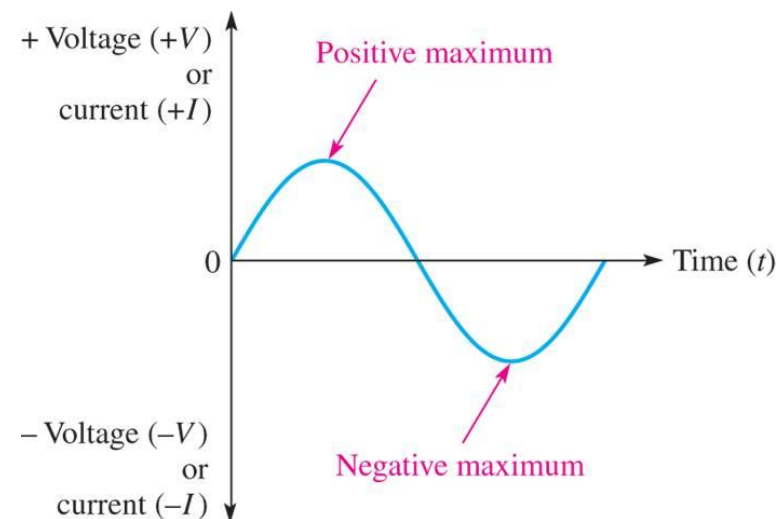
- En enkel variant av et sinussignal er gitt av $f(t) = A \cdot \sin(t)$
- Skaleringsfaktoren A kalles *amplitude* og er den maksimale verdien $f(t)$ kan ha
- T kalles *perioden* og er tiden det tar før (sinus)signalet gjentar seg

$A = 20$ volt
 $T = 50 \mu\text{s}$



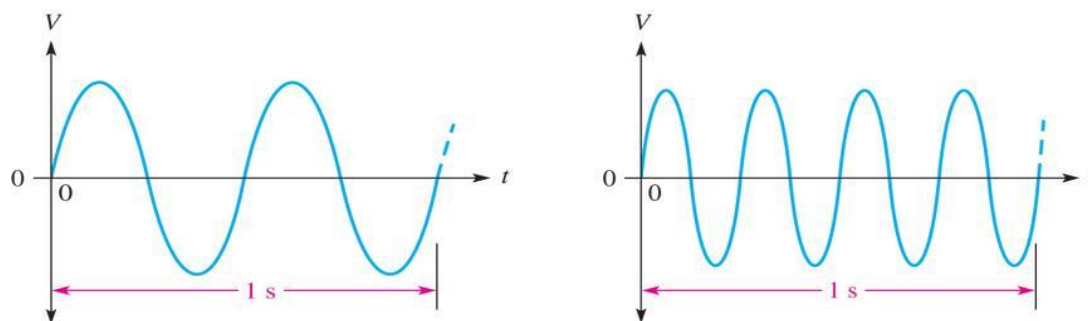
Amplitude og periode (forts)

- Et *balansert* sinussignal er sentrert rundt 0: Maksimal positiv verdi = maksimal negativ verdi (absoluttverdi).
- Amplituden er den positive maksimumsverdien
- Gjennomsnittsverdien over en hel periode er lik 0 hvis signalet er balansert



Mer om periode og frekvens

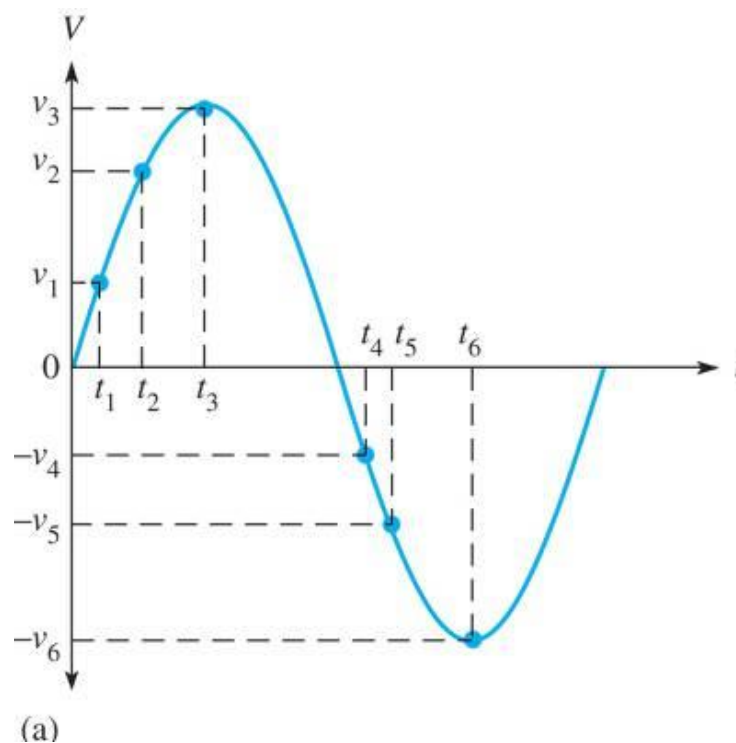
- Mens perioden er tiden det tar før signalformen gjentas, er *frekvensen* antallet ganger signalformen gjentar seg per sekund



- Frekvens måles i Hertz: $1\text{Hz} = 1/\text{s}$
- Perioden T og frekvensen f er omvendt proporsjonale: $T = \frac{1}{f} \Leftrightarrow f = \frac{1}{T}$

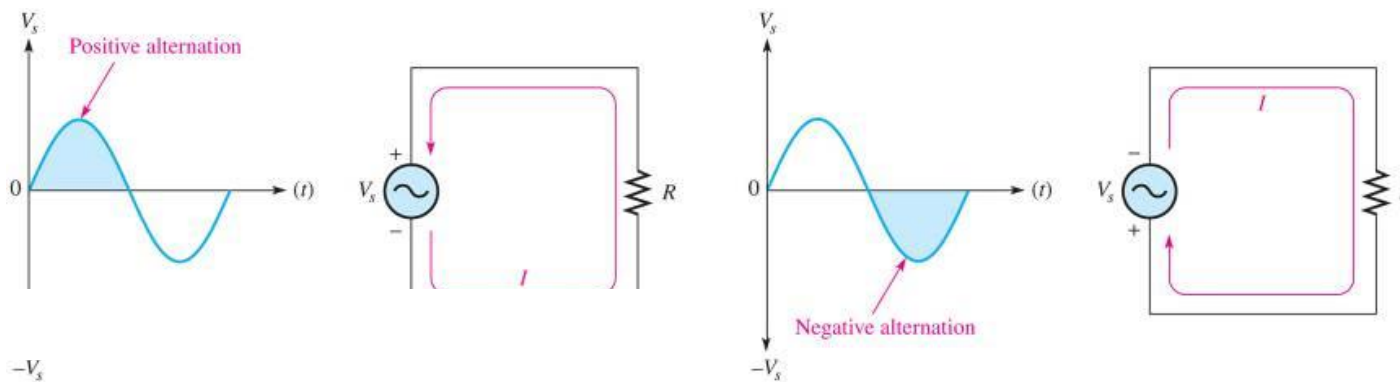
Oppgave

- Gitt sinussignalet til høyre
 - Spm 1: Hva er perioden hvis $t_3=0,01s$?
 - Spm 2: Hva er frekvensen hvis $t_3=0,002s$?
 - Spm 3: Hvordan finner vi amplituden til signalet?
 - Spm 4: Hva er gjennomsnittsverdien over en hel periode?
 - Spm 5: Vis grafisk når er endringen i signalet minst.
 - Spm 6: Begrunn matematisk når endringen i signalet størst.



Strøm- og spenningsretning

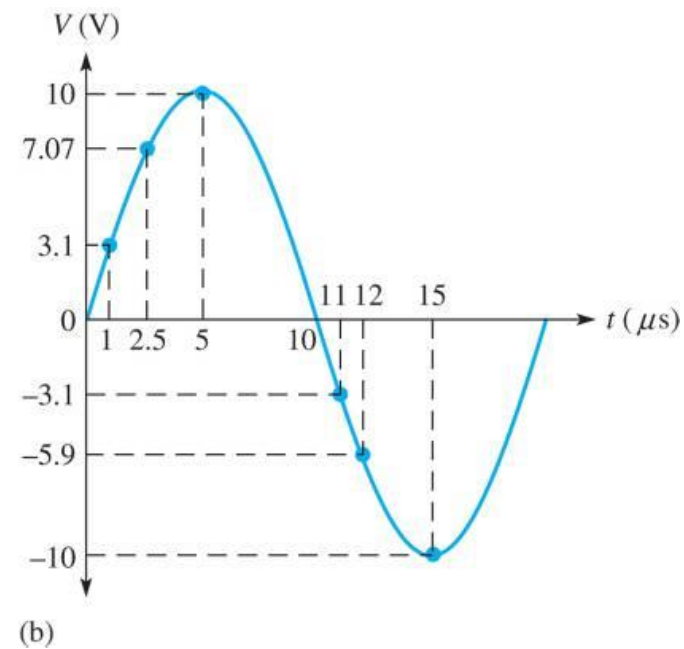
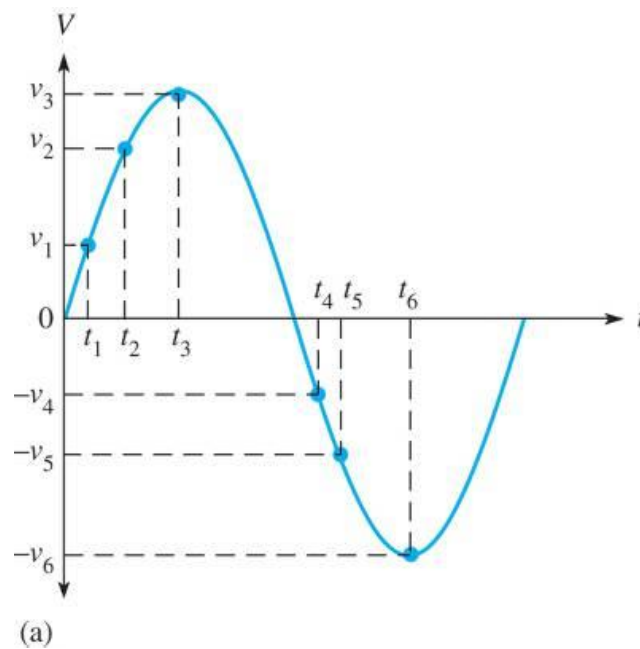
- For et balansert sinussignal endres strømretningen og/eller polariteten til spenningen en gang per periode



- Signalet er positivt halve perioden og negativ den andre halve perioden

Øyeblikksverdi

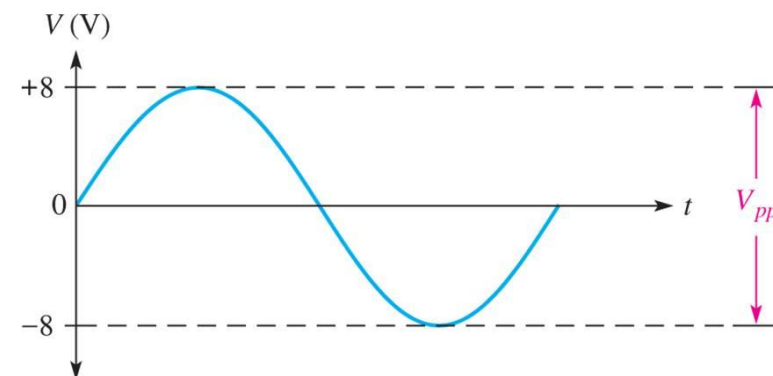
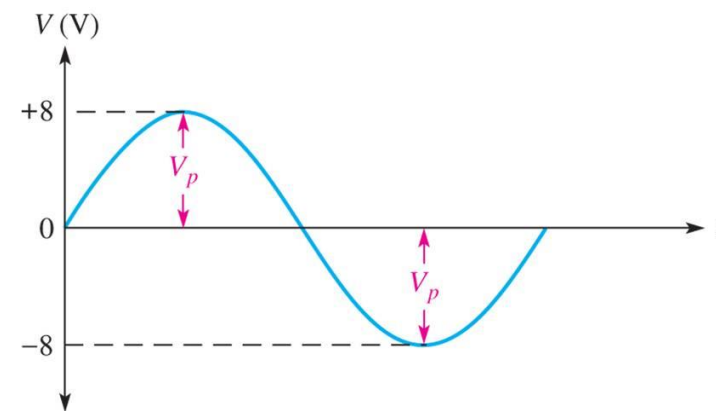
- Øyeblikksverdien er amplituden på et bestemt tidspunkt t_i



Peak-til-peak verdi

- Amplitude kalles også *magnitude* eller *peak-verdi* V_p
- *Peak-til-peak* verdi er definert som

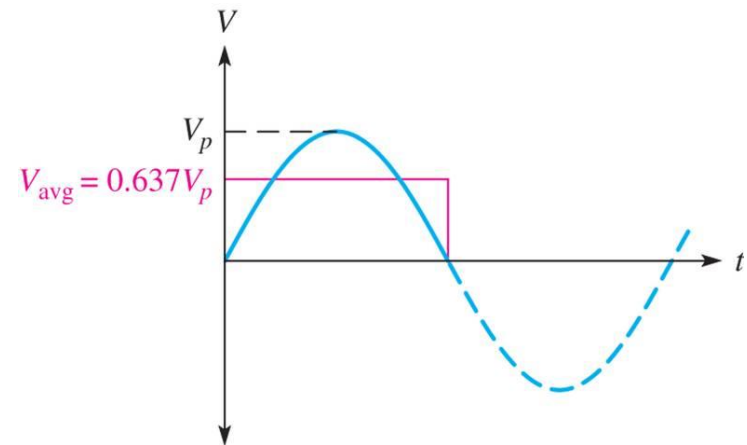
$$V_{pp} = 2V_p \wedge I_{pp} = 2I_p$$



Gjennomsnittsverdi

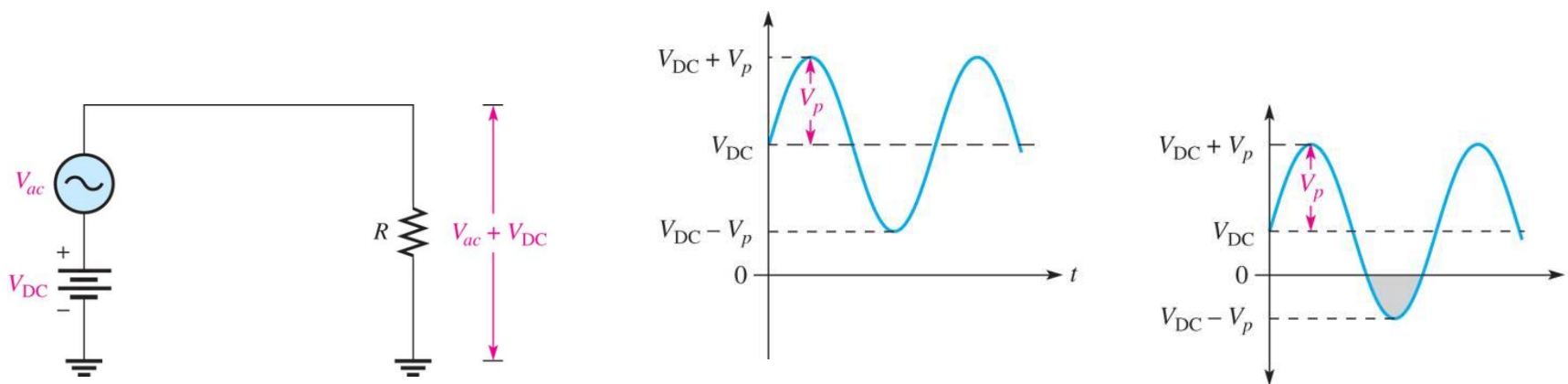
- Oppgave:
 - Spm 1: Hva sier gjennomsnittsverdien til et sinussignal?
 - Spm 2: Over hvilket tidsintervall bør vi beregne gjennomsnittsverdien?
 - Spm 3: Vis at gjennomsnittsspenningen er gitt av formelen

$$V_{avg} = \frac{2}{\pi} V_p \approx 0.637 * V_p$$



Sinussignaler med dc-offset

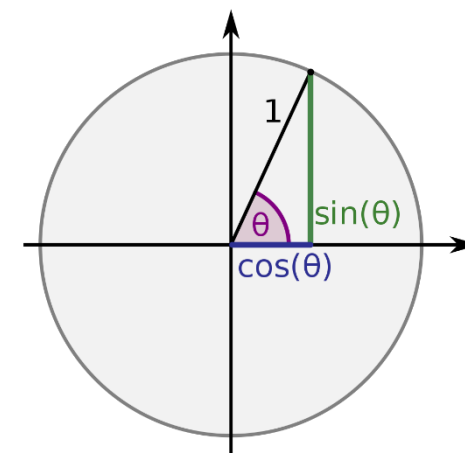
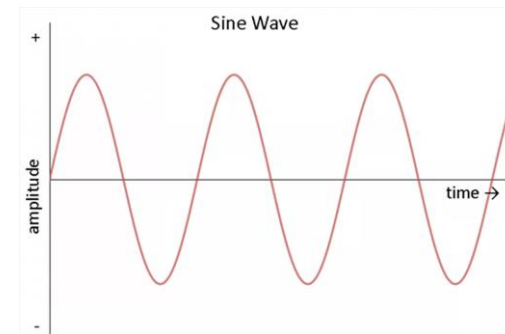
- Hvis sinussignalet har en dc-komponent, forskyves amplituden opp eller ned



- V_p defineres relativt til dc-offset, og ikke fra 0

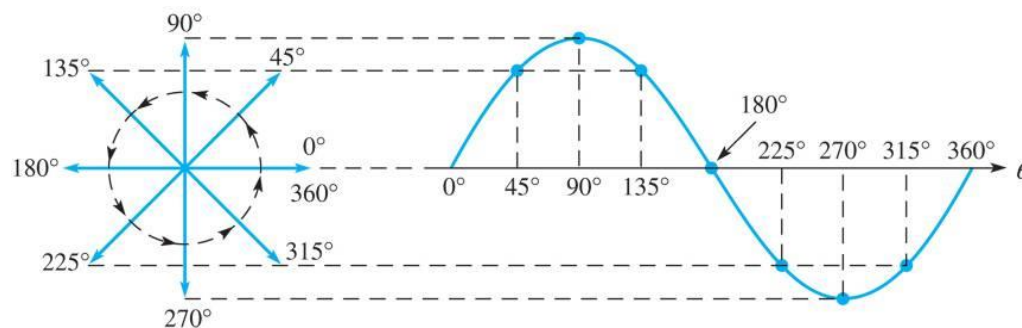
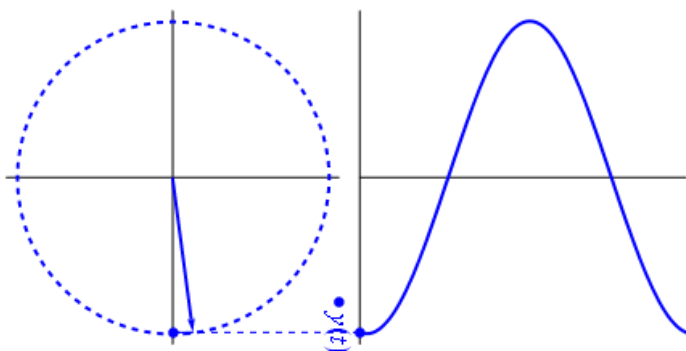
Mer om sinusfunksjonen

- Så langt har vi betraktet sinus som en funksjon med tid som den uavhengige variabelen (tiden t går langs den horisontale akse): $f(t) = \sin(t)$
- Vi kan også bruke definisjonen ut fra enhetssirkelen og la vinkelen mellom den horisontale akse og vektoren som utgjør radius være argument til sinus: $g(\phi) = \sin(\phi)$



Mer om sinusfunksjonen (forts)

- I stedet for å la tiden t øke for å vise endringen over tid, kan vi la vinkelen ϕ øke, som betyr at vi roterer vektoren som utgjør hypotenusen i trekanten hvor $\sin(\phi)$ er lengden på motstående katet
- Etter en hel omdreining, dvs $\phi = 2\pi$, er vi tilbake til utgangspunktet
- Om endepunktet projiseres horisontalt på en rett linje, får man en «vanlig» sinuskurve:



Mer om sinus (forts)

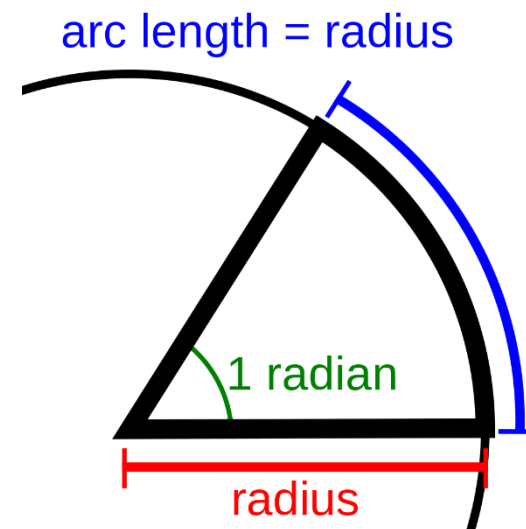
- *Radian* er lengden som spissen av vektoren har tilbakelagt; 1 radian tilsvarer lengden på radius
- Sammenhengen mellom grader og radianer er

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \leftrightarrow 1 \text{ rad} = \left(\frac{\pi}{180^\circ}\right) * \text{grader}$$

- *Vinkelhastighet* (“angular velocity”) sier hvor hurtig vektoren roterer rundt enhetssirkelen:

$$\text{vinkelhastighet} = \frac{\text{avstand (målt i grader eller radianer)}}{\text{tid (målt i sekunder)}} \leftrightarrow \omega = \frac{\alpha}{t}$$

- Vinkelhastigheten som behøves for å fullføre en hel periode er gitt av $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$
- ω kalles også *vinkelfrekvens*



Mer om sinus (forts)

- Dette gjør at vi kan skrive sinusformede strømmer og spenninger som

$$i(t) = I_m \sin(\omega t)$$

$$v(t) = V_m \sin(\omega t)$$

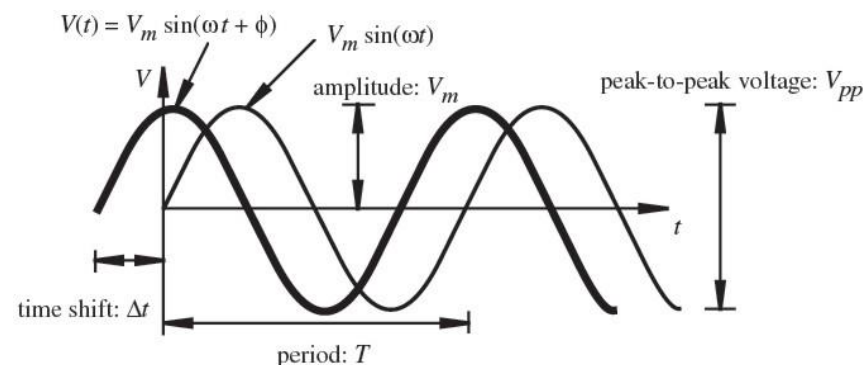
- Tilslutt trenger vi å ta hensyn til at sinuskurven ikke alltid starter i (0,0)

- Forskyves kurven horisontalt (mot venstre eller høyre) kalles dette *faseskift* eller *fasedreining*

- Fasedreiningen angis ved å legge til en vinkel ϕ

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$$



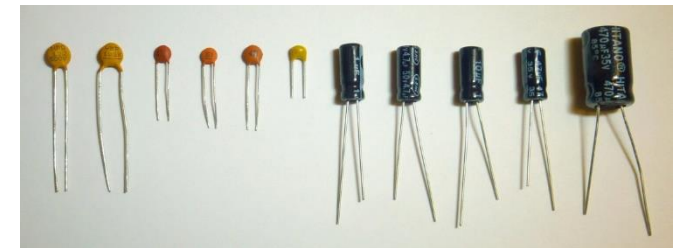
Positiv ϕ flytter kurven mot venstre

Oppgave

- Spm 1: Hva er definisjonen av 1 radian?
- Spm 2: Hva måleenheten for radianer?
- Spm 3: Hvordan definerer vi vinkelhastighet og hva er måleenheten?
- Spm 4: Hva er et annet navn for vinkelhastighet?
- Spm 5: Hva er vinkelhastigheten til en sinusbølge med $f=60\text{Hz}$?
- Spm 6: Gitt en sinusbølge med vinkelfrekvens $= 500 \text{ rad/s}$. Hva er frekvensen målt i Hertz og perioden målt i sekunder?

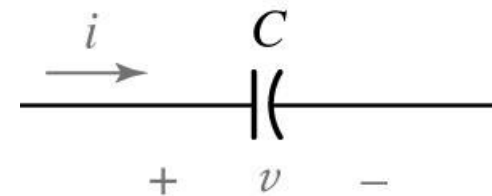
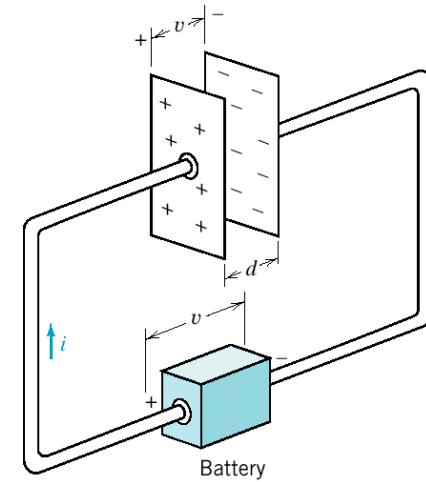
Kondensatorer

- Kondensatorer er viktige i elektronikk og har mange bruksområder
 - Lagring av energi (ladninger)
 - Utglatting av signaler som endrer seg hurtig
 - Blokkering av signaler med bestemte frekvenser
 - Omvandling av likestrøm til vekselstrøm – og omvendt (dc-ac og ac-dc omformere)
 - Spenningsregulatorer, batterier etc
 - Beskyttelse mot høye og kortvarige spenningspulser
- Impedansen til **resistorer** er UAVHENGIG av frekvensen til strømmen som går gjennom dem
- Impedansen til **kondensatorer** VARIERER med frekvensen til strømmen



Kondensatorer (forts)

- En kondensator kan lagre elektrisk ladning
- En kondensator består av to plater av ledende materiale med isolasjon i mellom
- Kondensatorer kan lages av ulike materialer
- Noen har «+» og «-» terminal; disse kan eksplodere hvis de kobles feil!



Kondensatorer (forts)

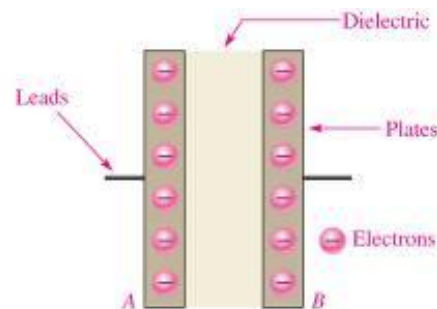
- En kondensator kan sammenlignes med et vannrør med en elastisk membran



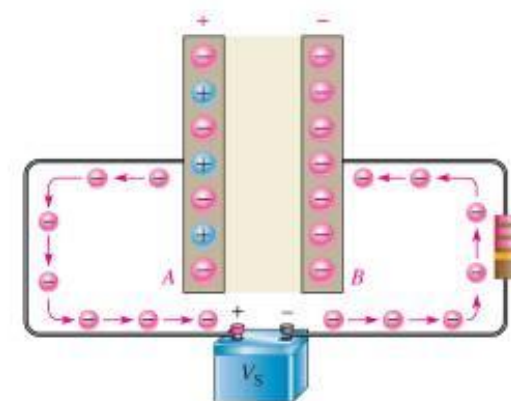
- Hvis vannet beveger seg vil membranen også bevege seg (et stykke), slik det ser ut som det renner vann igjennom røret (vann = elektrisk strøm)
- Hvis vannet endrer retning, vil membranen gå tilbake til sin opprinnelige posisjon og presse vannet tilbake
- Det vil være trykkforskjell på hver side av membranen når vannet beveger seg (trykkforskjell = spenning)
- Uten bevegelse i vannet vil membranen ikke bevege seg (dc-spenning gir ingen strøm gjennom kondensatoren)

Kondensatorer (forts)

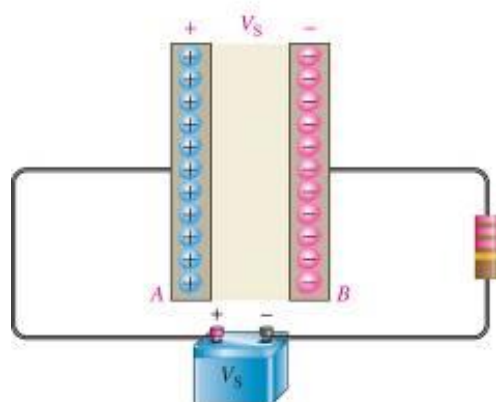
- Hvis platene kobles til en spenning V_s , oppstår et elektrisk felt mellom platene
- Feltet gjør at elektroner beveger seg fra den ene platen over til den andre
- Når spenningen mellom platene har nådd V_s vil ikke lenger elektroner bevege seg



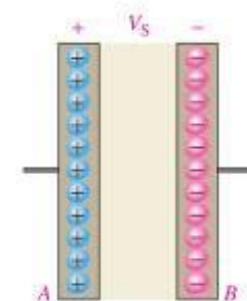
(a) Neutral (uncharged) capacitor
(same charge on both plates)



(b) When connected to a voltage source, electrons flow from plate A to plate B as the capacitor charges.



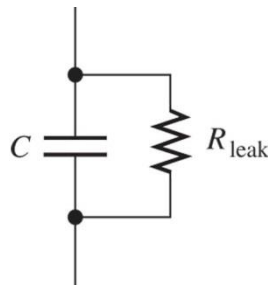
(c) After the capacitor charges to V_s , no electrons flow.



(d) Ideally, the capacitor retains charge when disconnected from the voltage source.

Kondensatorer (forts)

- Hvis spenningskilden fjernes vil en *ideell* kondensator beholde spenningen til evig tid
- I en *fysisk* kondensator derimot «lekker» platene ladninger slik at kondensatoren utlades
- Denne effekten kan modelleres med en resistor i parallell:



- Hvis frekvensene blir høye ($\sim 10^9$ Hertz) blir oppførselen mer komplisert

Kondensatorer (forts)

- Evnen til å lagre ladninger kalles *kapasitans* C , som måles i *Farad* og er definert ved

$$C = \frac{Q}{V} \Leftrightarrow Q = CV \Leftrightarrow V = \frac{Q}{C}$$

- 1 Farad er lagring av 1 Coulomb med 1 volt potensialforskjell mellom platene
- Kapasitansen bestemmes av plateareal A , plateavstand d og permittiviteten ε

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$

- ε er en egenskap ved materialet mellom platene og måles i Farad/meter

Sammenheng strøm, spenning og impedans

- Sammenhengen mellom strømmen gjennom og spenningen over en kondensator er gitt av

$$V = \frac{Q}{C} \Rightarrow i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

- Impedansen til en kondensator heter *kapasitiv reaktans* og er gitt av

$$X_c = \frac{1}{2\pi fC}$$

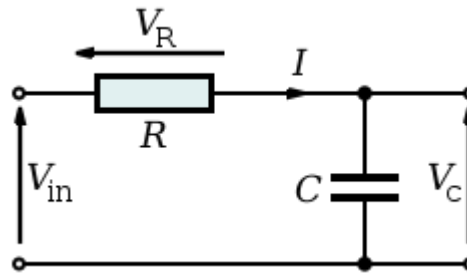
- Vi skal senere se at en sinusformet strøm og –spenning gjennom/i en kondensator ikke er i fase, men forskjøvet i forhold til hverandre
- Vi skal innføre en ekstra dimensjon på impedans, strøm og spenning vha komplekse tall, kalt $j\omega$ – notasjon, der $j = \sqrt{-1}$

Oppgaver

- **Spm 1:** utled formelen for sammenhengen mellom strøm og spenning for en kondesator vha formelen $Q=VC$
- **Spm 2:** Ta utgangspunkt i formelen for I-V sammenhengen for en kondensator og forklar
 - **Spm 2-1:** Hva er impedansen til en kondensator når det er en likespenning over kondensatoren?
 - **Spm 2-1-1:** Hva kan kondensatoren erstattes med i dette tilfellet?
 - **Spm 2-2:** Hva er impedansen når det er en vekselspenning med veldig høy frekvens?
 - **Spm 2-2-1:** Hva kan kondensatoren ersattes med i dette tilfellet?
- **Spm 3:** Hva skjer med impedansen til en kondensator når man dobler frekvensen til ac-spenningen over den? Når man reduserer frekvensen til halvparten?
- **Spm 4:** Finn den kapasitive reaktansen når $C=0,0047 \mu F$ og $f=1 \text{ kHz}$

RC-kretser

- En enkel RC-krets består av en resistor og en kondensator

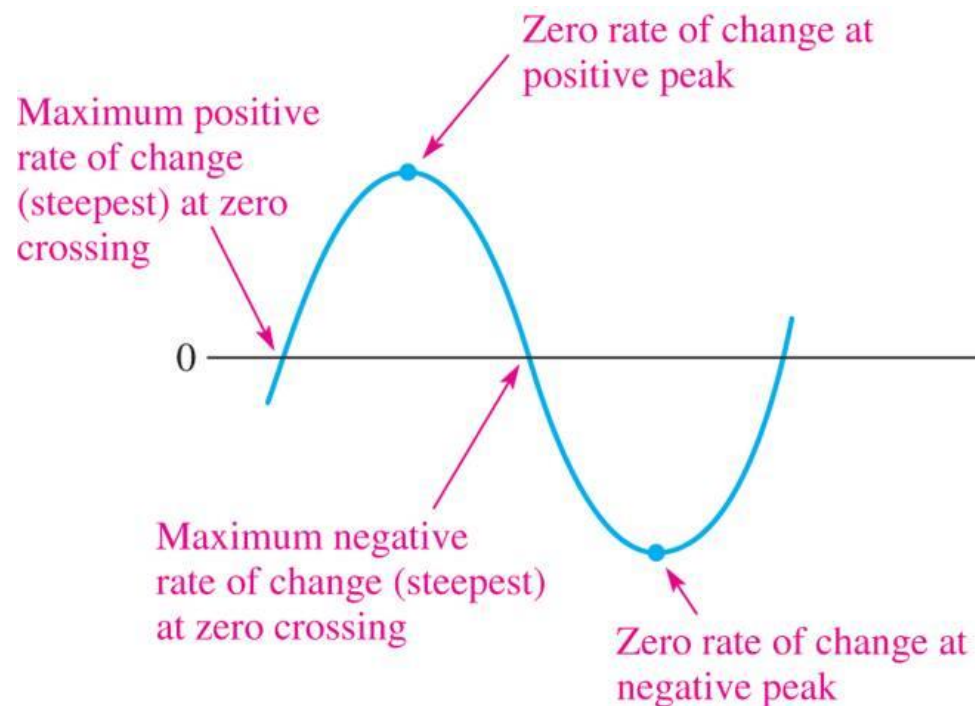


- Resistoren og kondensatoren kan være i serie eller i parallell
- Større og mer kompliserte kretser kan deles opp i mindre serielle og/eller parallelle kretser som analyseres separat
- Skal analysere oppførselen for to ulike typer innsignal:
 - Sinusformet
 - Pulsformet (firkantpulser)

Sammenheng strøm-spenning i en kondensator

- **Resistor:** *strømmen gjennom og spenningen over i fase, dvs $\varphi=0$*
 - Når spenningenforskjellen over resistoren er størst, er strømmen gjennom også størst
 - Når spenningenforskjellen er null, er strømmen gjennom resistoren null
- **Kondensator** spenning og strøm er ikke i fase, dvs det er en faseforskjell som betyr at
 - Maksimal spenningsforskjell ikke gir maksimal strøm
 - Null spenningsforskjell ikke gir null strøm
- Fasedreiningen (faseforskjellen) mellom strøm og spenning kan forstås ved å observere når *endringen* langs en sinus-kurve er *størst* og når den er *minst*

$$i = C \frac{dv}{dt}$$



Sammenheng strøm-spenning i en kondensator

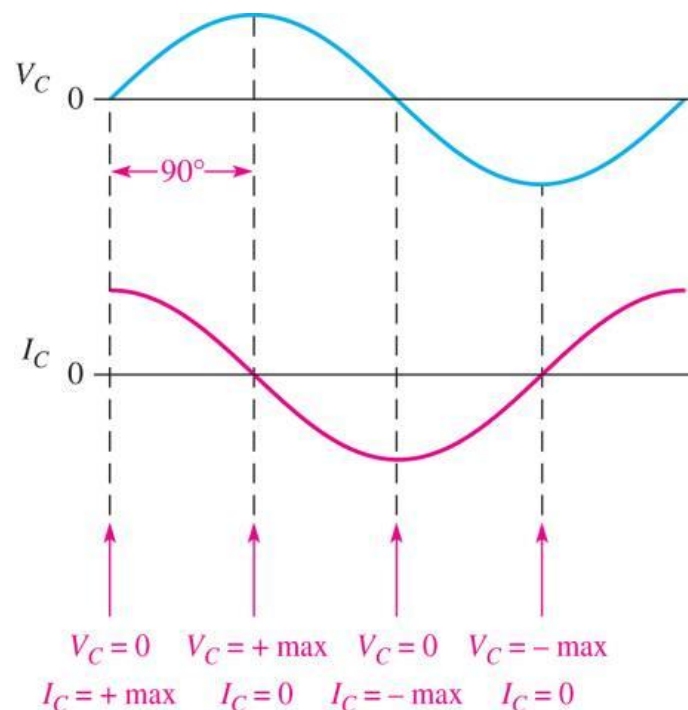
- Strømmen gjennom en kondensator er størst når *endringen* i spenningen over den er størst, og minst når *endringen* i spenningen er minst

- Når spenningsforskjellen er på det mest positive (eller mest negative) er *endringen* lik 0, dvs strømmen lik 0

- Når spenningsforskjellen er 0, er *endringen* størst, dvs strømmen gjennom er størst

- Vi sier at i_c leder over v_c med 90° ($\pi/2$)

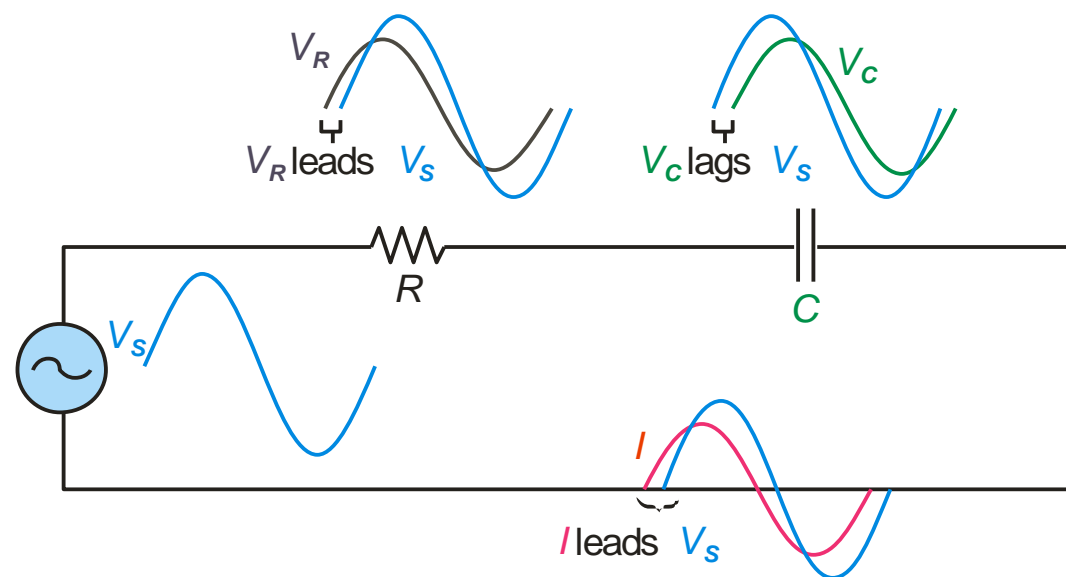
- Dermed ligger v_c bak i_c med 90° ($\pi/2$)



$$i = C \frac{dv}{dt}$$

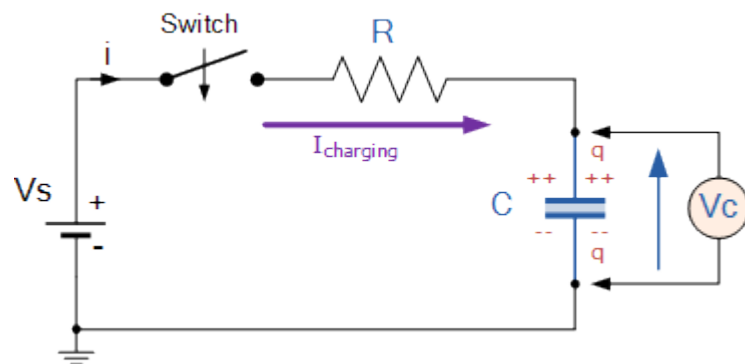
Sammenheng strøm-spenning i seriell RC-krets

- Spenningen V_R over motstanden R er i fase med strømmen I , og leder over V_S , dvs $\varphi > 0$
- V_R og V_C har 90° fasedreining
- Vi må beregne den totale, frekvensavhengige impedansen i kretsen for å finne
 - fasedreiningen mellom V_S og V_C
 - fasedreining mellom V_S og I
- Vi bruker det komplekse planet for å beskrive impedans, strøm og spenning fordi det blir enklere å beregne bla fasedreining – mer om dette senere

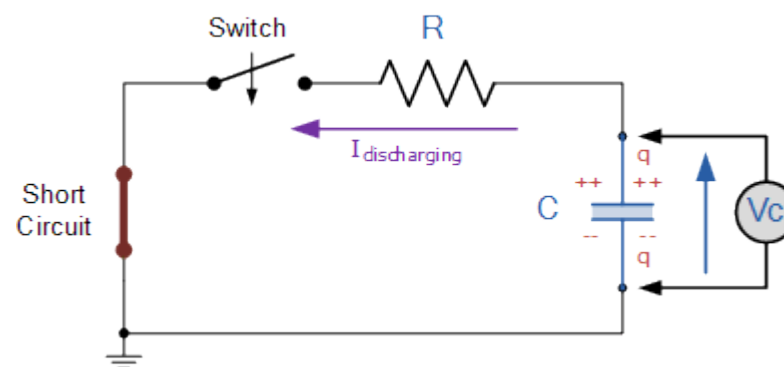


Analyse av RC-kretser

- En annen type beskrivelse er å se hvordan spenningen over kondensatoren endrer seg hvis spenningskilden lager en firkantpuls (og ikke en sinusspenning)
- Det enkleste tilfellet: Spenningskilden er en dc-kilde som kobles inn eller kortsluttes ved tidspunktet $t=t_0$



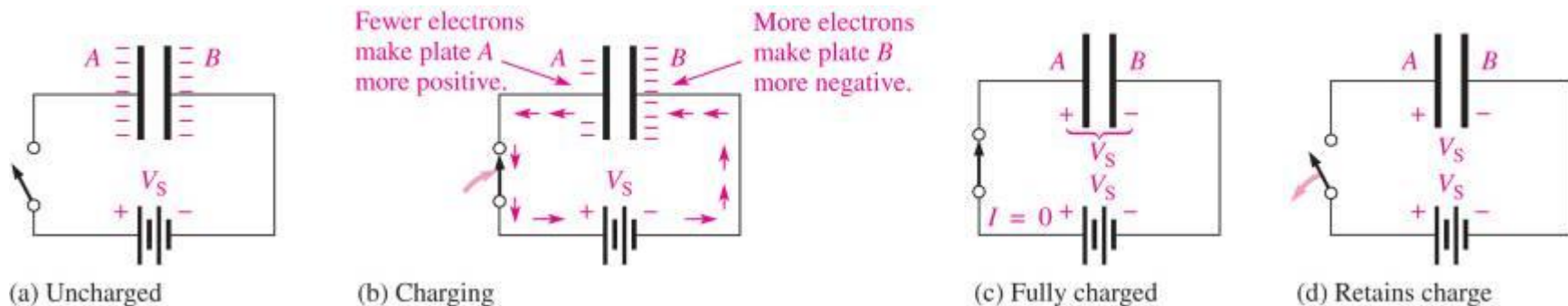
Spenningskilden kobles inn, $V_C=0$ volt



Spenningskilden kortsluttes, $V_C=V_s$ volt

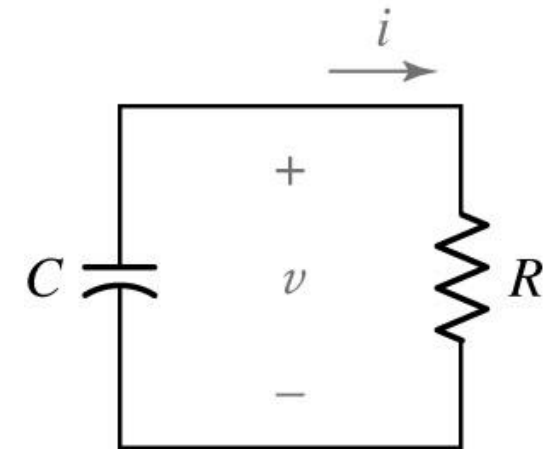
Oppladning og utladning av kondensator

- Ladninger kan bare bevege seg når spenningen over kondensatoren er forskjellig fra spenningskilden
- Når kretsen har nådd stabil dc-spenning, vil kondensatoren blokkere for strøm



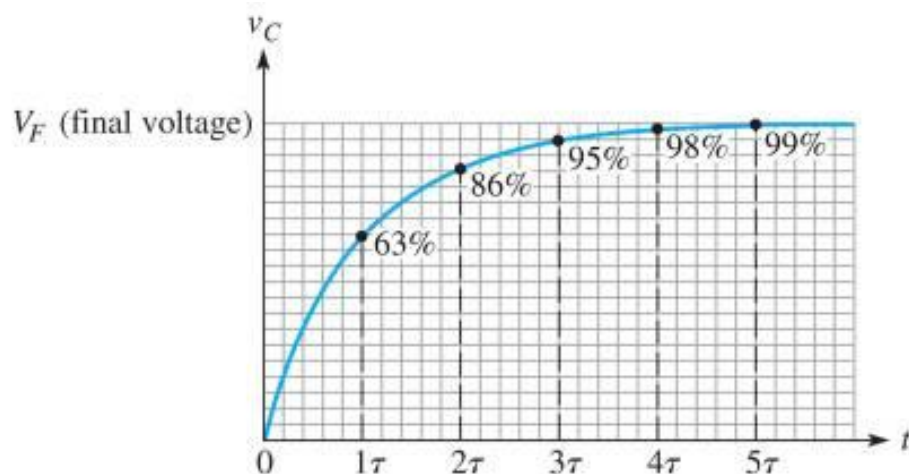
Tidskonstant

- Hvis spenningen er pulsformet er vi interessert i å beregne
 - Hvor raskt den lades *opp* når spenningskilden V_s kobles *til* i serie med R og C
 - Hvor raskt den lades *ut* til 0 når spenningskilden V_s kobles *fra* og kortsluttes slik at bare R og C er i serie
- Tidskonstanten τ sier hvor lang tid det tar å lade opp eller ut kondensatoren når den er koblet i serie med en ohmsk motstand.
- Måles i sekunder og er definert ved $\tau = RC$

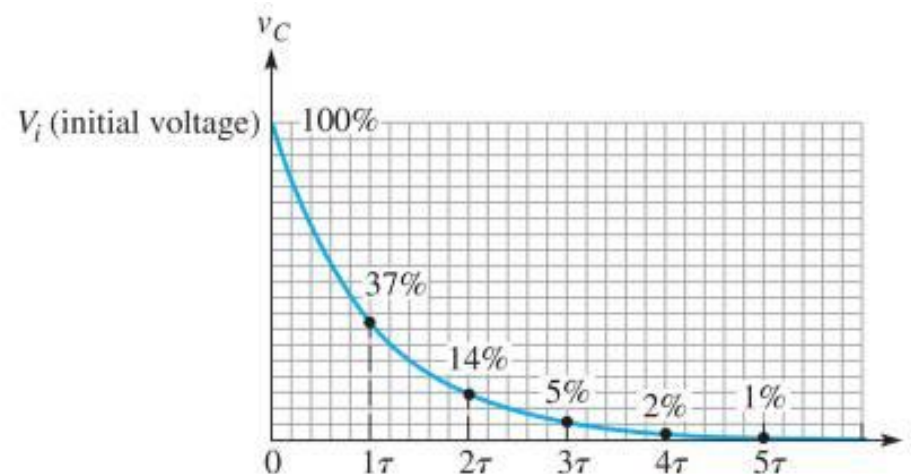


Tidskonstant (forts)

- Når $\tau = 1s$ betyr det at
 - En fullt utladet kondensator har nådd ca 63% av den maksimale spenningen etter at den er koblet til en spenningkilde
 - En fullt oppladet kondensator har falt til ca 37% av den opprinnelige spenningen etter at kilden er koblet fra
- Opp/utladningskurvene er eksponensielle



(a) Charging curve with percentages of the final voltage



(b) Discharging curve with percentages of the initial voltage

Tidskonstant (forts)

- De generelle formlene for oppladning og utladning av en kondensator som lades opp/ut via en resistor er gitt av

$$v = V_F + (V_i - V_F)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i = I_F + (I_i - I_F)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

der V_F og I_F er slutt-verdiene, og V_i og I_i er startverdiene

- Hvis man lader *opp* fra $V_i = 0$, blir formelen

$$v = V_F(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

- Hvis man lader *ut* til $V_F = 0$ blir formelen

$$v = V_i e^{-\frac{t}{RC}}$$

Kapasitiv reaktans

- En kondensator har en motstand mot elektrisk strøm som er avhengig av frekvensen til spenningen/strømmen
- Denne motstanden kalles *kapasitiv reaktans* X_c og er definert ved

$$X_c = \frac{1}{2\pi fC}$$

- Jo større frekvens, desto mindre kapasitiv reaktans
- Jo større kapasitans, desto mindre kapasitiv reaktans

Nøtt til neste gang

- Hva er dette?

