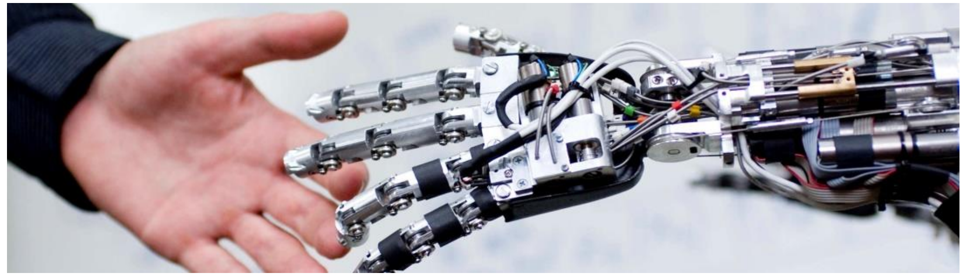
UiO : Institutt for informatikk
Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet



Forelesning nr.4 IN 1080 Mekatronikk

Analyse av RC-kretser
Induksjon

Dagens temaer

- Avslutning forelesning 3
- Repetisjon kondensator
- Analyse av RC-kretser i tidsplanet
- Kahoot-quiz
- Induksjon
  - Induktorer
  - Elektromotorer
  - Transformatorer

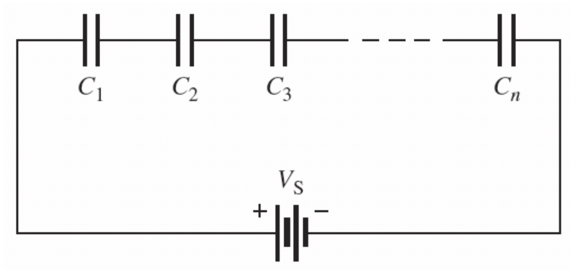
Repetisjon kondensatorens virkemåte

https://www.youtube.com/watch?v=u-jigaMJT10

- Viktige punkter :
  - Elektronene “**trekkes”** fra kondensatoren mot den positive terminalen på batteriet
  - Elektronene “**skyves”** fra den negative terminalen på batteriet mot kondensatoren
  - Etterhvert blir det så mange negative ladninger på ÷ siden at elektronene beveger seg langsommere mot kondesatorens ÷plate og til slutt stopper elektronstrømmen
  - Tilsvarende blir det overskudd av positive landinger på +siden av kondensatoren slik at elektronene beveger seg langsommere mot batteriet
  - Kondensatorer lades hurtig opp til å begynne med og deretter langsommere og langsommere
  - Samme for utladning: Først hurtig og deretter langsommere og langsommere

Kapasitans for seriekoblede kondensatorer

V=Q/C



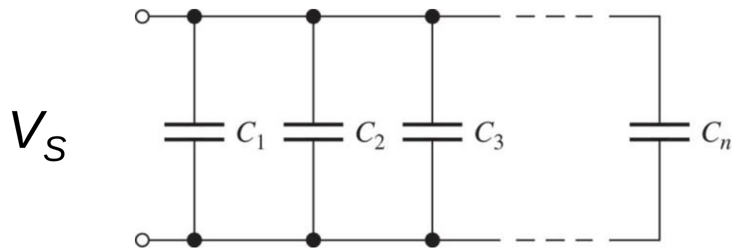
$$I = \frac{Q}{t}$$

- Hver kondensator lagrer samme ladning fordi strømmen mellom hvert element er den samme: $Q_{Tot} = Q_{C1} = Q_{C2} = \cdots = Q_{Cn}$
- KVL gir at $V_S = V_{C1} + V_{C2} + \cdots + V_{Cn}$
- Dette gir

$$\frac{Q}{C_{Tot}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n} \Rightarrow \frac{1}{C_{Tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \Rightarrow C_{Tot} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

- Utrykket har samme form som resistorer i *parallell*

Kapasitans for parallellkoblede kondensatorer



- Den totale ladningen er lik summen av ladningene over hver kondensator:

$$Q_{Tot} = Q_{C1} + Q_{C2} + \cdots + Q_{Cn}$$

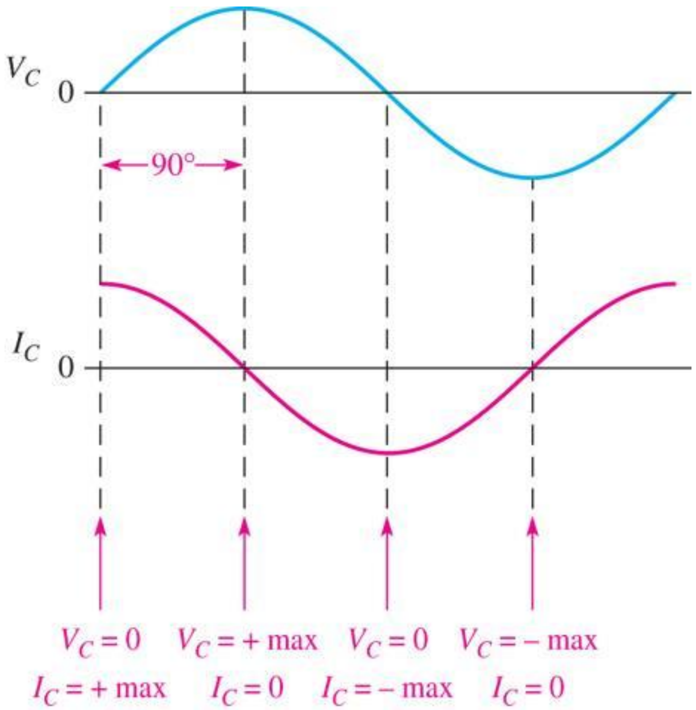
- Siden *Q*=*CV*, blir $C_{Tot}V_S = C_1V_S + C_2V_S + \cdots + C_nV_S \Rightarrow C_{Tot} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$

- Uttrykket har samme form som resistorer i *serie*

Repetisjon av I-V i en kondensator

- Strømmen gjennom en kondensator er størst når *endringen* i spenningen over den er størst, og minst når *endringen* i spenningen er minst

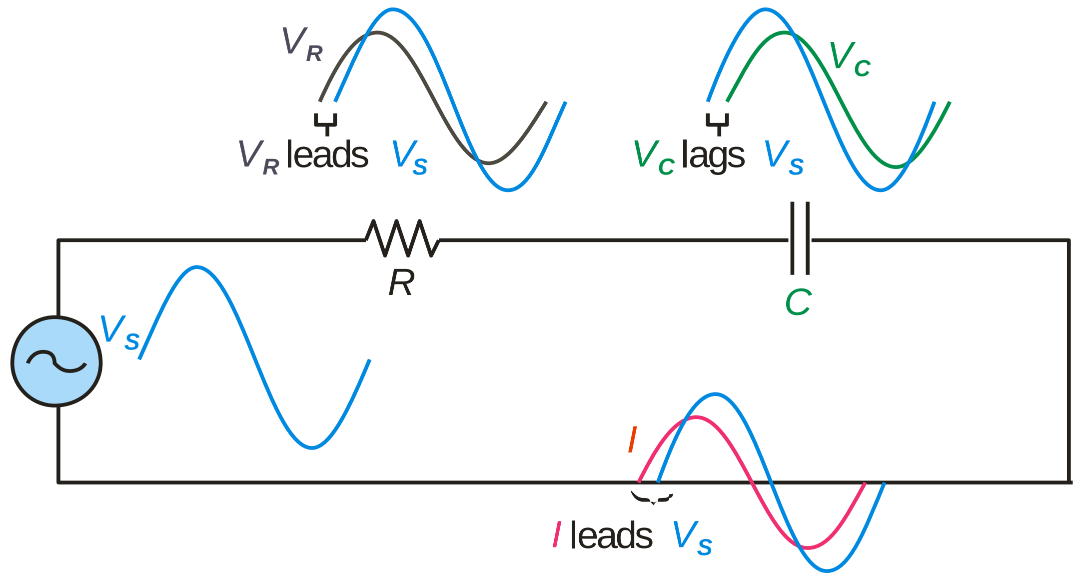
  - Når spenningsforskjellen er på det mest positive (eller mest negative) er *endringen* lik 0, dvs strømmen lik 0
  - Når spenningsforskjellen er 0, er *endringen* størst, dvs strømmen gjennom er størst
  - Vi sier at i_c <u>leder over</u> v_c med 90º (π/2)
  - Dermed ligger v_c <u>bak</u> i_c med 90º (π/2)



$$i = C\frac{dv}{dt}$$

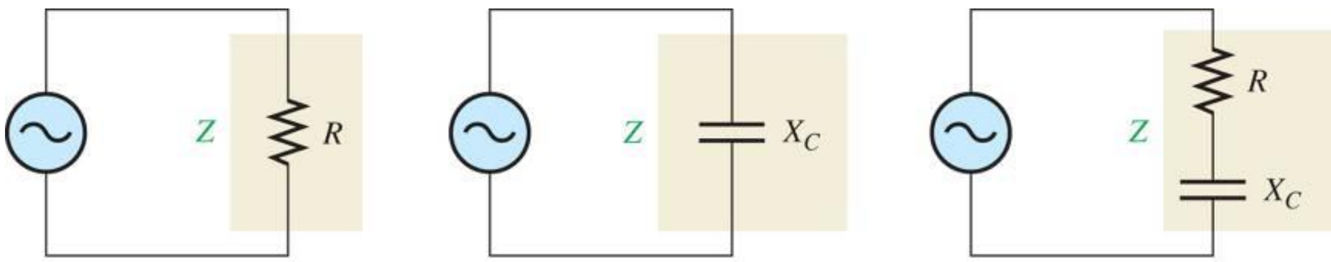
Repetisjon av I-V i en seriell RC-krets

- Spenningen V_R over motstanden R er i fase med strømmen I, og leder over V_s, dvs φ>0 (hvorfor?)
- V_R og V_C har 90° fasedreining (hvorfor?)
- Vi må beregne den totale, frekvensavhengige impedansen i kretsen for å finne
  - fasedreiningen mellom V_S og V_C
  - fasedreining mellom V_S og I
- For å representere fasedreining som funksjon av frekvens må vi tenke på strøm, spenning og impedans som vektorer.



Total impedans i seriell RC-krets

- ***Z*** er den samlede impedansen mot vekselstrøm i en krets
- Impedansen har en frekvensuavhengig *resistiv* del ***R*** og en frekvensavhengig *reaktiv* del $\boldsymbol{X_C}$

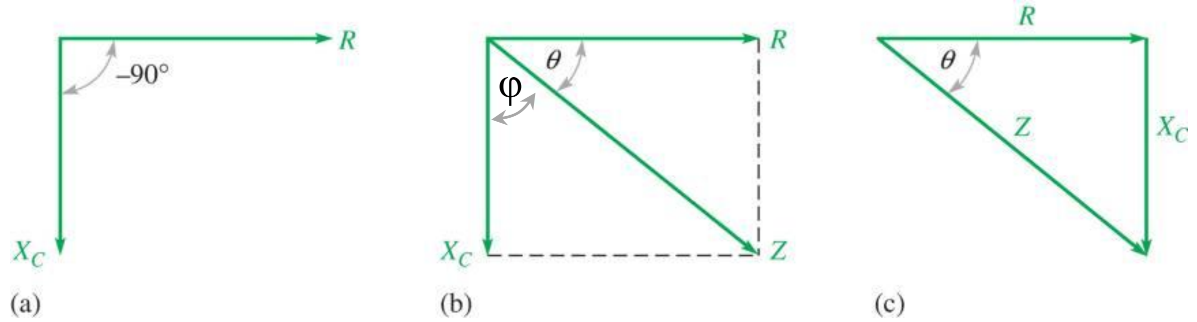


(a) $Z = R$ (b) $Z = X_C$ (c) Z includes both R and X_C

- Den resistive og reaktive delen har en fasedreining på -90° i forhold til hverandre

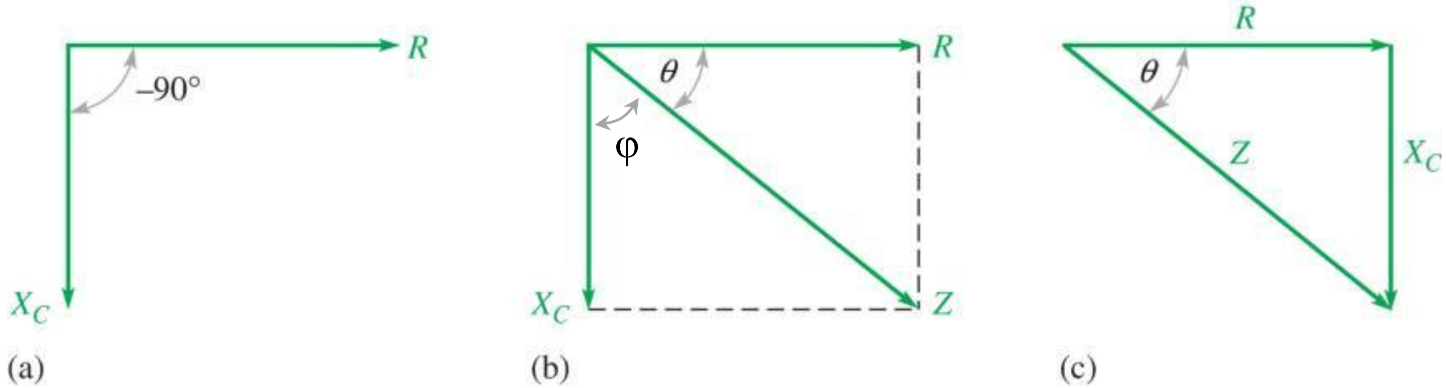
Total impedans i seriell RC-krets (forts)

- Den totale impedansen er gitt av **$Z=R+X_C$** der **R** og **X_C** er vektorer («phasors»).
- ***Z*** finner man ved vektorsummasjon



- ***Z*** har en fasevinkel θ i forhold **R** og φ = 90º- θ i forhold til **X_c**
- **|*Z*|** måles i Ohm (Ω)

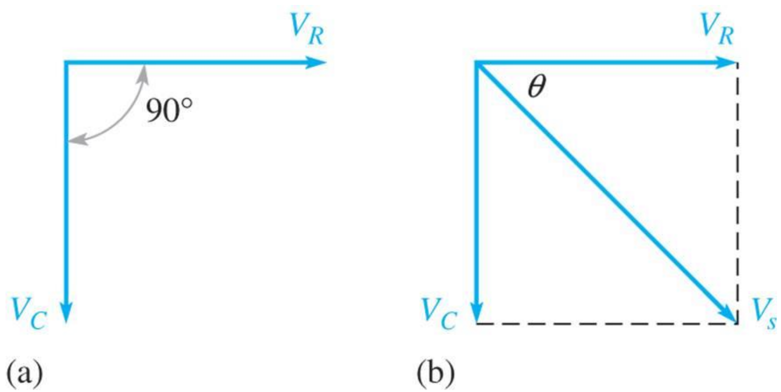
Total impedans i seriell RC-krets (forts)



- Lengden til ***Z*** (magnituden) finnes ved Pythagoras: $|\boldsymbol{Z}| = \sqrt{R^2 + X_C^2}$
- Fasedreiningen θ mellom **R** og **Z** er gitt av $\theta = \tan^{-1}(\frac{X_C}{R})$
- Fasedreiningen φ mellom $\mathbf{X_c}$ og **Z** er gitt av $\varphi = 90^0 - \theta = 90^0 - \tan^{-1}(\frac{X_C}{R})$

Faseforskjell strøm - spenning

- I en seriell RC-krets er strømmen gjennom resistoren og kondensatoren den samme
- For å finne sammenhengen mellom $\boldsymbol{V_s}$, $\boldsymbol{V_R}$ og $\boldsymbol{V_C}$ bruker man KVL og vektoraddisjon (samme som for å finne $\boldsymbol{Z}$)

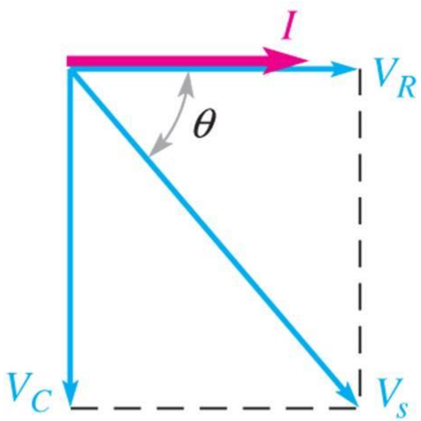


$$|\boldsymbol{V_S}| = \sqrt{V_R^2 + V_C^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_C}{V_R}\right)$$

Faseforskjell strøm - spenning (forts)

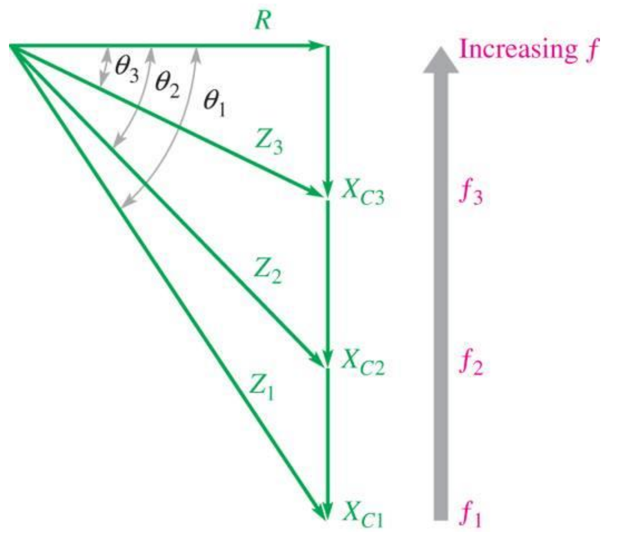
- Siden strømmen ***I*** og resistorspenning $\boldsymbol{V_R}$ er i fase, er fase-dreiningen mellom ***I*** og $\boldsymbol{V_S}$ lik fasedreiningen mellom $\boldsymbol{V_R}$ og $\boldsymbol{V_S}$



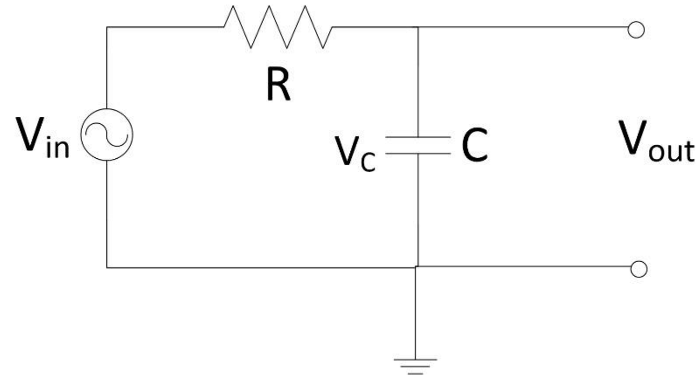
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_C}{V_R}\right)$$

Impedans, fasedreining og frekvens

- Jo større kapasitiv reaktans X_c målt i forhold til R, desto større fasedreining mellom strøm og spenning
- Når frekvensen synker blir fasedreiningen mindre



$$X_c = \frac{1}{2\pi f C}$$



Oppgaver

- **Spm 1:** Gitt RC-kretsen oppe til høyre. Hva er sammenhengen mellom V_{out} og V_c?
- **Spm 2:** Hvordan kan vi finne fasevinkelen (faseforskyvning mellom Z og R) for denne kretsen?
- **Spm 3:** Anta at R=1kΩ og C=0,01μF. Finn den totale impedansen Z og fasevinkelen θ mellom R og Z

  for følgende tre frekvenser:
  - Spm 3.1: 10 kHz
  - Spm 3.2: 20 kHz
  - Spm 3.3: 30 kHz
- **Spm 4:** Hva er $\mathbf{V_{out}}$ uttrykt ved $\mathbf{V_{in}}$**, R** og $\mathbf{X_c}$?
- **Spm 5:** Forklar hva som skjer med amplituden til $\mathbf{V_{out}}$ når frekvensen til $\mathbf{V_{in}}$ øker
- **Spm 6:** Forklar hva som skjer med fasevinkelen mellom V_{in} og V_{out} når frekvensen til V_{in} øker
- **Spm 7**: Hva skjer med tidsforsinkelsen mellom V_{in} og V_{out} når frekvensen til V_{in} øker?

Respons

- Respons betyr hvordan en krets oppfører seg for en gitt type input
- Eksemplet på forrige side viste sammenhengen mellom strøm og spenning i en RC-krets når kilden var en **sinusformet** spenning
- Spenningen over kilden og elementene var ikke i fase: maksimal verdi er ikke på samme tidspunkt.
- Før vi ser på hvordan denne sammenhengen kan beskrives matematisk i det komplekse planet skal vi se på hvordan en RC-krets oppfører seg når kilden genererer en firkantpuls, mao kretsens **pulsrespons**
- Et spesialtilfelle av pulsrespons kalles **naturlig respons**, hvor man ser på hvordan kretsens oppførsel når kilden er fjernet

Naturlig respons

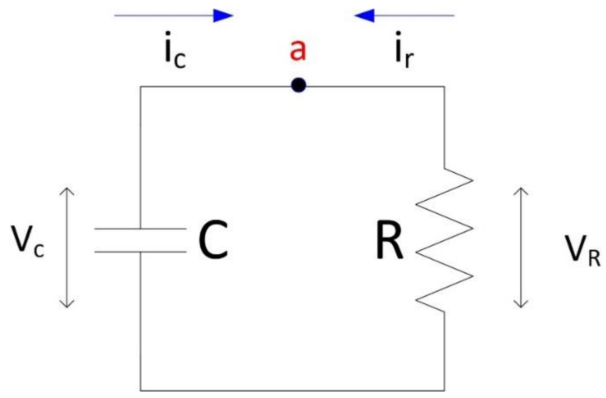
- Naturlig respons er oppførselen når kretsen ikke lenger er utsatt for ytre påvirkning fra strøm- eller spenningskilder

- Vi antar at det har vært en påvirkning som gjør at det f.eks fortsatt går en strøm eller at en kondensator er oppladet.

- Ved tidspunkt t=0 fjernes strøm- og spenningskilder og videre oppførsel bestemmes bare av kretsens „naturlige“ egenskaper

Naturlig respons for RC-krets (1)

- Antar at kondensatoren er helt oppladet ved tidspunkt t=0 med spenningen $v_c=V_0$



- Kondensatoren vil utlades gjennom R og vi ønsker et uttrykk for hvordan v_c endrer seg over tid som funksjon av V_0, R og C

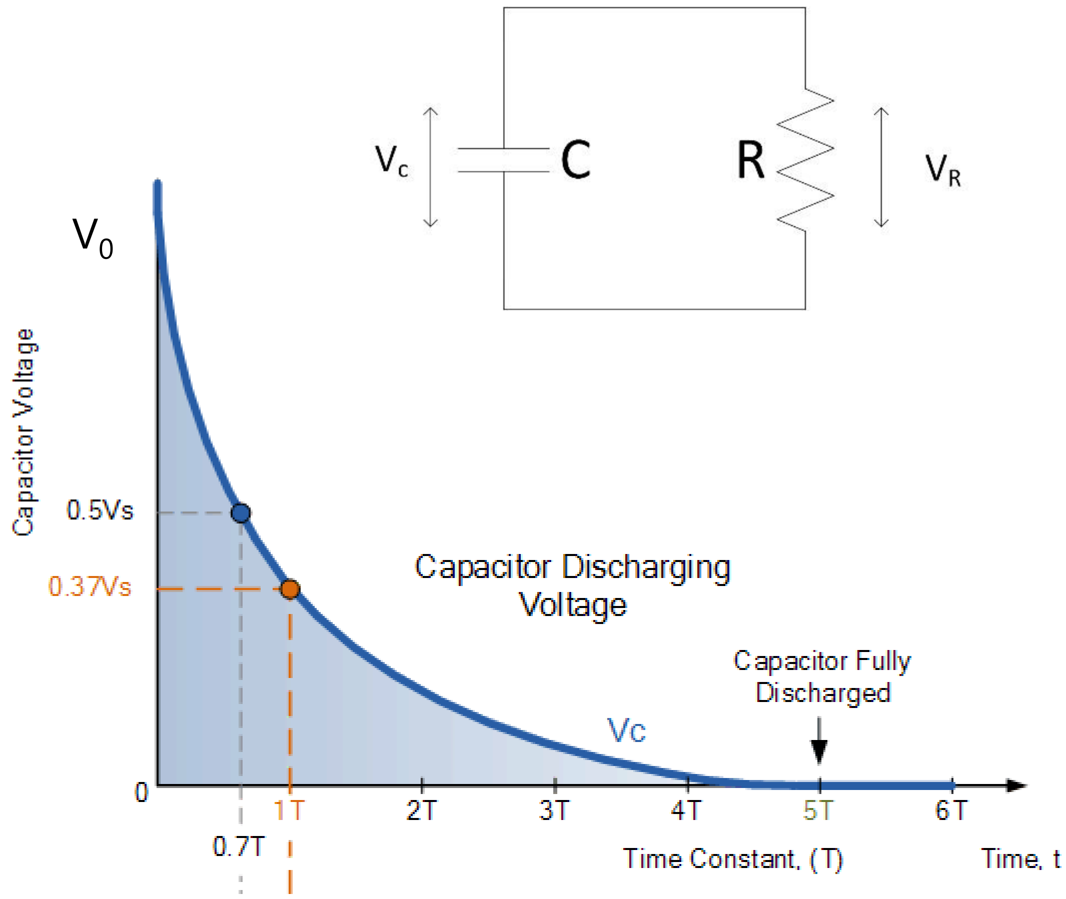
- Bruker KCL mot node a:

$$i_c + i_r = 0 \Longrightarrow C\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_R}{R} = 0 \Longrightarrow C\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{R} = 0 \Longleftrightarrow \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = 0$$

- Løsningen til denne differential-ligningen er $v_c = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$
 (skal ikke vise fremgangsmåten for å løse den)

Naturlig respons for RC-krets (2)

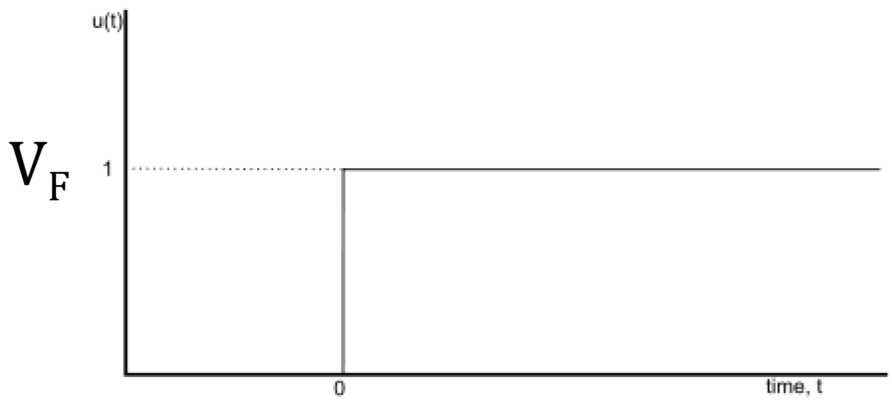
- Vi kaller $\tau = RC$ for *tidskonstanten*
- $v_c = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Tidskonstanten gjør at alle RC-kretser får samme form på utladningskurven, uavhengig av verdien til R og C



Pulsrespons for RC-krets (1)

- Formelen for den naturlige responsen kan «utvides» for å finne *pulsresponsen* til en RC-krets
- Spenningskilden er en dc-kilde som går fra 0 volt til V_F volt
- Vi skal se hvordan kondensatoren *lades opp* fra 0v til V_F gjennom en resistor

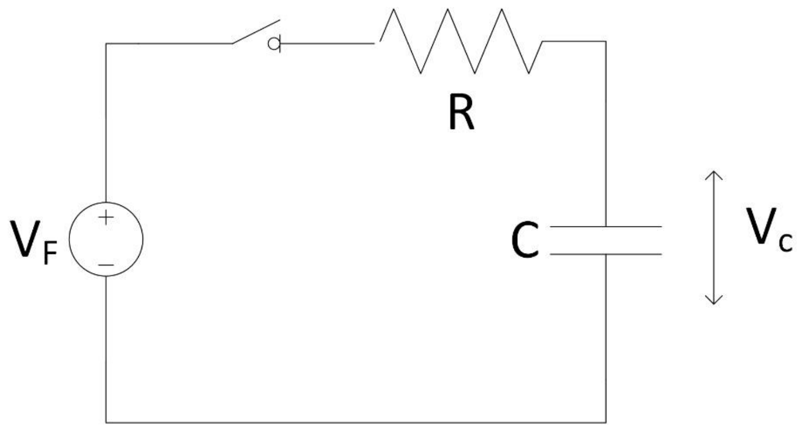
$$V = 0; \quad t_0 < 0$$
$$V = V_F; \quad t_0 \geq 0$$

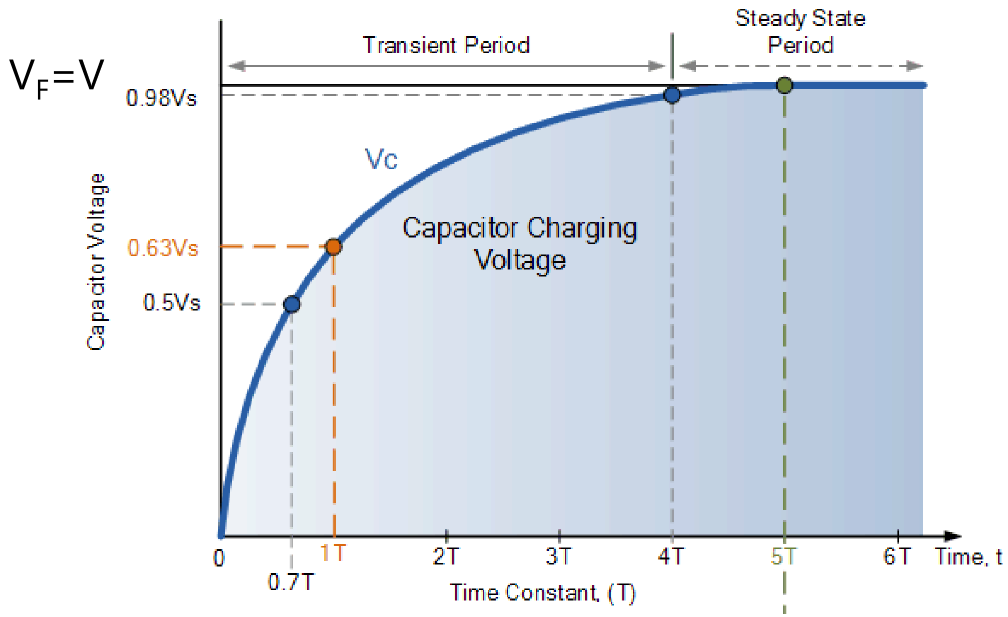


Pulsrespons for RC-krets (2)

- Pulsrespons kan lages ved en ideel bryter som kobler en dc-kilde med spenning V_F til kretsen ved tidspunkt t=0. Antar v_c=0v over kondensatoren for t<0
- Oppladningskurven er gitt av

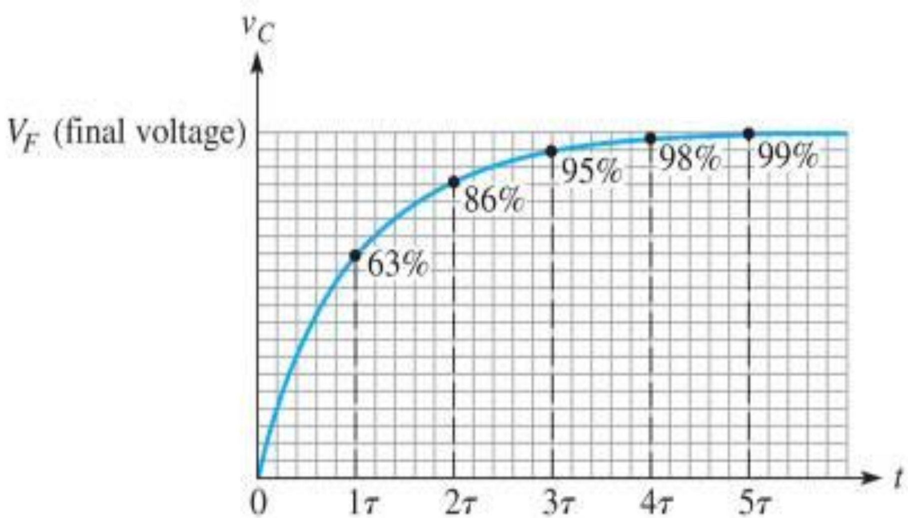
$$v_c = V_F(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



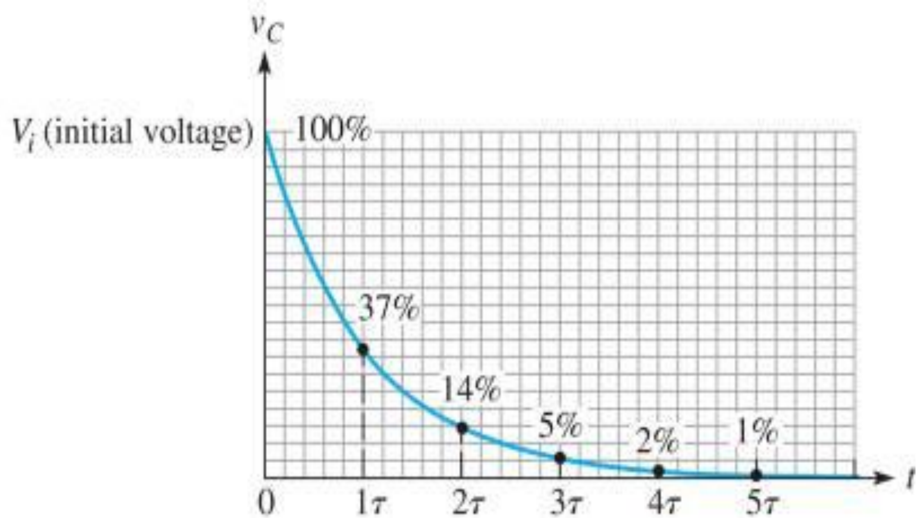


Pulsrespons for RC-krets (3)

- Når $\tau = 1$ betyr det at
  - En helt utladet kondensator har ca 63% av den maksimale spenningen etter at den er koblet til en spenningkilde
  - En fullt oppladet kondensator har ca 37% av den opprinnelige spenningen etter at kilden er koblet fra
- Opp/utladningskurvene er eksponensielle



(a) Charging curve with percentages of the final voltage



(b) Discharging curve with percentages of the initial voltage

Pulsrespons for RC-krets (4)

- Generelt benytter man indeksene 'F' = «Final» og 'i'=«initial»
- Hvis man lader *ut* fra V_F *til 0* blir formelen $v_c = V_F e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Hvis man lader *opp* fra *0 til* V_F, blir formelen $v_c = V_F(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
- De generelle formlene for oppladning og utladning av en kondensator som lades opp/ut via en resistor er gitt av

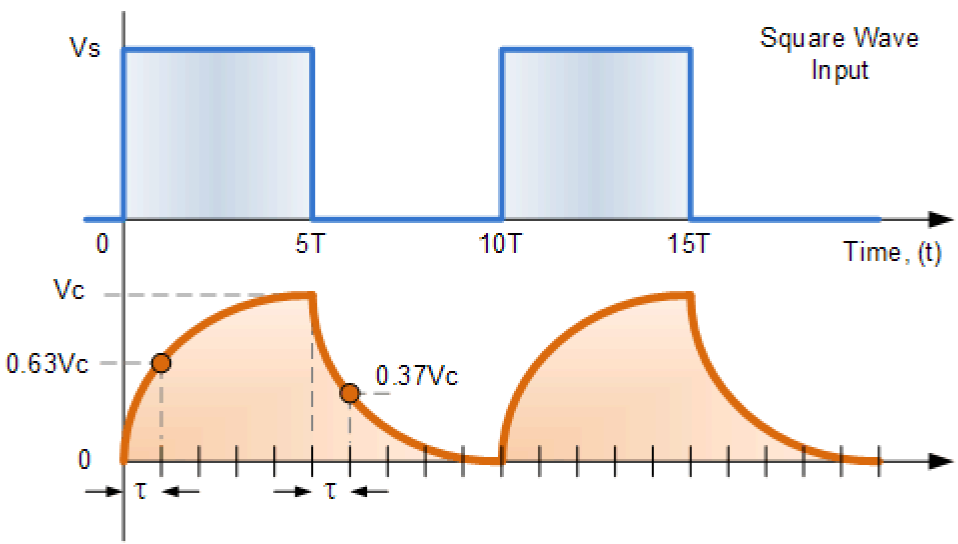
$$v = V_F + (V_i - V_F)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i = I_F + (I_i - I_F)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

der V_F og I_F er slutt-verdiene, og V_i og I_i er startverdiene

Pulsrespons for RC-krets (5)

- Vi kan nå generalisere til en generell puls og ta hensyn til at kondensatoren eventuelt ikke lades helt opp/helt ut



$$v = V_F + (V_i - V_F)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i = I_F + (I_i - I_F)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Generelt

$$v_c = V_F(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Oppladning fra 0 til V_F

$$v_c = V_F e^{-\frac{t}{\tau}}$$

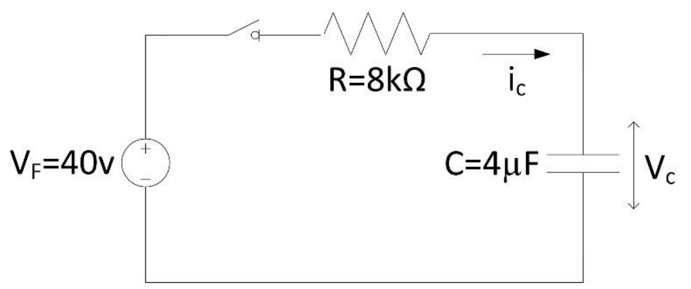
Utladning fra V_F til 0

Oppsummering puls- og naturlig respons

- Hva er viktig å kunne/huske:
  - **Oppladning** og **utladning** skjer ikke momentant
  - Opp- og utladningskurvene er **eksponensielle**, og ikke lineære
  - **Naturlig respons** er oppførselen ETTER at spenningskilden er kortsluttet (ingen påvirkning fra eksterne kilder)
  - **Pulsrespons** er oppførselen når
    1. spenningskilden går fra max spenning til 0 (tilsvarer naturlig respons)
    2. spenningskilden går fra 0 til max spenning
- **Tidskonstanten** τ=RC sier hvor raskt utladningen eller oppladningen skjer
- Ligningen for **utladning** er $v_C = V_F e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Ligningen for **oppladning** er $v_C = V_F(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
- Etter $\boldsymbol{t = \tau}$**5** er kondensatoren nesten helt oppladet eller helt utladet
- Vi må **regne ut RC** for å finne opp/utladningstiden for en konkret RC-krets

Oppgaver (1)

- **Spm 1**: Hva sier tidskonstanten?
- **Spm 2**: Hvis en kondensator lades ut gjennom en resistor, hvor mye har spenningen falt til etter τ=1?
- **Spm 3**: Hvis en kondensator lades opp gjennom en resistor, hvor mye har spenningen økt etter τ=1?
- **Spm 4**: For hvilken τ regner man at kondensatoren er enten helt oppladet eller utladet, og hvorfor?
- **Spm 5:** Hvis vi ønsker τ=16ms for R=4kΩ, hva må da kapasitansen være?
- **Spm 6**: Hva er tidskonstanten til kretsen til høyre?
- **Spm 7**: Anta at kondensatoren er helt utladet før batteriet kobles inn ved t=0s. Hva er ligningene for $v_c(t)$, $i_c(t)$ og $v_R(t)$ når t>0?
- **Spm 8**: Hva er verdien til v_c etter 20ms?
- **Spm 9:** Hvor mye ladning er på kondensatoren etter t=2τ ?
- **Spm 10:** Hvor stor er ladningen når kondensatoren er helt oppladet?

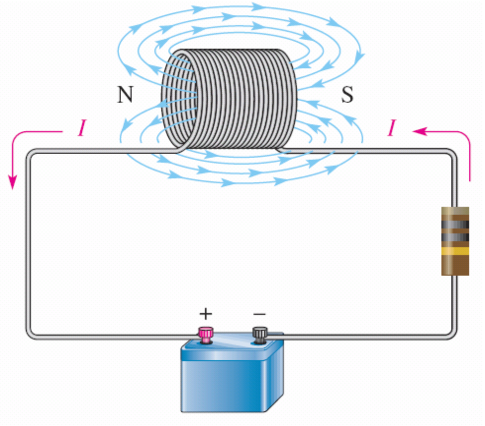


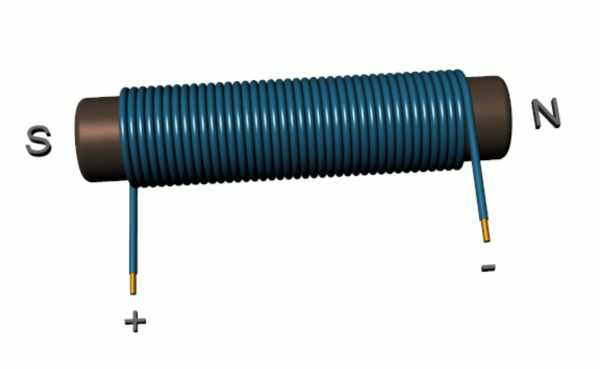
Magnetfelt og induksjon

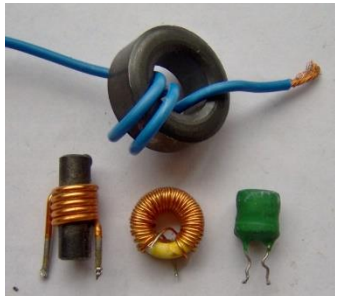
- ***Induktorer*** (norsk: spole) er et passivt, ***frekvensavhengig*** kretselement
- Inne i induktoren lager elektromagnetisk induksjon et magnetfelt som gir et elektrisk felt (spenning) fordi en strøm varierer
- Magnetfeltet kan også generere en ny elektrisk strøm i en annen leder i nærheten og dette kan brukes til å lage en ***transformator***
- I en ***elektromotor*** lager vi et varierende magnetfelt vha en elektrisk strøm, hvor magnetfeltet brukes til å få en annen magnet til å dreie rundt
- I en ***generator*** lages en elektrisk strøm ved at en permanentmagnet roteres vha en mekanisk kraft (vind, fossefall, bølger etc) og lager en elektrisk strøm i en spole

Induktorer

- En induktor (spole) består av en isolert elektrisk leder surret rundt en metallkjerne eller et ikke-magnetisk materiale







- Hver vinding rundt kjernen gir en magnetisk feltlinje; jo flere vindinger desto flere feltlinjer og sterkere magnetfelt
- En spole kan derfor tenkes på som en *elektromagnet*, dvs en type magnet hvor magnetfeltet lages vha en elektrisk strøm

Induktorer (forts)

- Magnetfeltet lager (induserer) en elektrisk spenning som motarbeider *endringer* i strømmer gjennom spolen
- Styrken på magnetfeltet er proporsjonal med endringen i strømmen gjennom spolen
- Den induserte spenningen er proporsjonal med *endringen* i strømmen

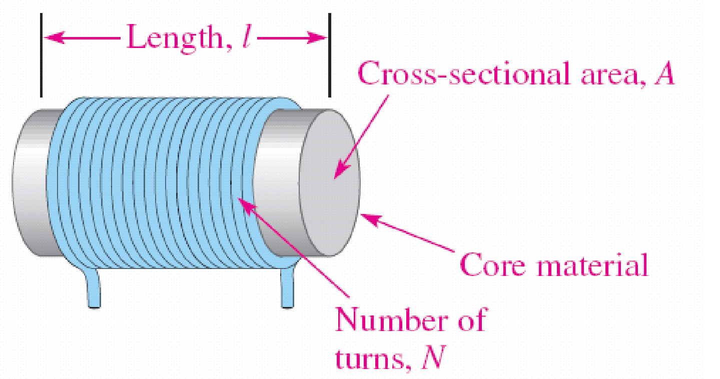
$$v = L\frac{di}{dt}$$

- Ved likespenning vil en spole ha null induktiv impedans, mens den øker med økende frekvens

Induktorer (forts)

- *Induktans* L måles i *Henry=Ωs* og uttrykker spolens evne til å indusere spenning etterhvert som strømmen gjennom spolen endrer seg
- Merk likheten mellom L og C, og forskjellen til R

$$L = \frac{N^2 \mu A}{l}$$

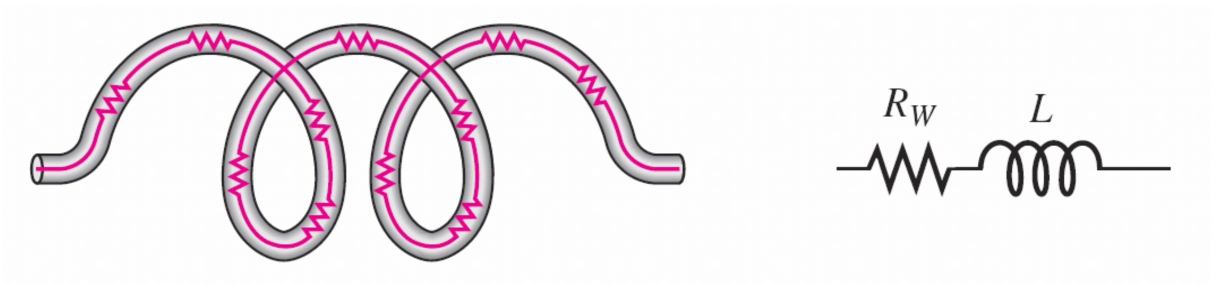


Induktorer (forts)

- Motstanden mot strøm kalles for *induktiv reaktans* og er gitt av

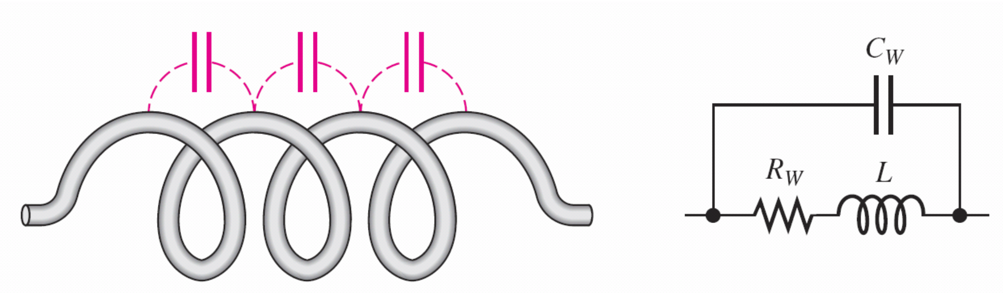
$$X_L = 2\pi fL$$

- Spoler har i tillegg resistans som kalles viklingsresistans R_W og skyldes at lederen har ohmsk motstand



Induktorer (forts)

- Spoler har i tillegg parasittkapasitans:

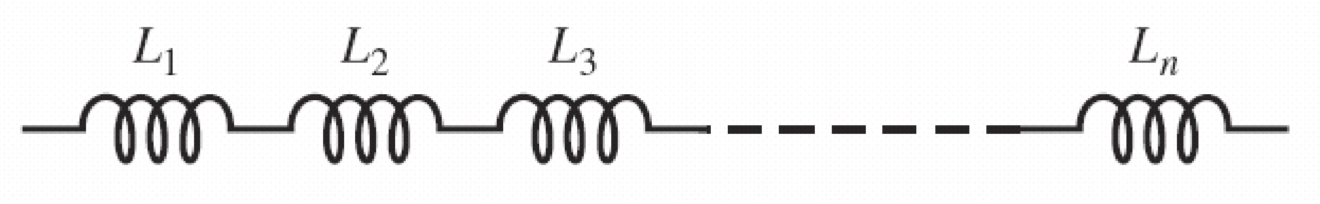


- Pga. fysisk størrelse og parasitteffekter er spoler mindre brukt enn kondensatorer for å lage frekvensavhengig impedans
- **Men:** Denne modellen for spole endrer seg ikke mye ved høye frekvenser (GHz), i motsetning til kondensatorer og resistorer som endrer oppførsel

Spoler i serie

- Hvis man kobler spoler i serie får man en total induktans som er lik summen av de individuelle induktansene

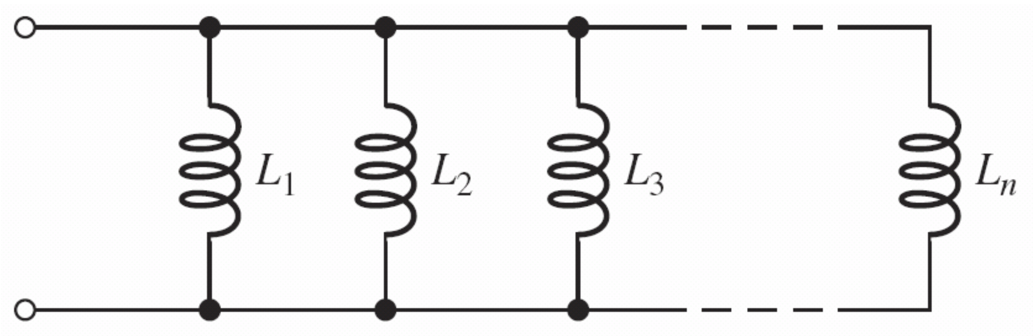
$$L_T = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$



Spoler i parallell

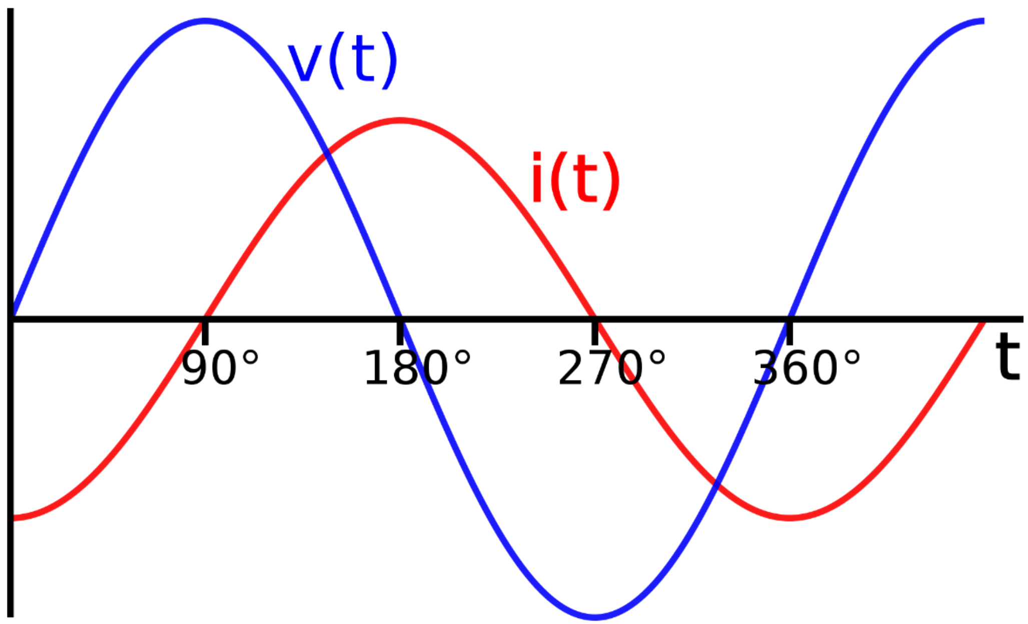
- Hvis man kobler spoler i parallell får man en total induktans som er mindre enn den minste av de individuelle induktansene

$$\frac{1}{L_T} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$$



Forholdet I-V i en spole

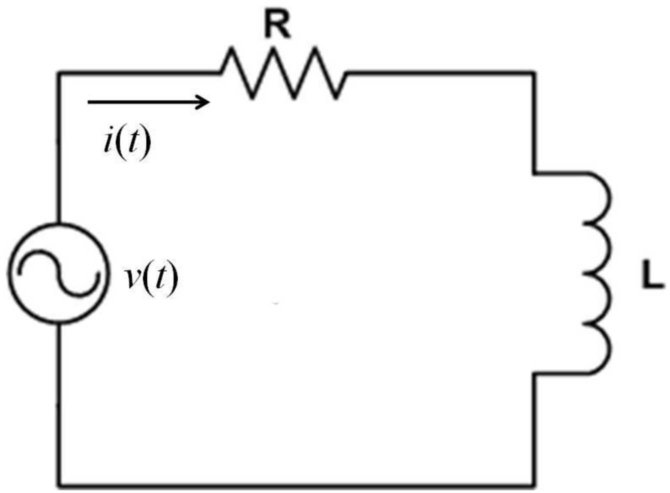
- Mens i_c ligger 90^o **foran** v_c i en kondensator er det motsatt i en spole: i_L ligger 90^o **bak** v_L



Tidskonstant i RL-kretser

- RL-tidskonstanten er forholdet mellom induktansen og resistansen:

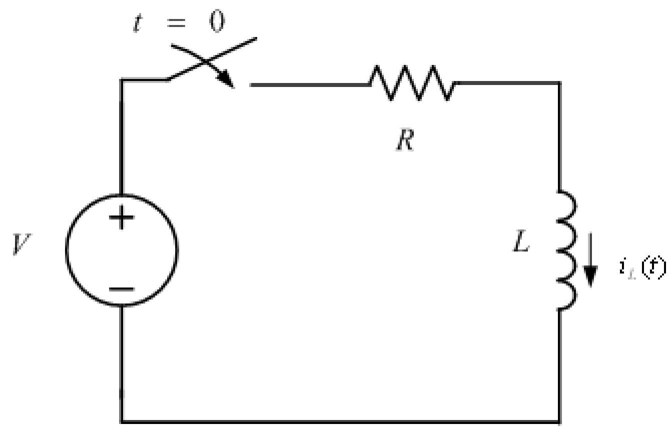
$$\tau = \frac{L}{R}$$

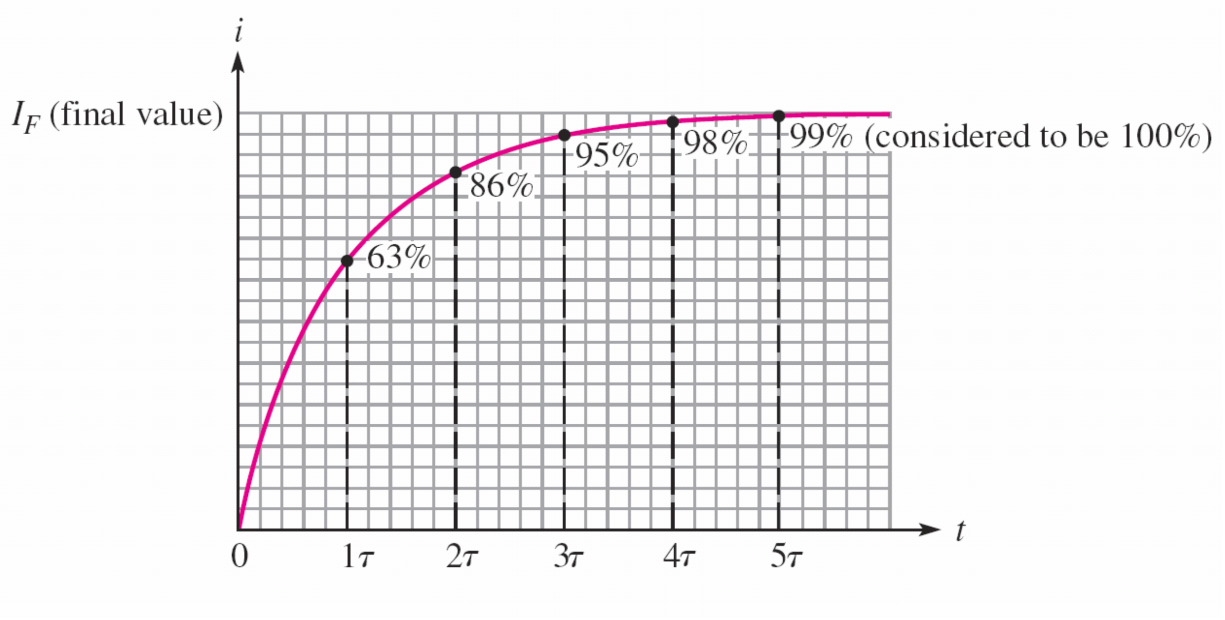


- Tidskonstanten angir hvor fort strømmen kan endre seg i en spole: Jo større induktans, desto lengre tid tar det å endre strømmen

Strøm i RL-kretser

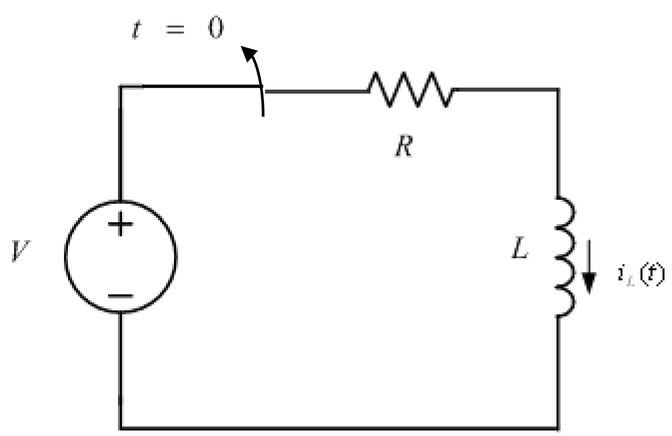
- Hvis en spole kobles *til* en spenningskilde vil strømmen gjennom spolen *øke* eksponensielt:

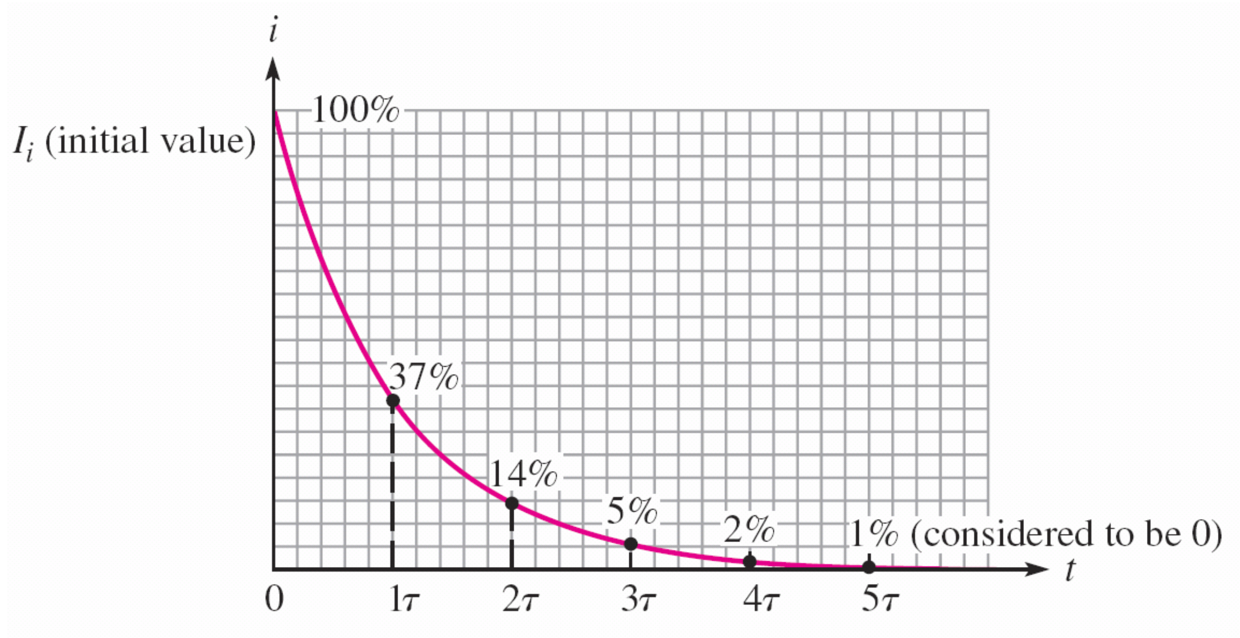




Strøm i RL-kretser (forts)

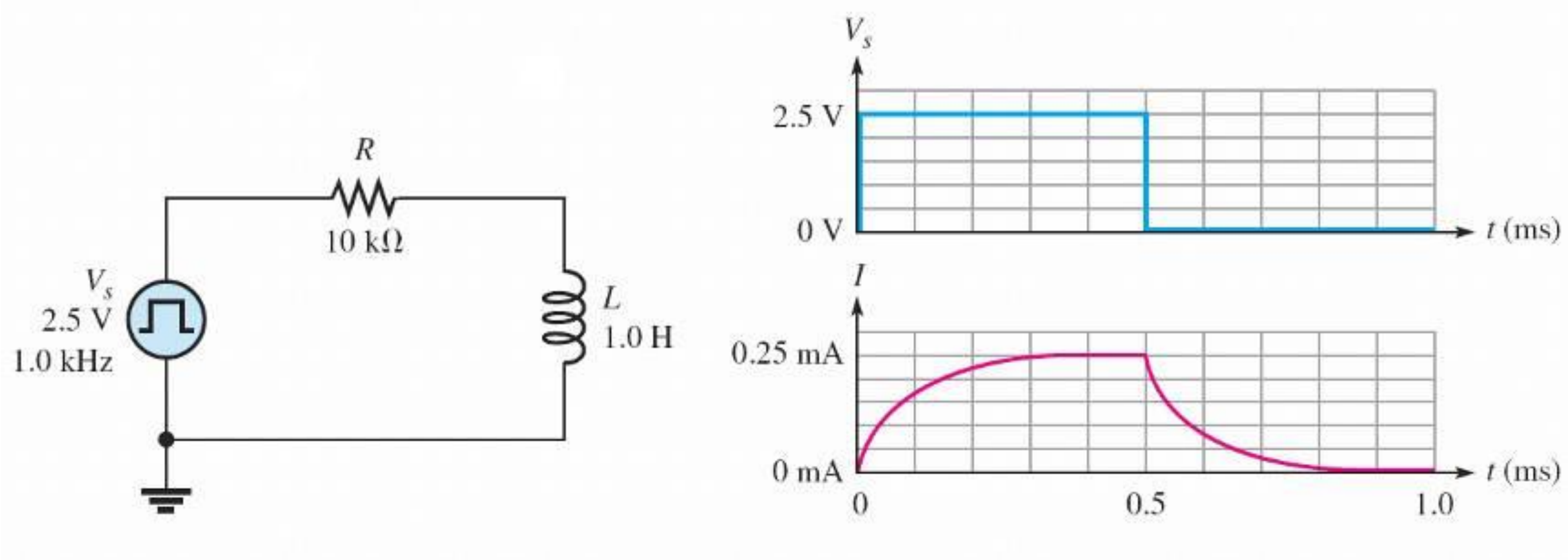
- Hvis en spole kobles *fra* en spenningskilde vil strømmen gjennom spolen *avta* eksponensielt:





Respons på en firkantpuls

- Hvis spenningskilden til RL-kretsen er en firkantpuls vil, strømmen gjennom spolen vekselvis øke og minke eksponensielt:



Oppgaver

- **Spm 1** : Hva er faseforskjellen mellom strøm og spenning gjennom en kondensator?
- **Spm 2:** Hva er formelen for tidskonstanten til en spole, og hva sier den?
- **Spm 3-1** : Hva er en kondensators impedans ved f = 0 Hz, og hva kan den erstattes med i dette tilfellet?
- **Spm 3-2** : Hva er en kondensators impedans ved $f \approx \infty$ og hva kan den erstattes med i dette tilfellet?
- **Spm 4-1** Hva er en spoles impedans ved f = 0 Hz, og hva kan den erstattes med i dette tilfellet?
- **Spm 4-2** : Hva er en spoles impedans ved $f \approx \infty$ og hva kan den erstattes med i dette tilfellet?
- **Spm 5**: Hva er måleenheten for induktans?
- **Spm 6 :** Hva er faseforskyvningen mellom strøm og spenning i en spole?

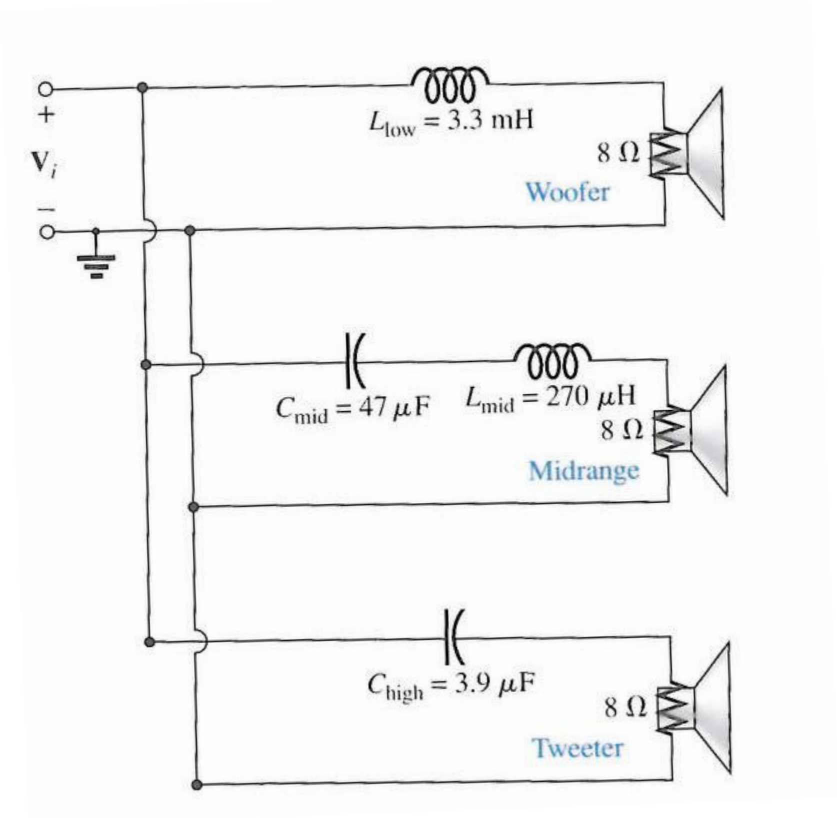
Anvendelse av spoler

- Spoler brukes mindre enn kondensatorer, men svært nyttige i noen anvendelser:
  - Fjerning av uønskede høyfrekvenssignaler i lange ledere
  - Aktive og passive filtre
  - Frekvenstuning i trådløs kommunikasjon (oscillatorer og syntesisere)

- Induktiv reaktans må kontrolleres i alle elektroniske systemer
  - Setter begrensinger på bla maksimal lengde på ledere

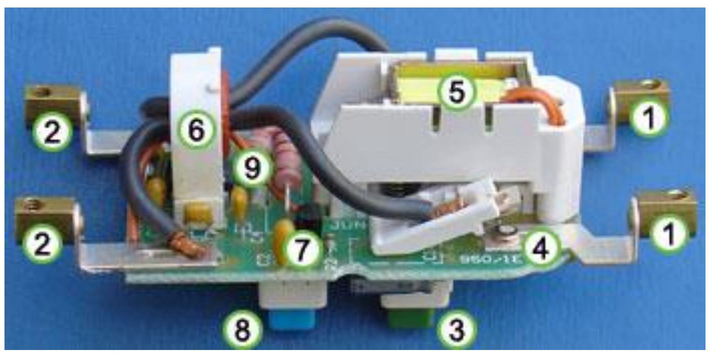
Eksempel på bruk: Delefilter til høytaler

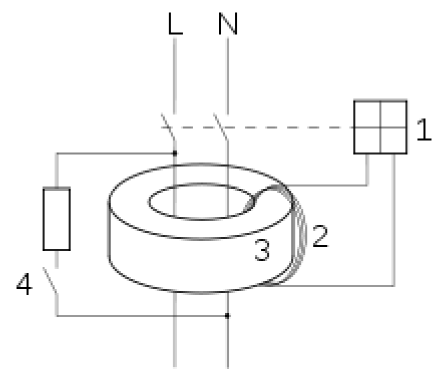
- Hvert høyttalerelement er laget for et bestemt frekvensområde



Eksempel på bruk: Jordfeilbryter

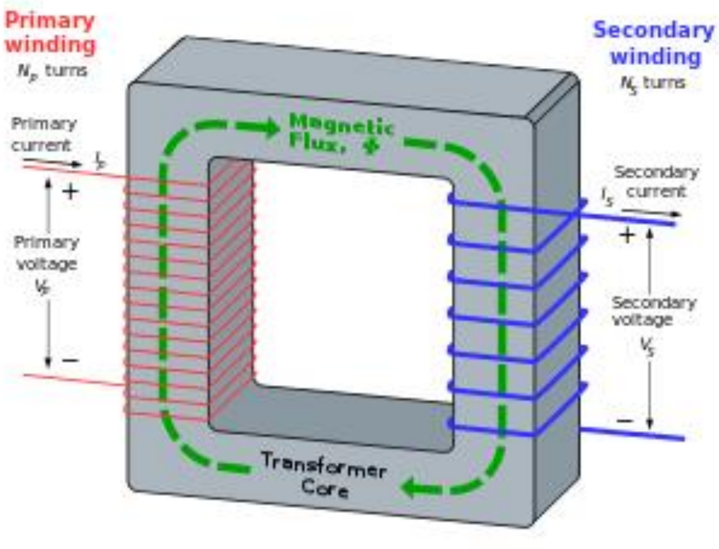
- Løser ut en sikring hvis det er jordfeil, dvs hvis én av de to lederne har forbindelse mot jord

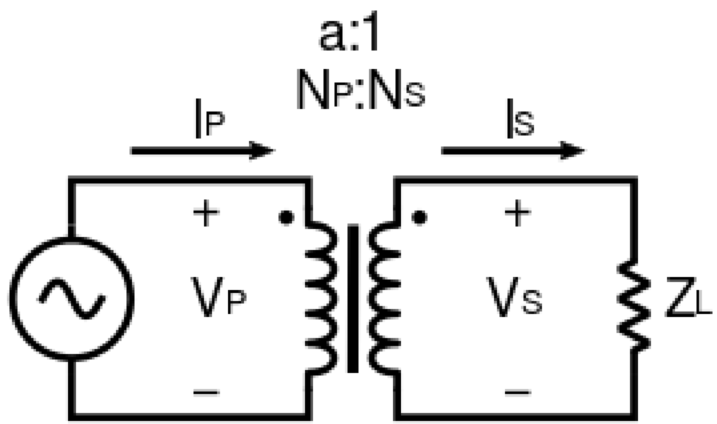




Transformator (1)

- Transformator bruker induksjon for å endre nivået til en ac-spenning (opp eller ned)





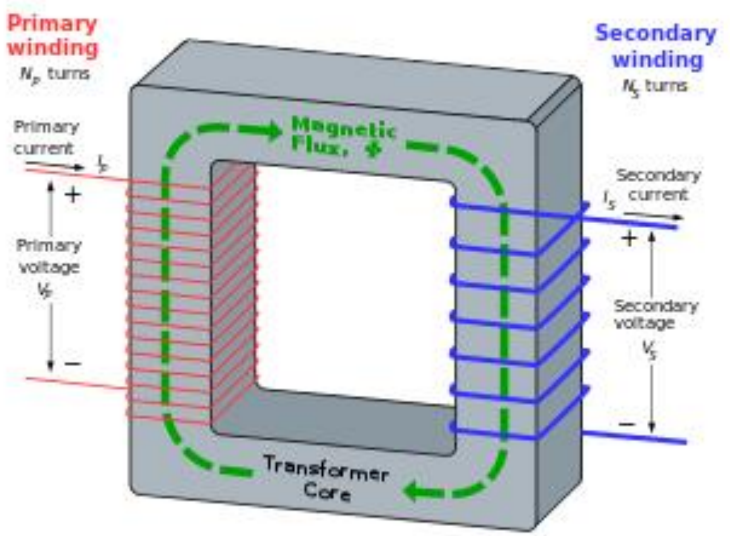
$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s} = \mathrm{a}$$

a > 1: transformerer ned

a < 1: transformerer opp

Transformator (2)

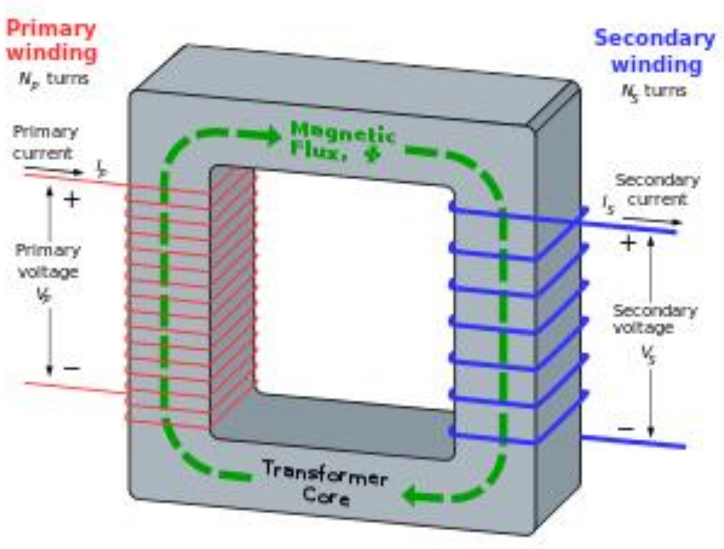
- Transformatoren består av en primærside (inngang) og en sekundærside (utgang)
- På hver av sidene er en isolert leder surret rundt N_p og N_s ganger
- Hver runde rundt kjernen eller vinding utsettes for samme magnetiske fluksen og dermed samme spenning



$$\frac{V_p}{N_p} = \frac{V_s}{N_s} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Transformator (3)

- Forholdet mellom *Np* og Ns bestemmer om transformatoren transformerer *opp*, *ned* eller *isolerer*



$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s} = \mathrm{a}$$

a > 1: transformerer ned
a < 1: transformerer opp
a = 1: transformatoren isolerer

$$V_s = \frac{N_s}{N_p} V_p \Leftrightarrow V_p = \frac{N_p}{N_s} V_s$$

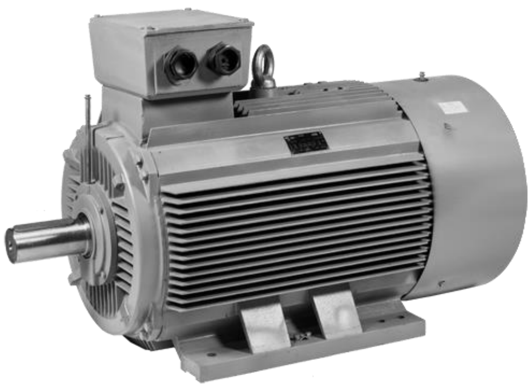
- I en ideell transformator er effekten P den samme på begge sider

$$I_p V_p = I_s V_s$$

Transformator

- Strømmen er lavest på siden med høyest spenning $I_p V_p = I_s V_s$
- Høyere spenning gjør at man kan overføre samme effekt med tynnere ledere
- dc-strømmer og spenninger på primærsiden går ikke gjennom til sekundærsiden (hvorfor?)

Elektromotorer

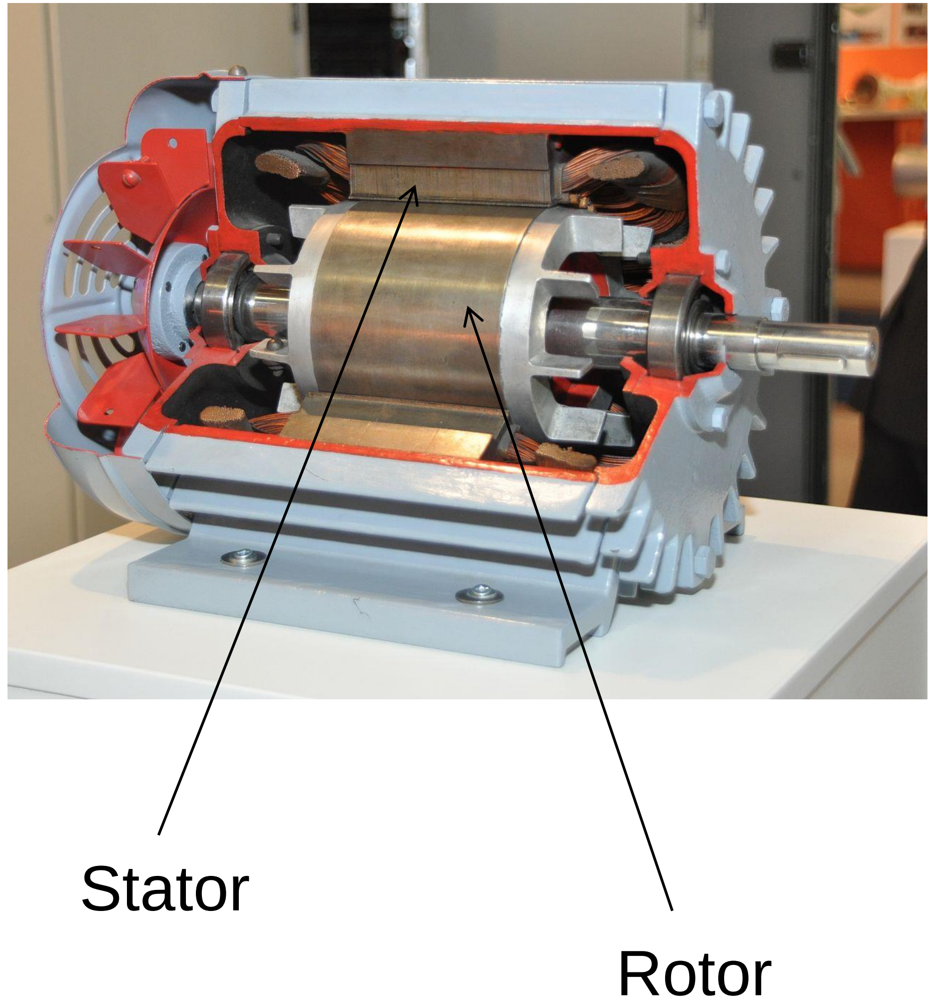


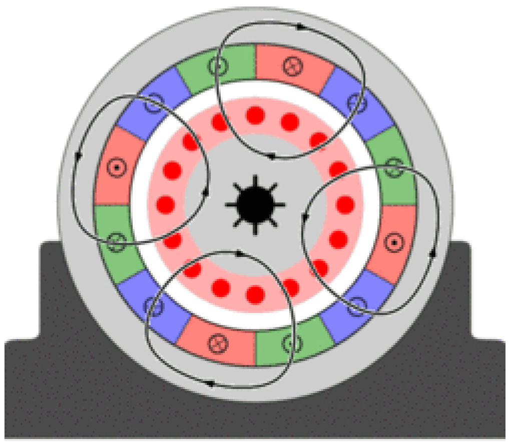
- Grunnlaget for den industrielle revolusjonen på slutten av 1800-tallet
- Den effekten en motor leverer måles i kW eller hestekrefter (historisk)
  - 1 Hk ≈ 736 W
- Utviklingen av effektive (mest mulig av strøm omdannes til bevegelse, ikke varme) er en viktig for tog og elbiler

- Elektromotorer lages i størrelser fra milliWatt (0.001W) til 100 MegaWatt (100 000 000 W)

Prinsipp for elektromotorer

- I en elektromotor er det magnefelt som endrer retning som får en aksel til å rotere
- Magnetfeltet lages av elektromagneter (spoler)
- Motoren er bygd opp av to hoveddeler
  - Statoren er fast
  - Rotoren er bevegelig og roterer
- Elektromotorer finnes både dc og ac





Hvorfor kompleks representasjon (1)?

- I-V ligningen for en krets med én kondensator og én resistor er mer komplisert enn for en krets med to resistorer:

a) $i_c + i_R = 0 \Longrightarrow C\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_R}{R} = 0 \Longrightarrow C\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{R} = 0 \Longleftrightarrow \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = 0$

b) $i_{R1} + i_{R2} = 0 \Longrightarrow \frac{v_{R1}}{R1} + \frac{v_{R2}}{R2} = 0$

- Flere kondensatorer/spoler i samme krets gir høyereordens diffligninger som er vesentlig mer kompliserte å løse enn a)
  - Vi ønsker lineære uttrykk for I og V **i stedenfor** $i_c = \mathrm{C}\frac{dv_c}{dt}$ og $v_L = \mathrm{L}\frac{di_L}{dt}$

Hvorfor kompleks representasjon (2)?

- Ønsker oss lineære uttrykk for komponentene
  - Lettere å analysere og designe
- Resistoren er lineær pga lineær sammenheng I-V

$$R = \frac{V}{I}$$

- Sammenhengen I-V for en kondensator er ikke-lineær

$$i_c = C\frac{dv_c}{dt}$$

  - Xc sier kun hva impedansen er som funksjon av frekvens men sier ingen ting om faseforskjellen

$$X_c = \frac{1}{2\pi f C}$$

Hvorfor kompleks representasjon (3)?

- Ved å representere strøm, spenning og impedans som vektorer i to dimensjoner får vi
  - Kondensatoren (og induktoren) kan igjen betraktes som lineære
  - Kretsene med passive komponenter kan beskrives med lineære ligninger
  - Ohms lov og reglene for impedans i serie og parallell vil gjelde fortsatt
  - Vi kan bruke de samme ligningene for strøm, spenning og impedans både ved dc og ac
  - Vi kan bruke allerede eksisterende matematiske formler for å analysere og designe kretser
- Vi skal i IN1080 **IKKE** gå gjennom teorien som ligger bak, kun vise sentrale idéer og fokusere på bruken av ligningene.

Kompleks representasjon (1)

1. Vi bruker Eulers ligning for å representere sinusformede strømmer og spenninger i det komplekse planet:

$$e^{j\theta} = cos(\theta) + jsin(\theta)$$

$$cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$sin(\theta) = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

Kompleks representasjon (2)

2. Vi setter inn $\theta = \omega t + \varphi$ og får

$$e^{j(\omega t+\varphi)} = cos(\omega t + \varphi) + jsin(\omega t + \varphi)$$

$$cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}(e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)})$$

$$sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2j}(e^{j(\omega t+\varphi)} - e^{-j(\omega t+\varphi)})$$

- Mao: sinusformede signaler representeres som en naturlig eksponensial-funksjonen i det komplekse planet

Kompleks representasjon (3)

3. Som en forenkling ser vi bort fra det siste eksponensial-leddet (dette kan selvfølgelig begrunnes)

$$i = I_0 cos(\omega t) = I_0 e^{jwt}$$

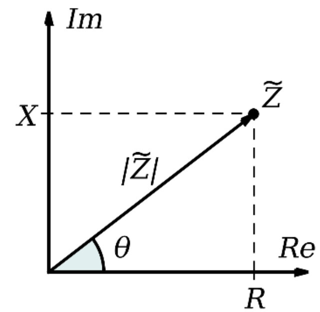
$$v = V_0 cos(\omega t) = V_0 e^{jwt}$$

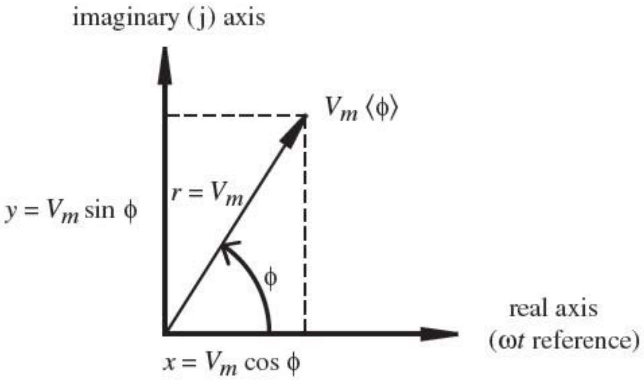
Kompleks representasjon (forts)

- Vi kan nå uttrykke en spenning V i en krets som er i "steady state" ved

$$V = V_m e^{j(\omega t+\varphi)} = V_m\langle\varphi\rangle = V_m[\cos(\omega t+\varphi) + jsin(\omega t+\varphi)]$$

  - $V = V_m e^{j(\omega t+\varphi)}$ er kompleks eksponensialform
  - $V = V_m\langle\varphi\rangle$ er polarform
  - $V = V_m[\cos(\omega t+\varphi) + jsin(\omega t+\varphi)]$ er kompleks rektangulær form





$$x = rcos(\varphi), y = rsin(\varphi)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \varphi = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

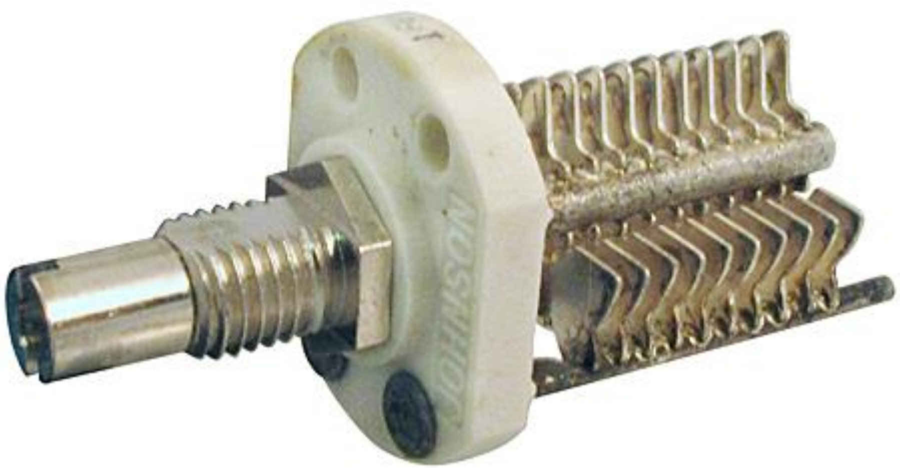
Kompleks representasjon (forts)

- En annen fordel med strøm/spenning representert i det komplekse planet er at uttrykkene for impedans blir enklere
  - Generelt uttrykk: V=Z*I
  - Resistor: $Z_R = R$ (resistiv impedans)
  - Kondensator: $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$ (kapasitiv impedans)
  - Spole: $Z_L = j\omega L$ (induktiv impedans)

- Mer om bruk av kompleks notasjon i forelesning 7 (med Mats Høvin)

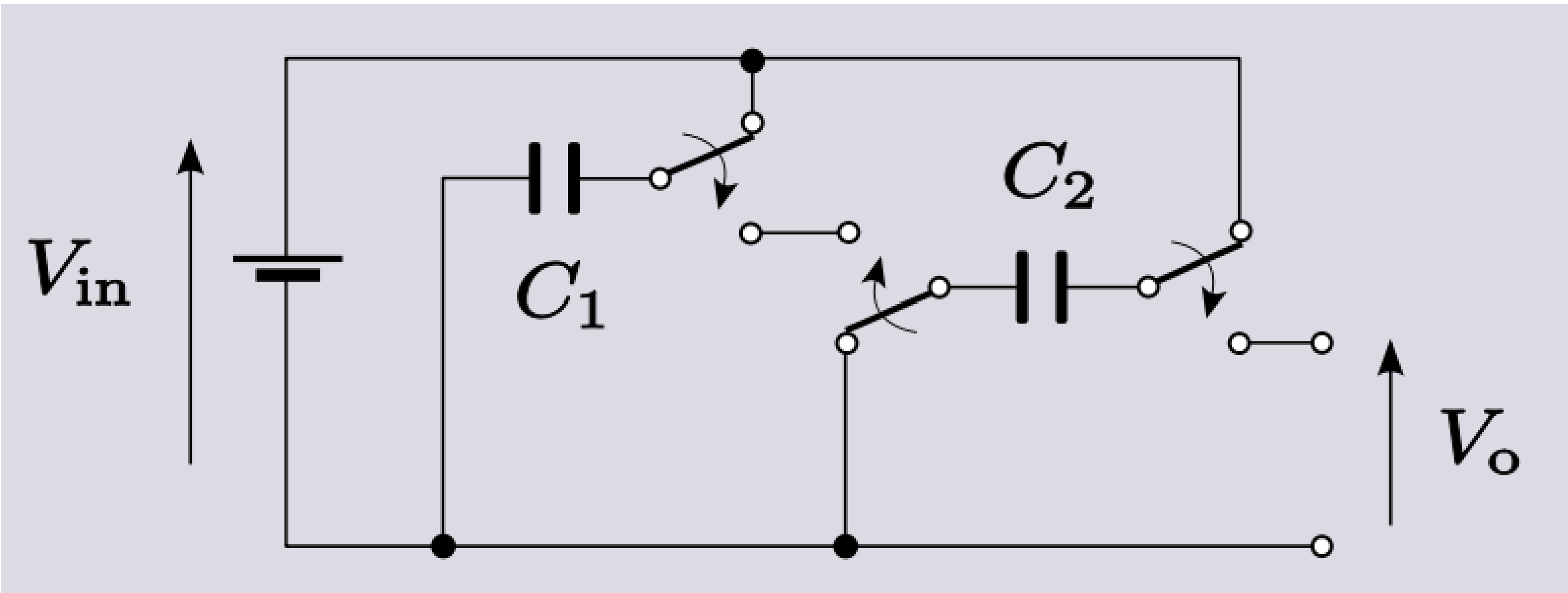
Nøtt fra forrige gang

- Hva er dette?



Nøtt til neste gang

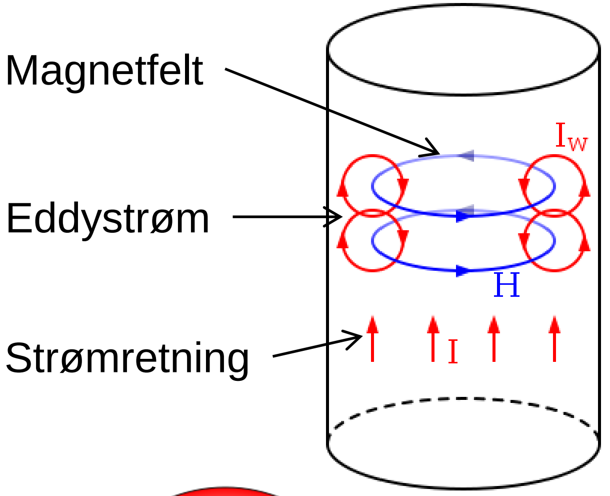
- Hva gjør denne kretsen? (dvs hva er sammenhengen mellom V_{in} og V_o når bryterene åpnes og lukkes?) Anta ideelle kondensatorer



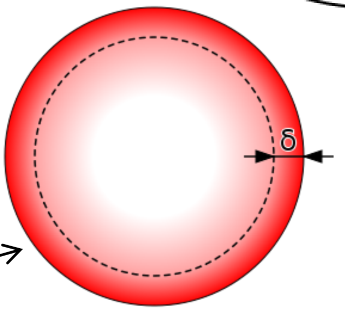
Resistorer, kondensatorer, spoler og ledere ved høye frekvenser

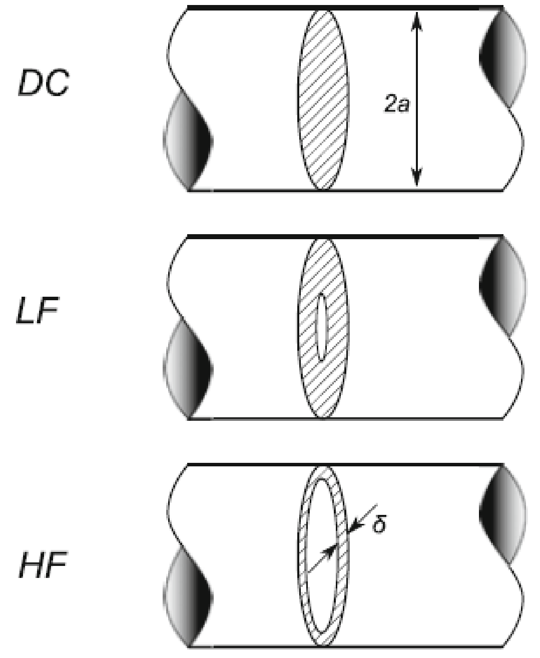
- Har antatt hittil at ledere null resistans, og at resistans er konstant og frekvensuavhengig
- Virkelighetens verden er mer kompleks:
  - Resistansen i ledere er frekvensavhengig
  - Kondensatorer blir til spoler ved høye frekvenser
  - Spoler blir til kondensatorer ved høye frekvenser
  - Resistorer blir til kondensatorer ved middels høye frekvenser og spoler ved veldig høye frekvenser
- **Konsekvens:** En krets må designes for et bestemt frekvensområde og vil ikke nødvendigvis fungere utenfor dette!

Nøyaktigere modell av ledere



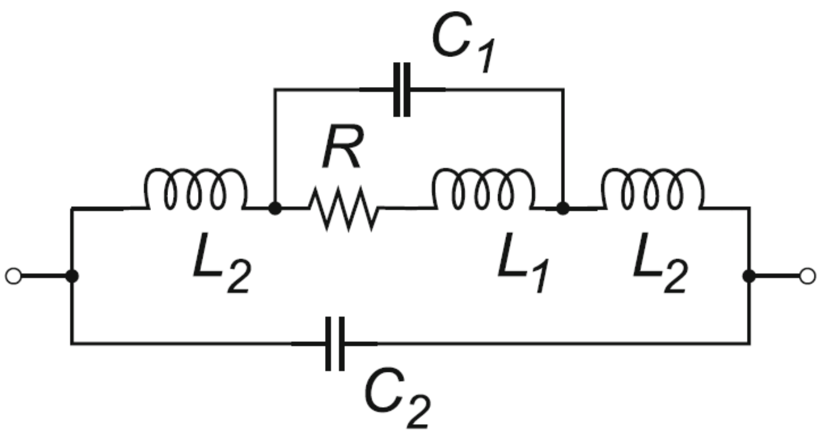
- Ideell: Ledere har ikke kapasitans eller induktans, men noe resistans
- Fysisk leder: Nærhet til andre ledere og hvordan den er plassert kan lage parasittkapasitans og -induktans
- Eddystrømmer går på tvers av magnetfeltet ved ac
- Skin-effekten skyldes Eddystrømmer som reduserer det effektive tverrsnittet med frekvensen (strømmen går bare langs ytterkanten av lederen); resistansen øker med økende frekvens
- Signaler med ulike frekvenser vil møte ulik resistans gjennom samme leder



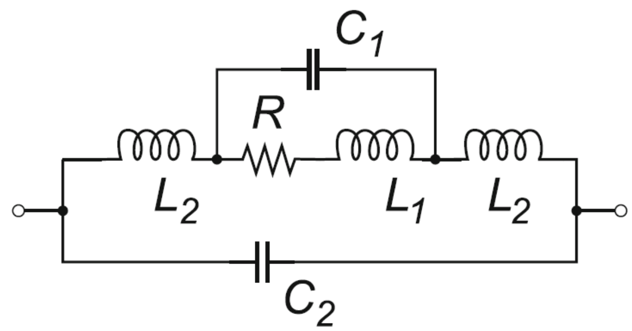


Nøyaktigere modell av resistor (1)

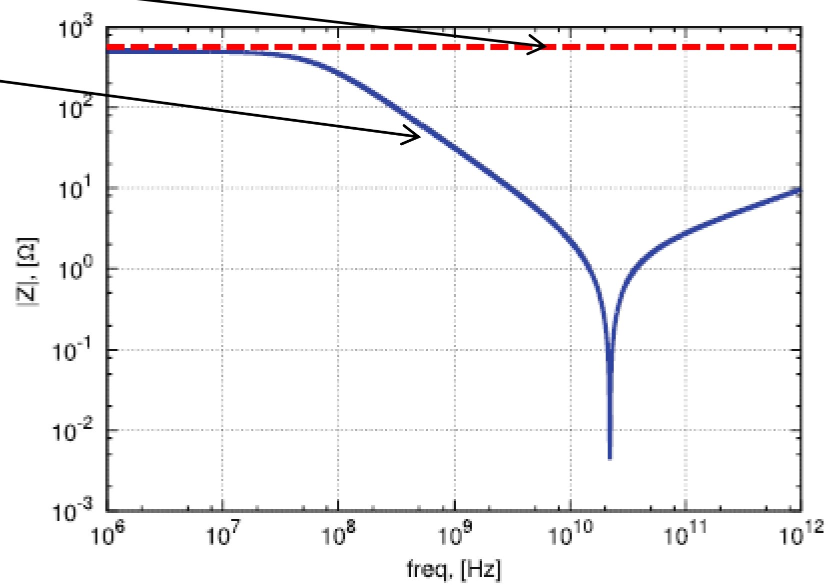
- Ideell: Impedans er uavhengig av frekvens
- I praksis blir resistorer kompliserte kretser når frekvensen blir høy (GHz)
- Årsak: Resistorer bygges med flere ulike materialer med ulike egenskaper for å gi ideell resistans innenfor et bestemt frekvensområde
- Utenfor dette området er karakteristikken langt fra ideell
- Signaler med ulike frekvenser vil møte ulik resistans gjennom samme leder



Nøyaktigere modell av resistor (2)

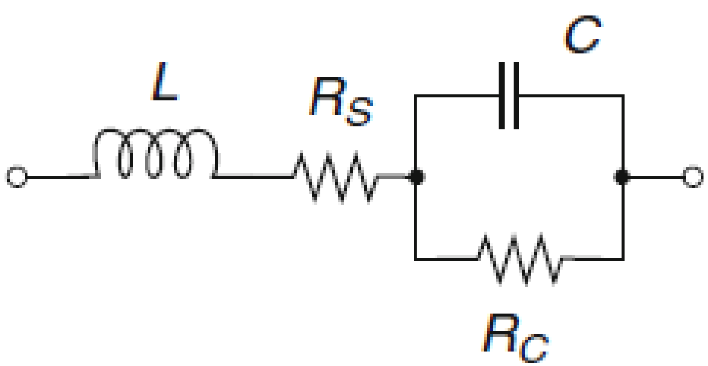


- Ideell karakteristikk
- Fysisk karakteristikk
  - 0 til 20 MHz: Ideell
  - 100Mhz til 10GHz: Kapasitansen dominerer
  - 10-30 GHz: Brått fall i Z (resonans)
  - Fra 30 GHz : Induktans dominerer

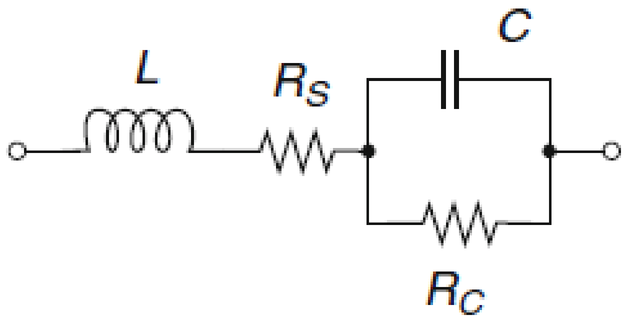


Nøyaktigere modell av kondensator (1)

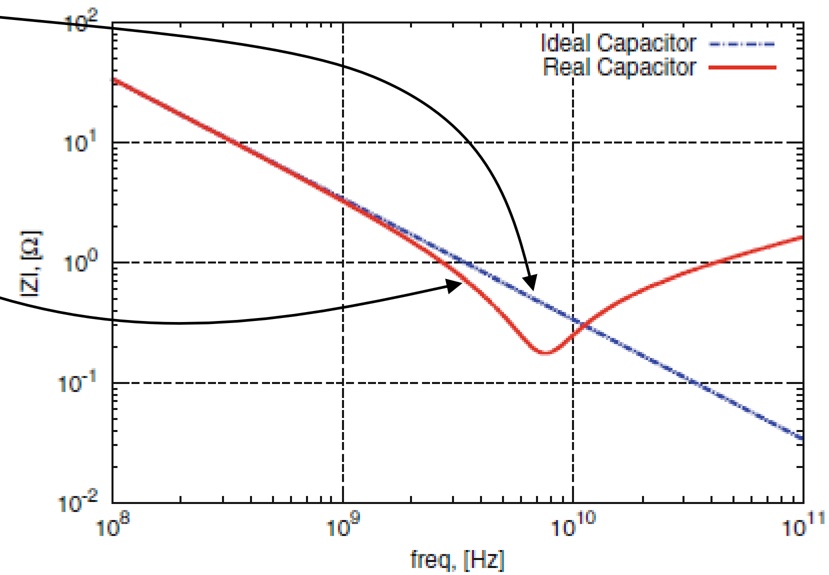
- Ideell karakteristikk: Impedansen faller proporsjonalt med frekvensen
- I praksis blir også kondensatoren en komplisert krets etter hvert som frekvensen øker



Nøyaktigere modell av kondensator (2)

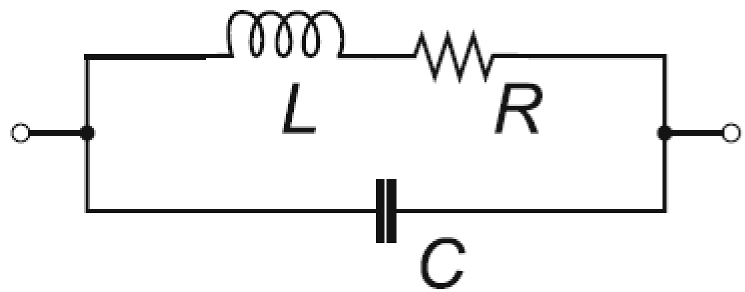


- Ideell karakteristikk
- Fysisk karakteristikk
  - Under 1 GHz: Nær ideell kondensator
  - 1 til 10 GHz: Fall i impedansen (resonans)
  - Over 10 GHz: Induktiv impedans dominerer og kondensatoren oppfører seg mer som en spole

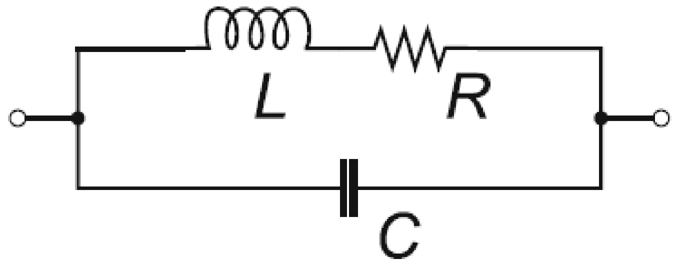


Nøyaktigere modell av induktor (1)

- Ideell induktor: Lineær sammenheng mellom impedans og frekvens
- I praksis mer komplisert, men allikevel enklere enn resistorer og kondensatorer



Nøyaktigere modell av induktor (2)



- Ideell karakteristikk:
- Fysisk karakteristikk
  - Under 1GHz: Følger ideell induktor
  - 1-10 GHz: Sterkt økning i impedansen (resonans)
  - Over 10 GHz: Parasittkapasitansen dominerer fullstendig og spolen oppfører seg som en kondensator