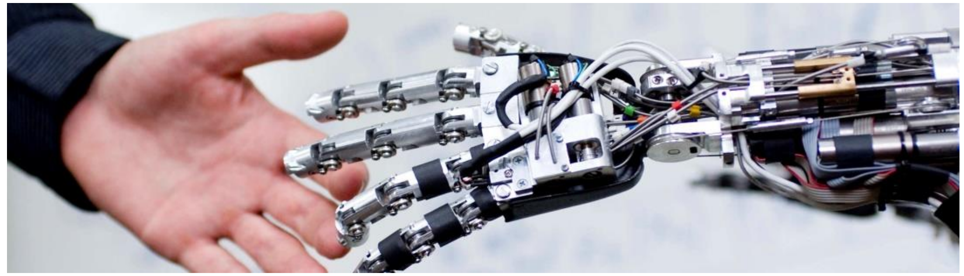


Forelesning nr.5 IN 1080 Mekatronikk

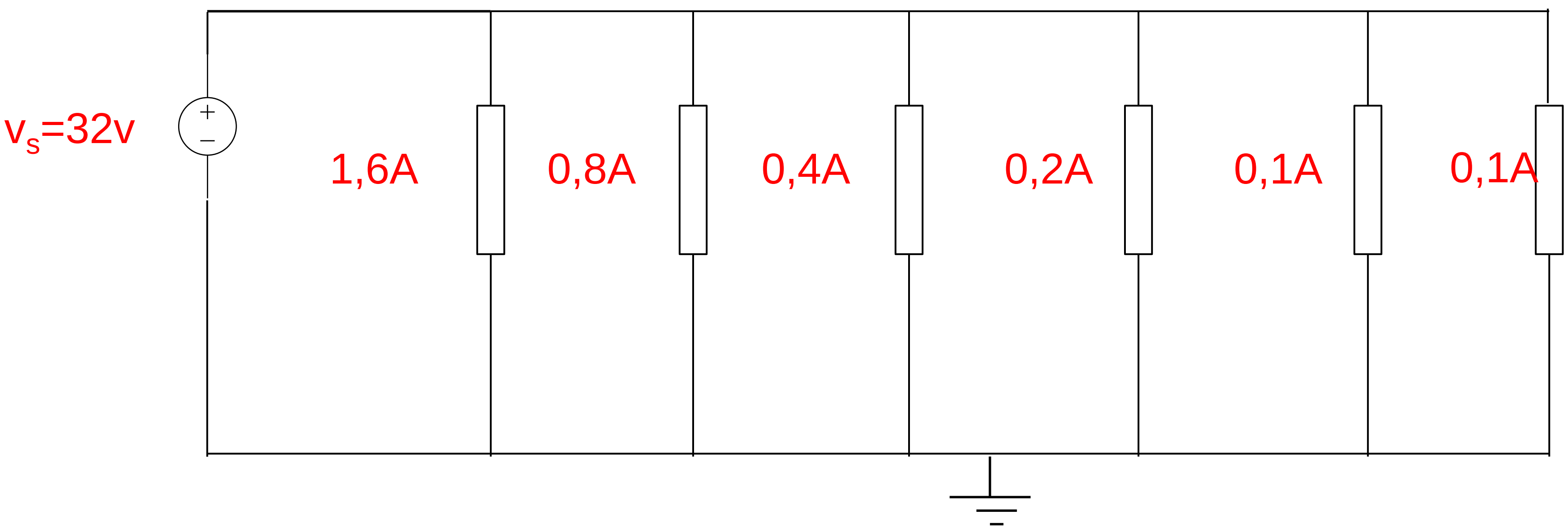
Kompleks strøm, spenning og impedans
Bruk av induktorer

Dagens temaer

- Repetisjon kondensator
- Induktorer
  - Strøm, spenning og impedans
  - Anvendelser
- Forskjell fysiske og ideelle resistorer, kondensatorer og spoler
- Kahoot!-quiz
- Fourier-rekker
- Superposisjon
- I, V og Z som komplekse variable og $j\omega$-notasjon
- Dagens temaer er hentet fra kap 9.6 - 9.9 i læreboka

Nøtt fra forelesning 2

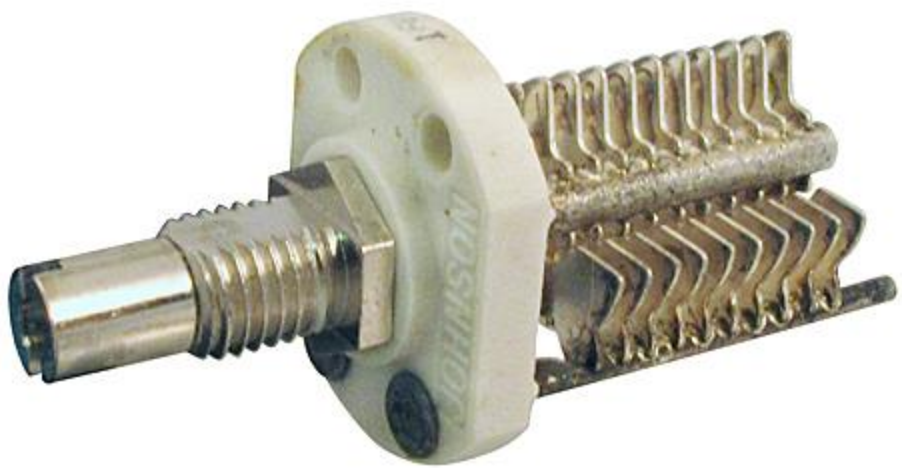
- Gitt en krets som skal brukes til å lage 6 strømmer slik det er vist:



- Hvis du bare har én motstandsstørrelse tilgjengelig, hvor stor må denne være for at du skal klare deg med *så få* motstander som mulig?

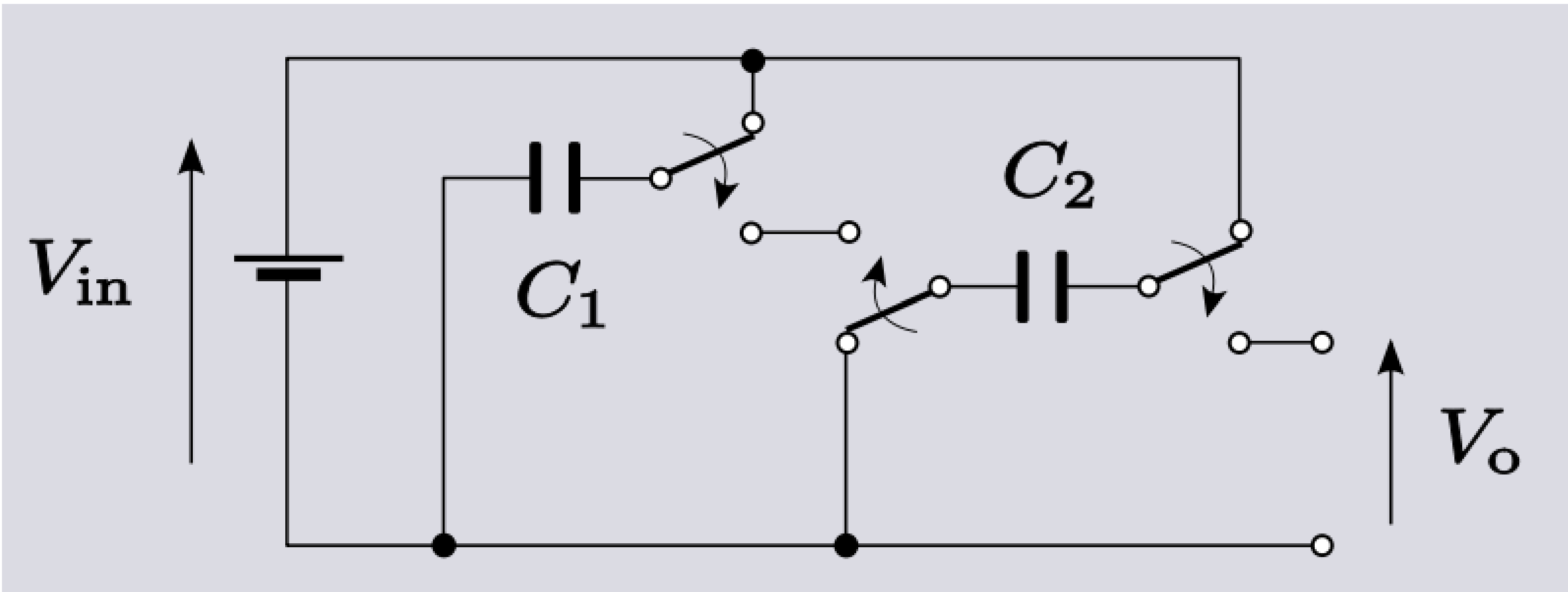
Nøtt fra forelesning 3

- Hva er dette?



Nøtt til forelesning 4

- Hva gjør denne kretsen? (dvs hva er sammenhengen mellom V_{in} og V_o når bryterene åpnes og lukkes?) Anta ideelle kondensatorer!

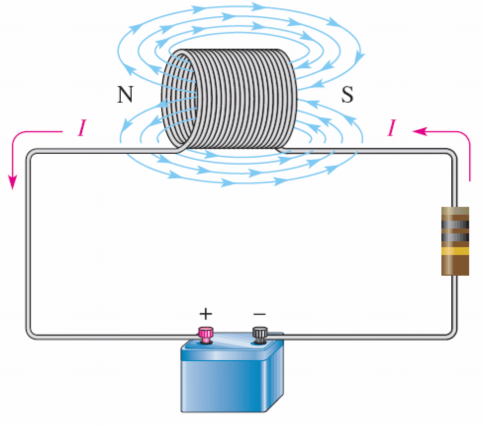


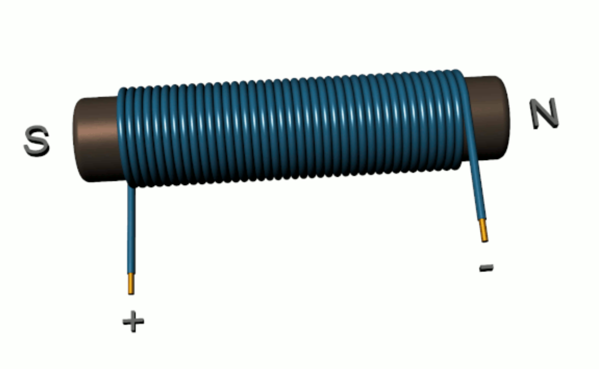
Magnetfelt og induksjon

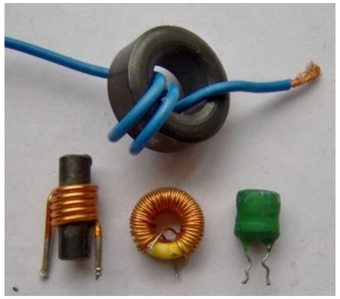
- I elektronikk bruker vi ***induktorer*** (norsk: spole) som et passivt, ***frekvensavhengig*** kretselement
- I induktoren lager elektromagnetisk induksjon et magnetfelt som gir et elektrisk felt (spenning) fordi en strøm varierer
- Magnetfeltet kan også generere en ny elektrisk strøm i en annen leder i nærheten og dette kan brukes til å lage en ***transformator***
- I en ***elektromotor*** lager vi et varierende magnetfelt vha en elektrisk strøm, og dette magnetfeltet brukes til å få en annen magnet til å dreie rundt
- I en ***generator*** lages en elektrisk strøm ved at en permanentmagnet roteres vha en mekanisk kraft (vind, fossefall, bølger etc) og lager en elektrisk strøm i en spole

Induktorer

- En induktor (spole) består av en isolert elektrisk leder surret rundt en metallkjerne eller et ikke-magnetisk materiale







- Hver vinding rundt kjernen gir en magnetisk feltlinje; jo flere vindinger desto flere feltlinjer og sterkere magnetfelt
- En spole kan derfor tenkes på som en *elektromagnet*, dvs en type magnet hvor magnetfeltet lages vha en elektrisk strøm

Induktorer (forts)

- Magnetfeltet lager (induserer) en elektrisk spenning som motarbeider *endringer* i strømmer gjennom spolen
- Styrken på magnetfeltet er proporsjonal med endringen i strømmen gjennom spolen
- Den induserte spenningen er proporsjonal med *endringen* i strømmen

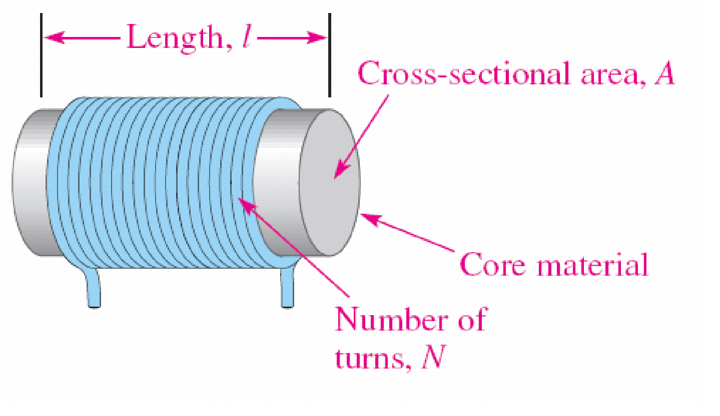
$$v = L\frac{di}{dt}$$

- Ved likespenning vil en spole ha null induktiv impedans, mens den øker med økende frekvens

Induktorer (forts)

- *Induktans* L måles i *Henry*=*Ωs* og uttrykker spolens evne til å indusere spenning etterhvert som strømmen gjennom spolen endrer seg
- Merk forskjellen mellom L og R

$$L = \frac{N^2 \mu A}{l}$$

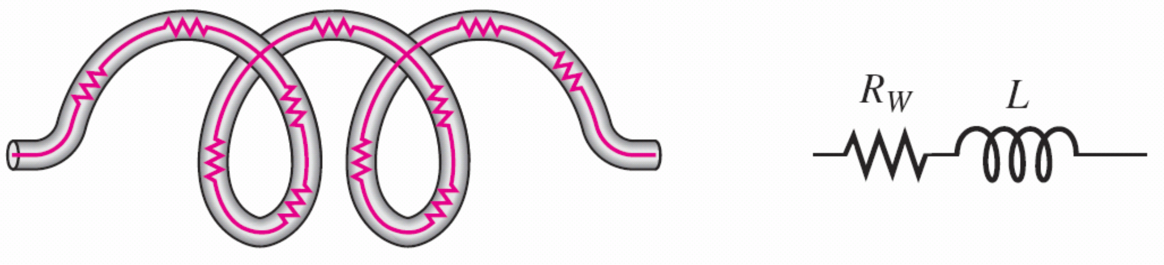


Induktorer (forts)

- Motstanden mot strøm kalles for *induktiv reaktans* og er gitt av

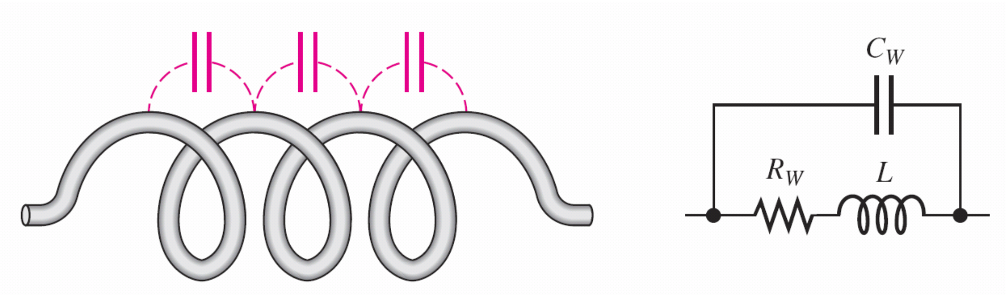
$$X_L = 2\pi fL$$

- Spoler har i tillegg resistans som kalles viklingsresistans R_W og skyldes at lederen har ohmsk motstand



Induktorer (forts)

- Spoler har i tillegg parasittkapasitans:

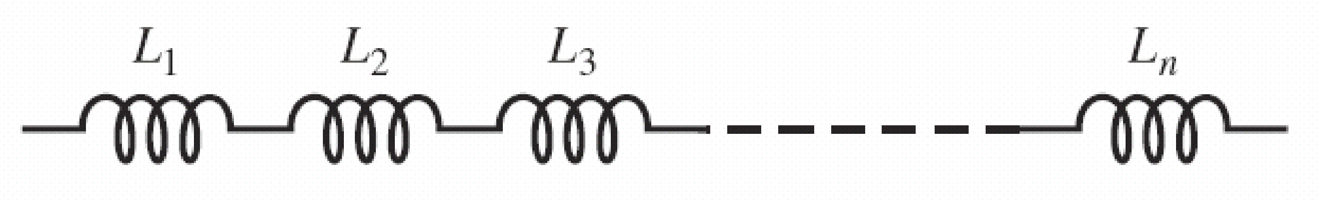


- Pga. fysisk størrelse og parasitteffekter er spoler mindre brukt enn kondensatorer for å lage frekvensavhengig impedans
- **Men:** Denne modellen endrer seg ikke mye ved høye frekvenser (GHz), i motsetning til kondensatorer og resistorer som endrer oppførsel

Spoler i serie

- Hvis man kobler spoler i serie får man en total induktans som er lik summen av de individuelle induktansene

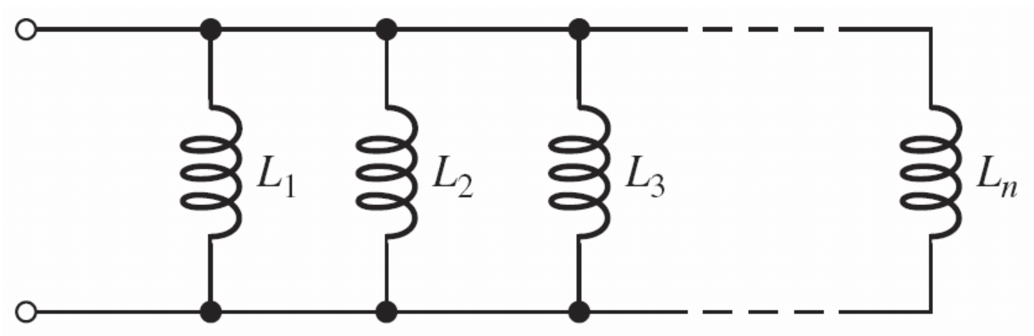
$$L_T = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$



Spoler i parallell

- Hvis man kobler spoler i parallell får man en total induktans som er mindre enn den minste av de individuelle induktansene

$$\frac{1}{L_T} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$$



Total impedans i serielle og parallelle kretser (1)

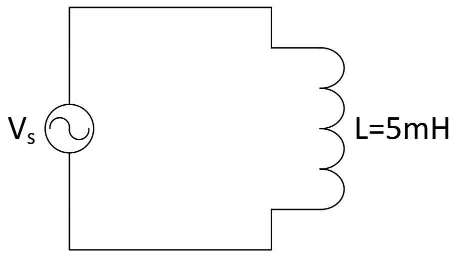
- Kretser med bare resistorer:
  - **Serie:** $R_{(tot)} = R_1 + R_2 + ... + R_n$
  - **Parallell:** $1/R_{tot} = 1/R_1 + 1/R_2 + ... + 1/R_n$

- Kretser med bare kondensatorer
  - **Serie:** $X_{C(tot)} = X_{C1} + X_{C2} + ... + X_{Cn}$
  - **Parallell:** $1/X_{C(tot)} = 1/X_{C1} + 1/X_{C2} + ... + 1/X_{Cn}$

- Kretser med bare induktorer
  - **Serie:** $X_{L(tot)} = X_{L1} + X_{L2} + ... + X_{Ln}$
  - **Parallell:** $1/X_{L(tot)} = 1/X_{L1} + 1/X_{L2} + ... + 1/X_{Ln}$

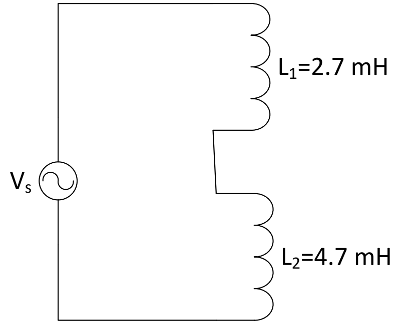
Oppgaver (1)

- **Spm 1** : Gitt kretsen under: Hvor stor er den induktiv reaktansen ved
  - a) f = 0 Hz
  - b) f = 10 kHz?
  - c) f = 10 GHz?

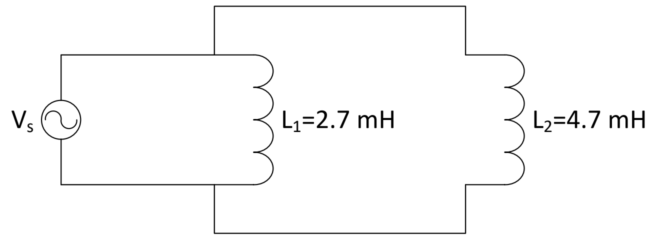


- **Spm 2 :** Hvis den induktive reaktansen i kretsen over måles til 1250 Ω, hva er da f?
- **Spm 3 :** Hvis kretsen over skal ha 1 kΩ induktiv reaktans f= 25kHz, hva må da L være?
- **Spm 4 :** Beregn den totale kapasitive reaktansen i krets a) og krets b) på to ulike måter

a)



b)

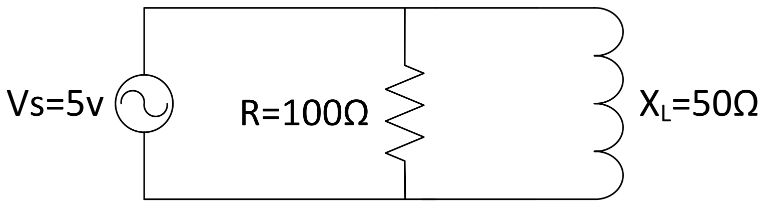


Total impedans i serielle og parallelle kretser (2)

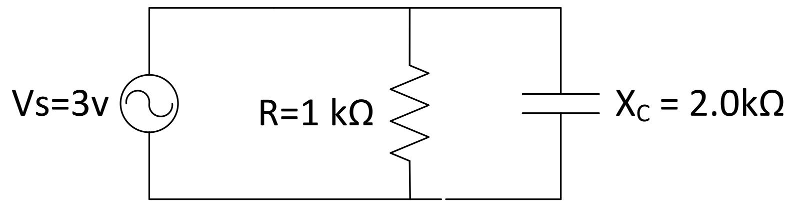
- Legg merke til følgende:
  - Impedansen varierer med frekvensen; tallene for $X_{C(tot)}$, $X_{L(tot)}$ gjelder derfor bare for en bestemt frekvens
  - $R_{(tot)}$ gjelder for alle frekvenser
  - Hvis kretsen består av to typer passive elementer (RC eller RL) må vi ta hensyn til at R, C og L er vektorer ved parallell- og seriekobling:

	Impedans RC-krets	Fasevinkel RC-krets	Impedans RL-krets	Fasevinkel RL-krets
Parallell	$Z = \frac{RX_c}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$	$\theta = tan^{-1}(\frac{R}{X_C})$	$Z = \frac{RX_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$	$\theta = tan^{-1}(\frac{R}{X_L})$
Seriell	$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$	$\theta = tan^{-1}(\frac{X_C}{R})$	$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}$	$\theta = tan^{-1}(\frac{X_L}{R})$

Oppgaver (2)



a)



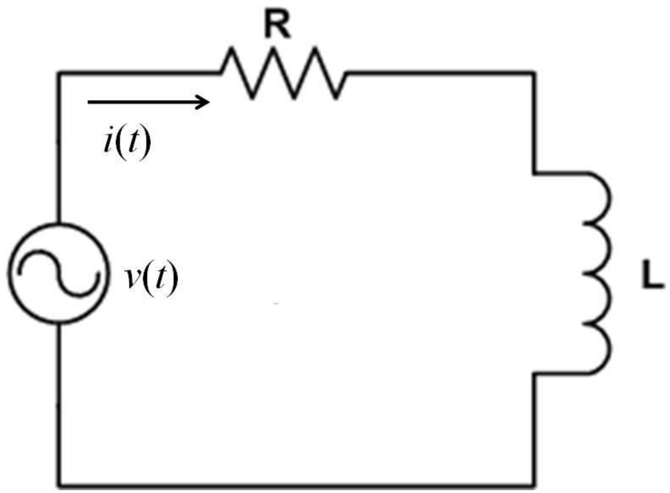
b)

- **Spm 1 :** Finn impedansen **Z** og fasevinkelen θ til krets a)
- **Spm 2 :** Finn impedansen **Z** og fasevinkelen θ til krets b)
- **Spm 3:** Tenk at R og X_L i krets a) får samme verdier som i krets b), dvs R=1 kΩ og X_L = 2 kΩ. Hva blir impedansen og fasevinkelen i dette tilfellet?

Tidskonstant i RL-kretser

- RL-tidskonstanten er forholdet mellom induktansen og resistansen:

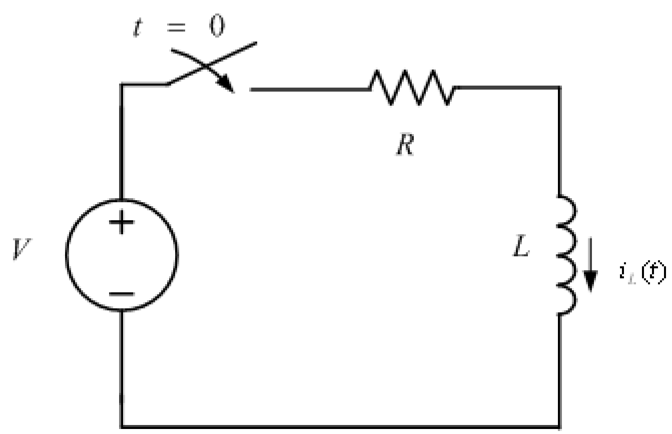
$$\tau = \frac{L}{R}$$

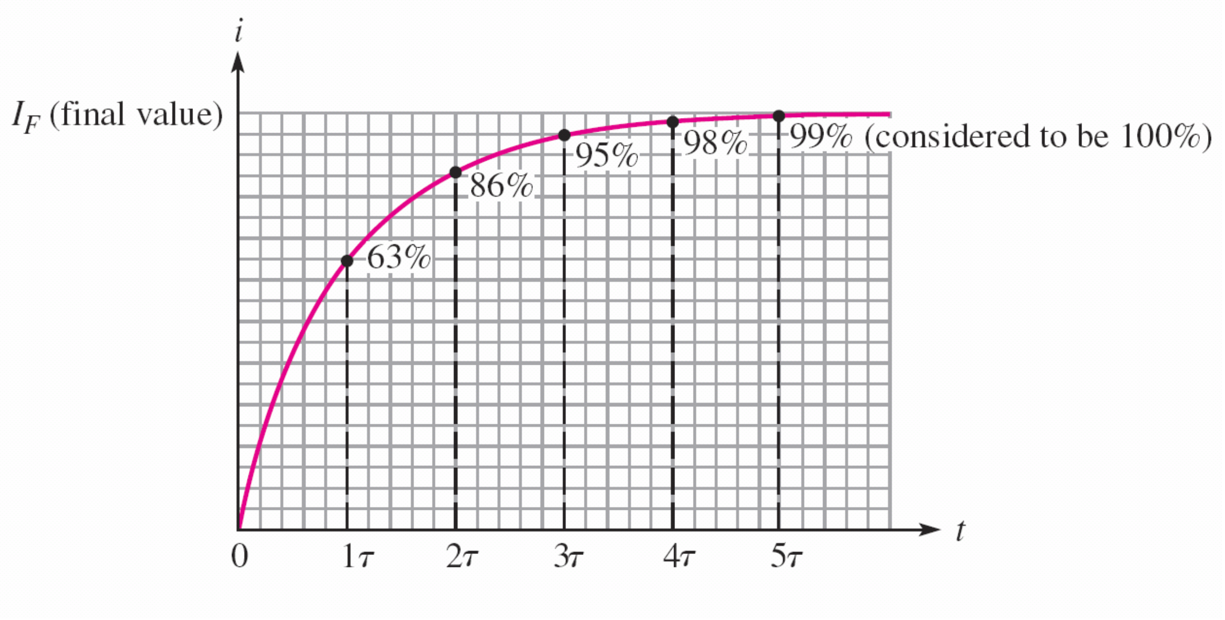


- Tidskonstanten angir hvor fort strømmen kan endre seg i en spole: Jo større induktans, desto lengre tid tar det å endre strømmen

Strøm i RL-kretser

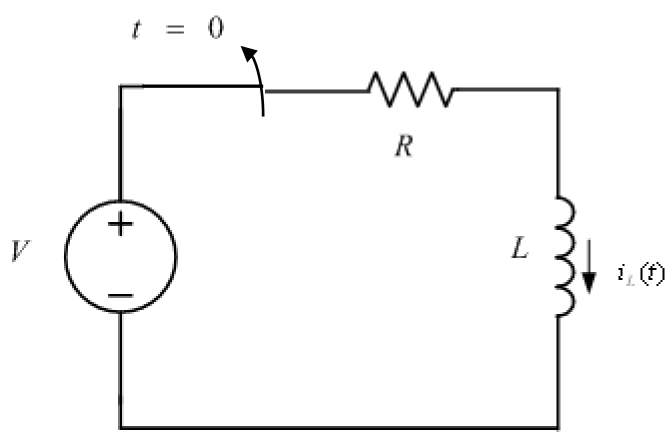
- Hvis en spole kobles *til* en spenningskilde vil strømmen gjennom spolen *øke* eksponensielt:

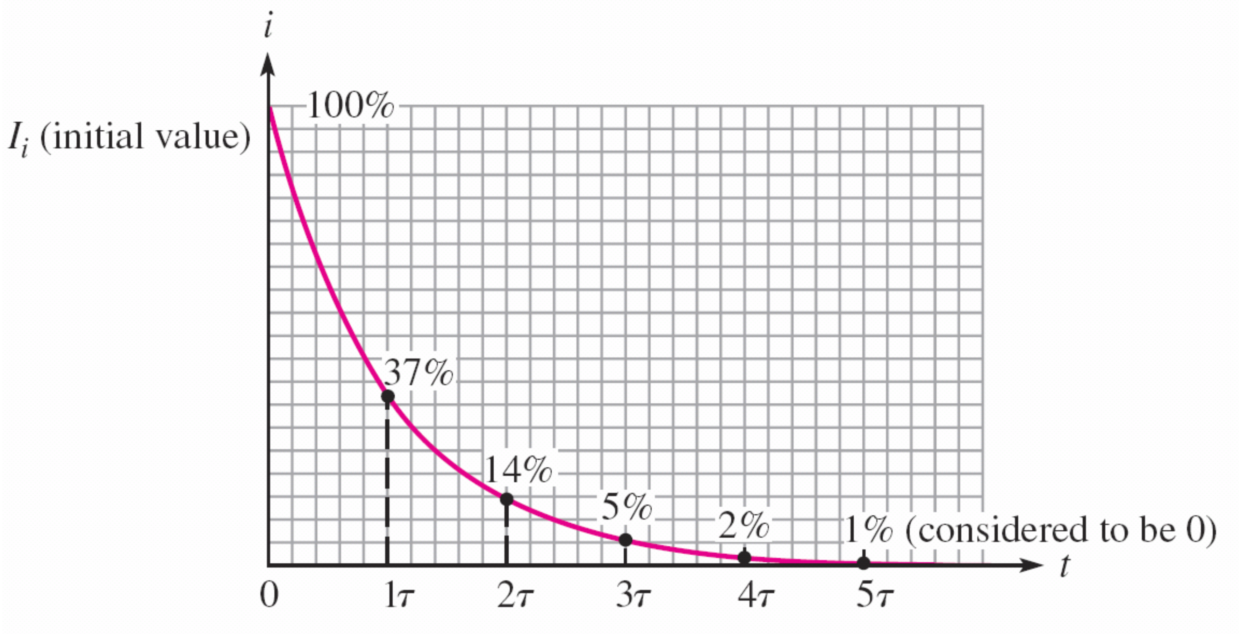




Strøm i RL-kretser (forts)

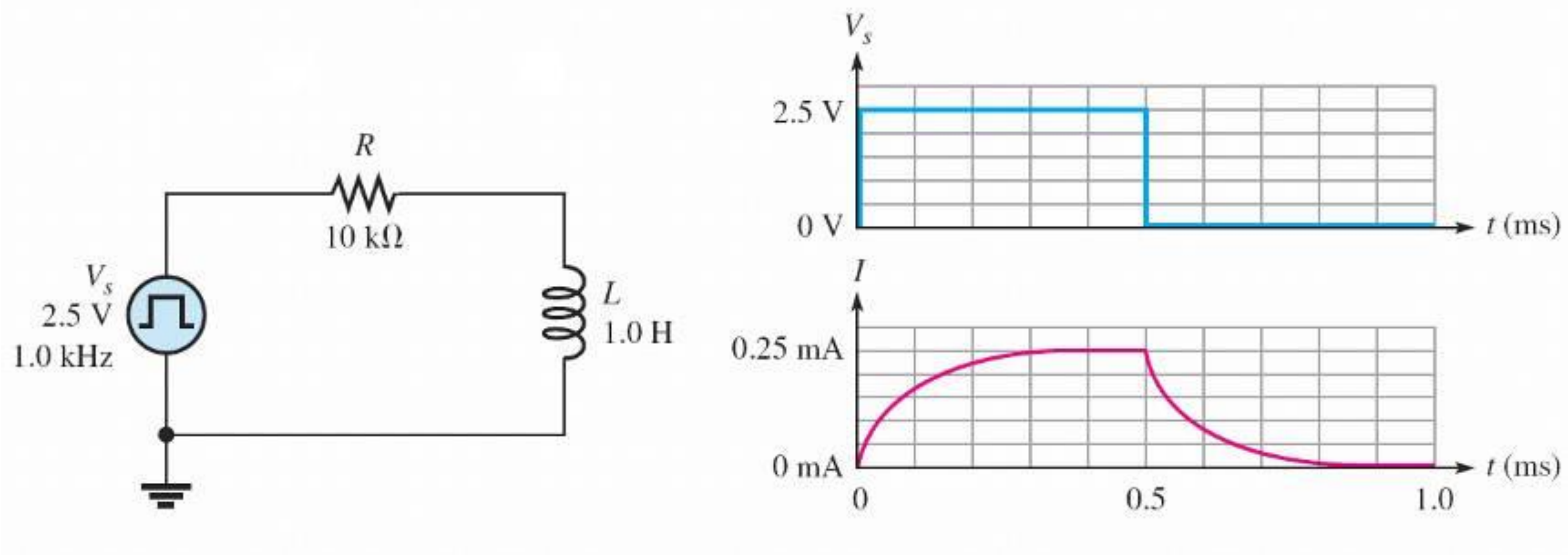
- Hvis en spole kobles *fra* en spenningskilde vil strømmen gjennom spolen *avta* eksponensielt:





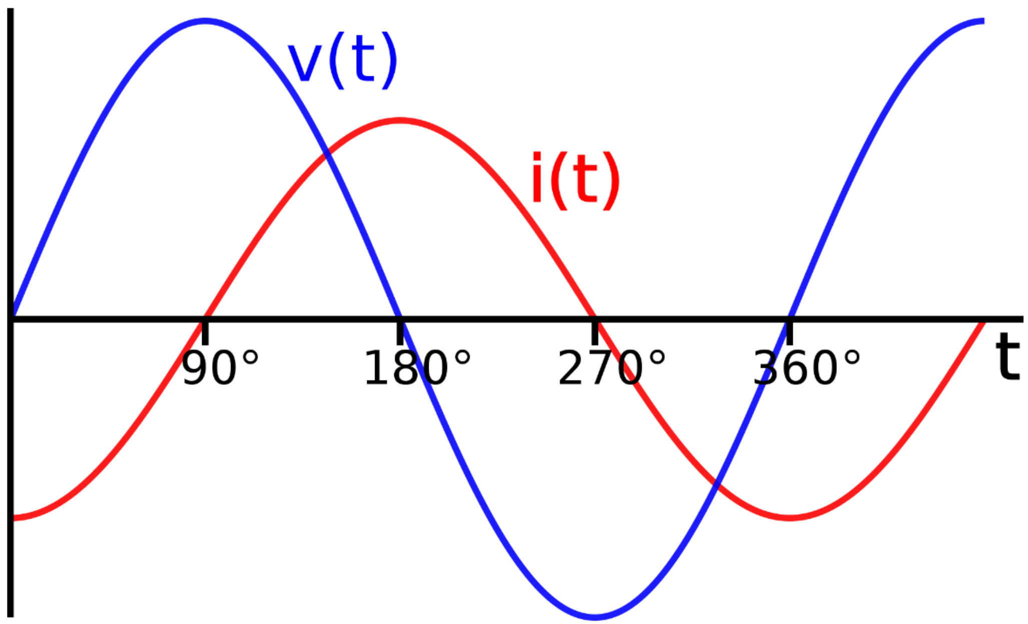
Respons på en firkantpuls

- Hvis spenningskilden til RL-kretsen er en firkantpuls, vil strømmen gjennom spolen vekselvis øke og minke eksponensielt:



Forholdet I-V i en spole

- Mens i_c ligger 90^o **foran** v_c i en kondensator er det motsatt i en spole: i_L ligger 90^o **bak** v_L



Oppgaver (3)

- **Spm 1** : Hva er faseforskjellen mellom strøm og spenning gjennom en kondensator?
- **Spm 2:** Hva er formelen for tidskonstanten for en spole, og hva sier den?
- **Spm 3-1** : Hva er en kondensators impedans ved f=0, og hva kan den erstattes med i dette tilfellet?
- **Spm 3-2** : Hva er en kondensators impedans ved f=∞ og hva kan den erstattes med i dette tilfellet?
- **Spm 4-1** Hva er en spoles impedans ved f=0, og hva kan den erstattes med i dette tilfellet?
- **Spm 4-2** : Hva er en spoles impedans ved f=∞ og hva kan den erstattes med i dette tilfellet?
- **Spm 5**: Hva er måleenheten for induktans?
- **Spm 6 :** Hva er faseforskyningen mellom strøm og spenning i en spole?

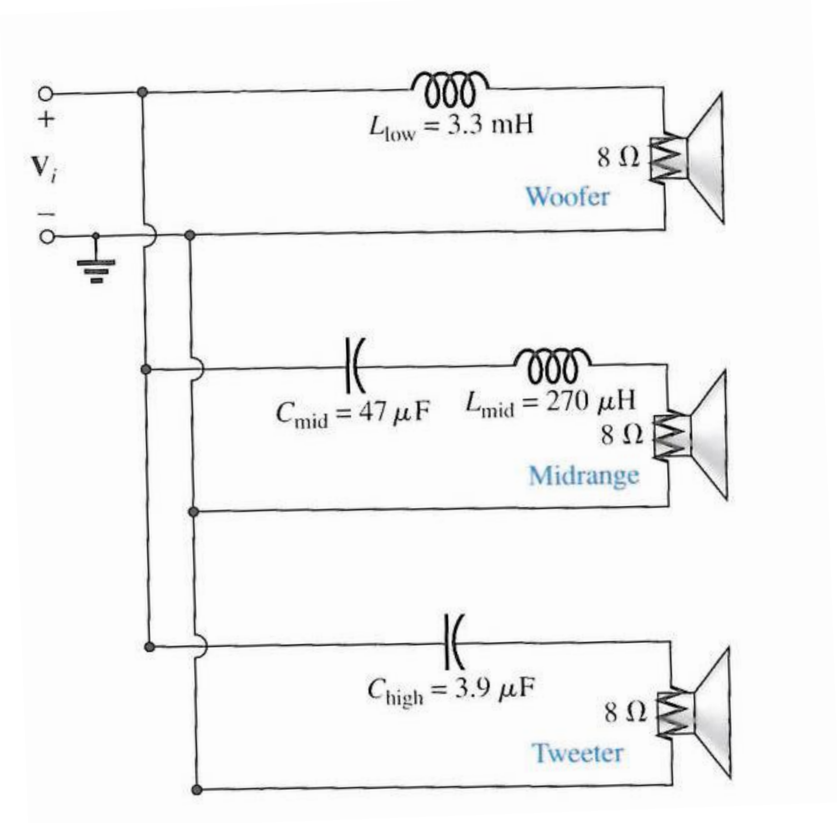
Anvendelse av induktorer

- Induktorer brukes mindre enn kondensatorer, men svært nyttige i noen anvendelser:
  - Fjerning av uønskede høyfrekvenssignaler i lange ledere
  - Aktive og passive filtre
  - Frekvenstuning i trådløs kommunikasjon (oscillatorer og synthesizere)

- Induktiv reaktans må kontrolleres i alle elektroniske systemer
  - Setter begrensinger på bla maksimal lengde på ledere
  - Man risikerer å lage uønskede antenner som fanger opp elektromagnetisk stråling fra omgivelsene.

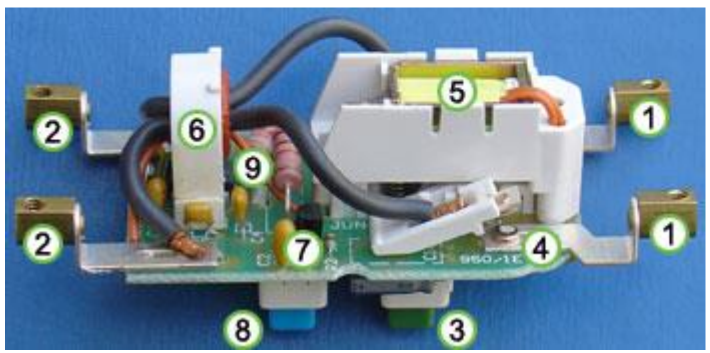
Anvendelse: Delefilter til høytaler

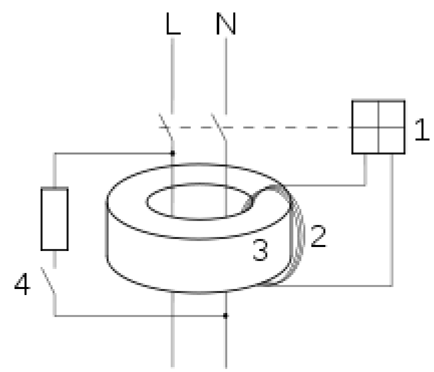
- Hvert høyttalerelement er laget for et bestemt frekvensområde



Anvendelse: Jordfeilbryter

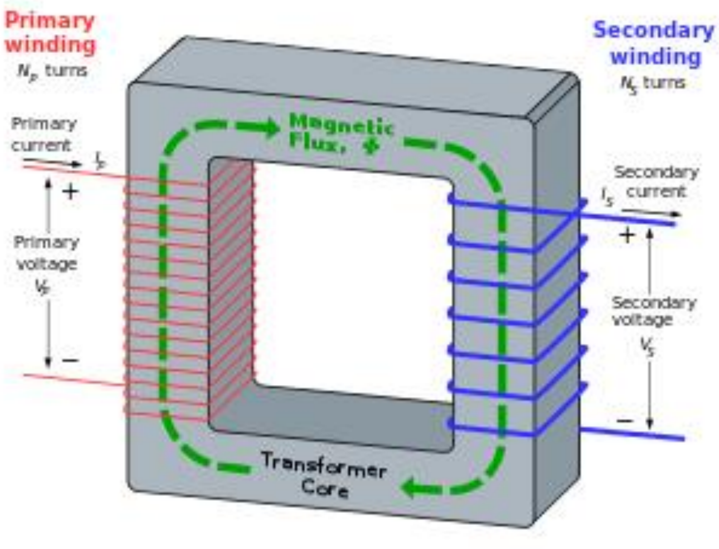
- Løser ut en sikring hvis det er jordfeil, dvs hvis én av de to lederne har forbindelse mot jord

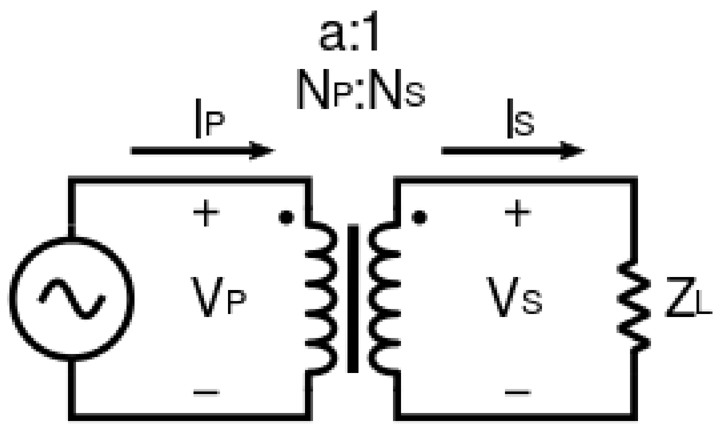




Transformator

- Transformator bruker induksjon for å endre nivået til en ac-spenning (opp eller ned)



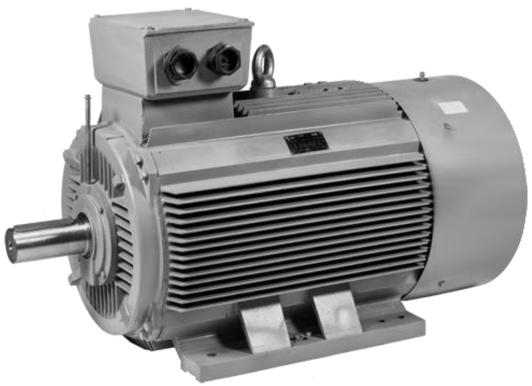


$$\frac{V_p}{V_s} = \frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s} = \mathrm{a}$$

a > 1: transformerer ned

a < 1: transformerer opp

Elektromotorer

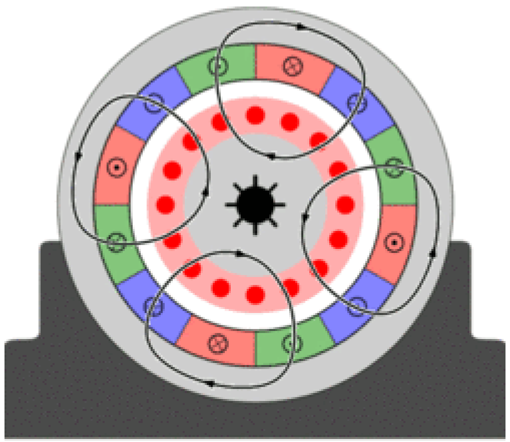


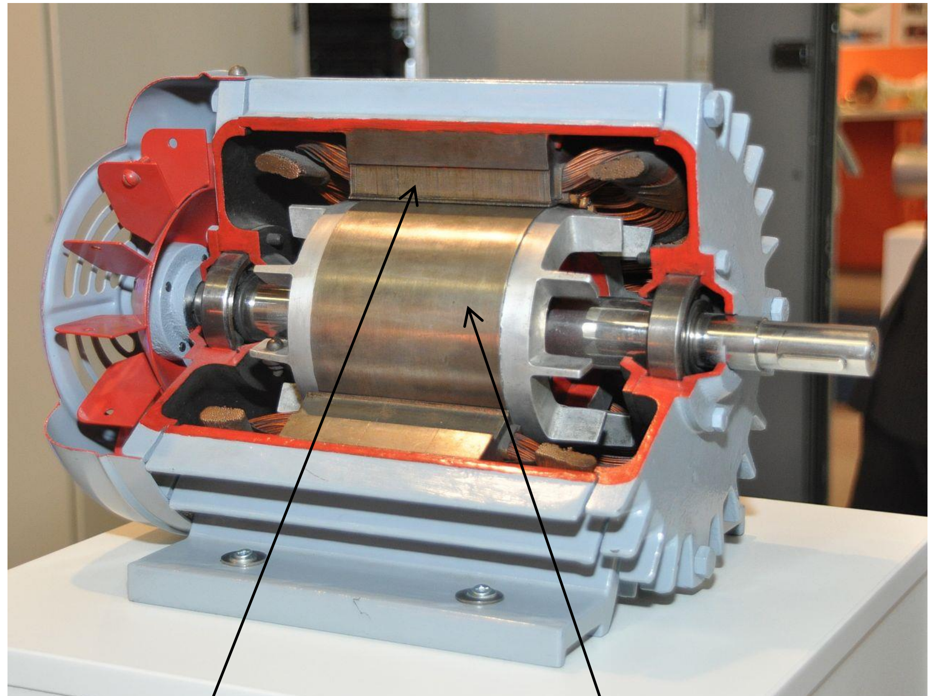
- Grunnlaget for den industrielle revolusjonen på slutten av 1800-tallet
- Den effekten en motor leverer måles i kW eller hestekrefter (historisk)
  - 1 Hk ≈ 736 W
- Utviklingen av effektive (mest mulig av strøm omdannes til bevegelse, ikke varme) er en viktig for tog og elbiler

- Elektromotorer lages i størrelser fra milliWatt (0.001W) til 100 MegaWatt (100 000 000 W)

Prinsipp for elektromotorer

- I en elektromotor er det magnefelt som endrer retning som får en aksel til å rotere
- Magnetfeltet lages av elektromagneter (spoler)
- Motoren er bygd opp av to hoveddeler
  - Statoren er fast
  - Rotoren er bevegelig og roterer
- Elektromotorer finnes både dc og ac





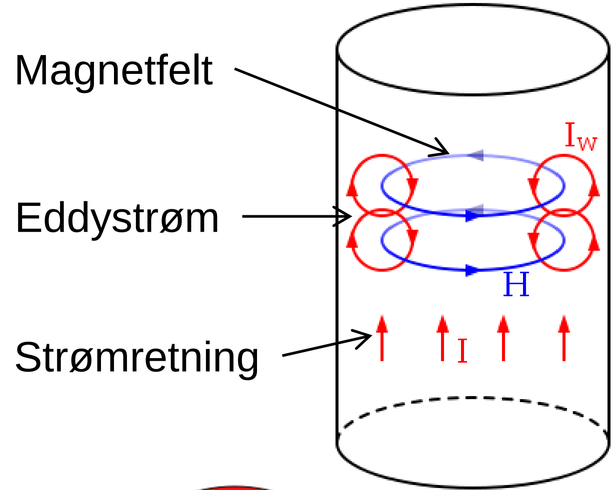
Stator

Rotor

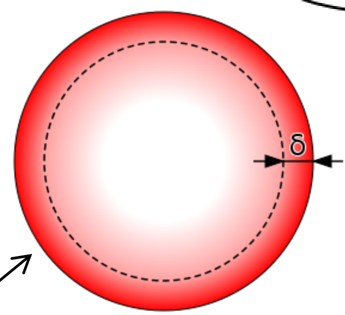
Resistorer, kondensatorer, spoler og ledere ved høye frekvenser

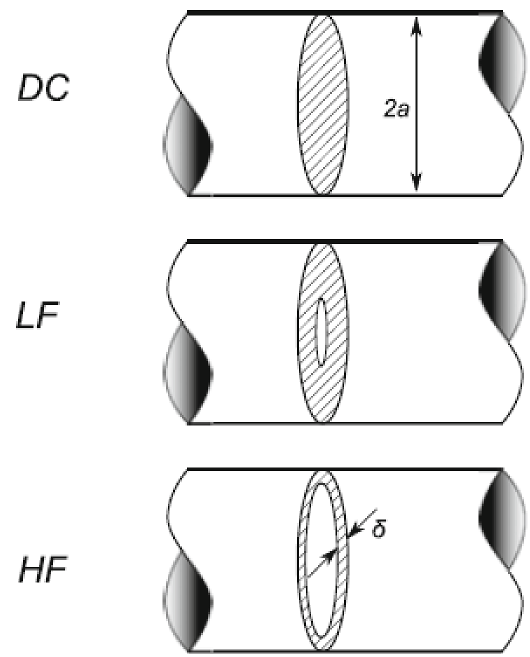
- Har antatt hittil at ledere null resistans, og at resistans er konstant og frekvensuavhengig
- Virkelighetens verden er mer kompleks:
  - Resistansen i ledere er frekvensavhengig
  - Kondensatorer blir til spoler ved høye frekvenser
  - Spoler blir til kondensatorer ved høye frekvenser
  - Resistorer blir til kondensatorer ved middels høye frekvenser og spoler ved veldig høye frekvenser
- **Konsekvens:** En krets må designes for et bestemt frekvensområde og vil ikke nødvendigvis fungere utenfor dette!

Nøyaktigere modell av ledere



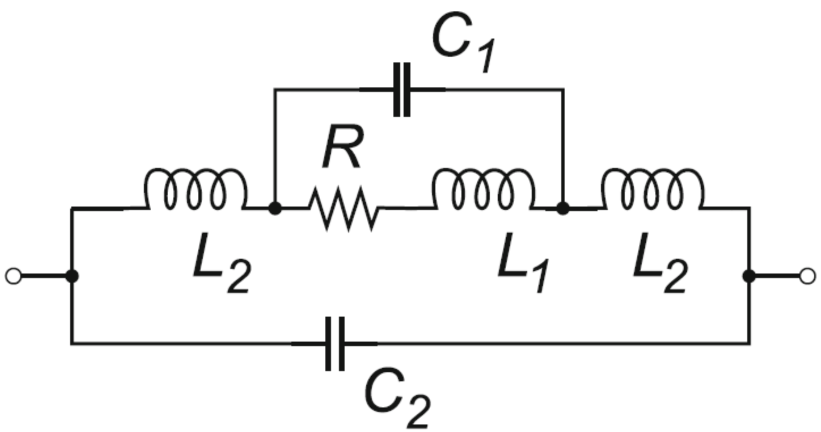
- Ideell: Ledere har ikke kapasitans eller induktans, men noe resistans
- Fysisk leder: Nærhet til andre ledere og hvordan den er plassert kan lage parasittkapasitans og -induktans
- Eddystrømmer går på tvers av magnetfeltet ved ac
- Skin-effekten skyldes Eddystrømmer som reduserer det effektive tverrsnittet med frekvensen (strømmen går bare langs ytterkanten av lederen); resistansen øker med økende frekvens
- Signaler med ulike frekvenser vil møte ulik resistans gjennom samme leder



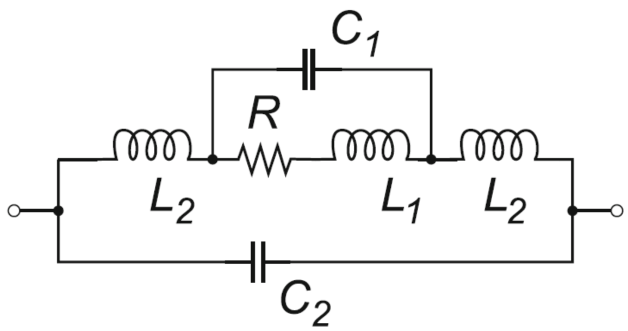


Nøyaktigere modell av resistor (1)

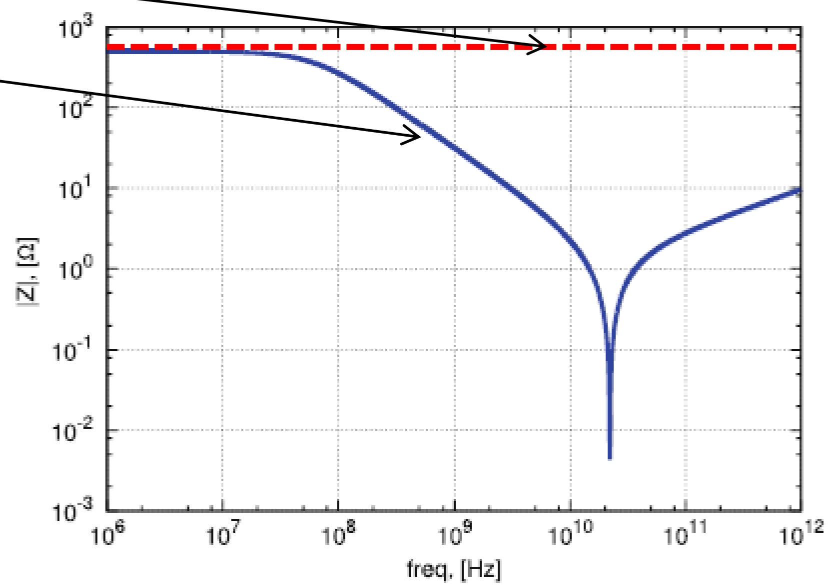
- Ideell: Impedans er uavhengig av frekvens
- I praksis blir resistorer kompliserte kretser når frekvensen blir høy (GHz)
- Årsak: Resistorer bygges med flere ulike materialer med ulike egenskaper for å gi ideell resistans innenfor et bestemt frekvensområde
- Utenfor dette området er karakteristikken langt fra ideell
- Signaler med ulike frekvenser vil møte ulik resistans gjennom samme leder



Nøyaktigere modell av resistor (2)

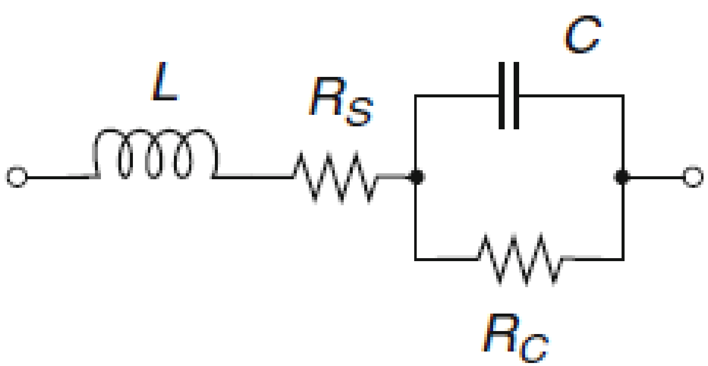


- Ideell karakteristikk
- Fysisk karakteristikk
  - 0 til 20 MHz: Ideell
  - 100Mhz til 10GHz: Kapasitansen dominerer
  - 10-30 GHz: Brått fall i Z (resonans)
  - Fra 30 GHz : Induktans dominerer

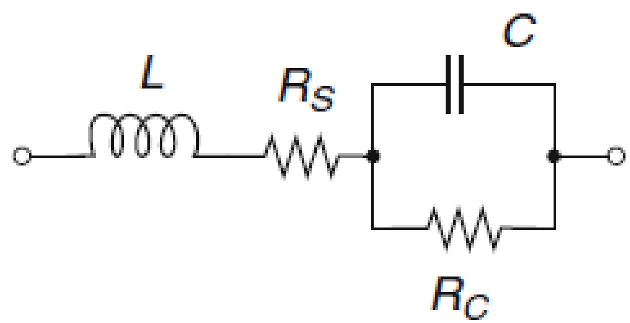


Nøyaktigere modell av kondensator (1)

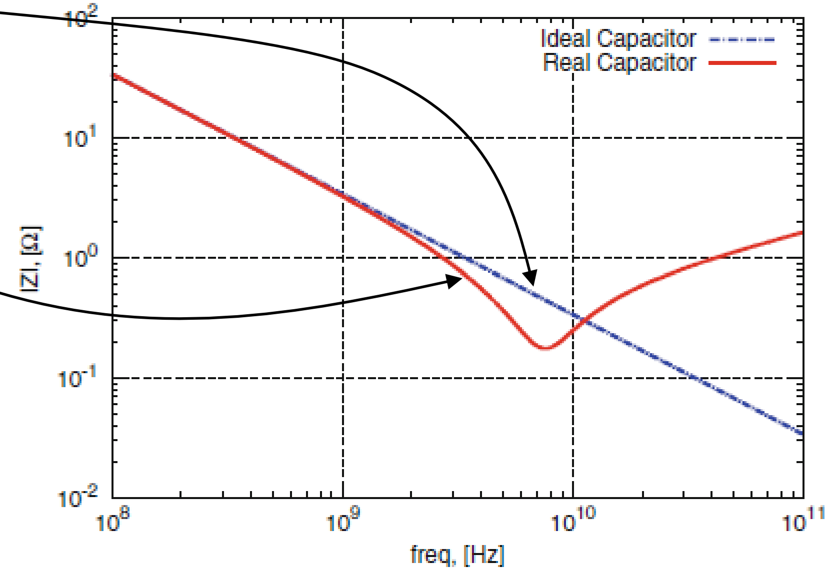
- Ideell karakteristikk: Impedansen faller proporsjonalt med frekvensen
- I praksis blir også kondensatoren en komplisert krets etter hvert som frekvensen øker



Nøyaktigere modell av kondensator (2)

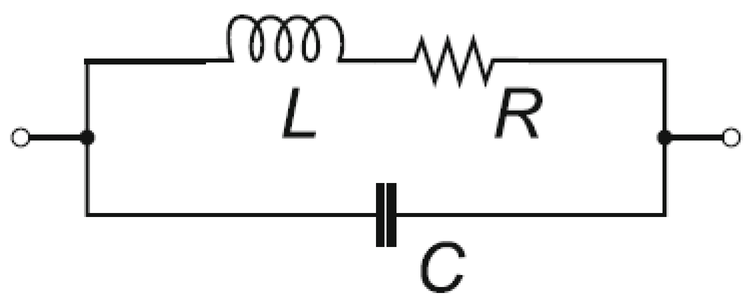


- Ideell karakteristikk
- Fysisk karakteristikk
  - Under 1 GHz: Nær ideell kondensator
  - 1 til 10 GHz: Fall i impedansen (resonans)
  - Over 10 GHz: Induktiv impedans dominerer og kondensatoren oppfører seg mer som en spole

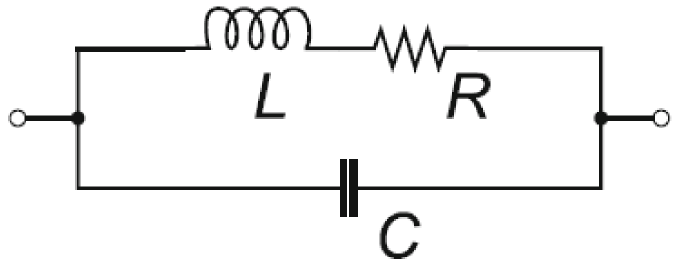


Nøyaktigere modell av induktor (1)

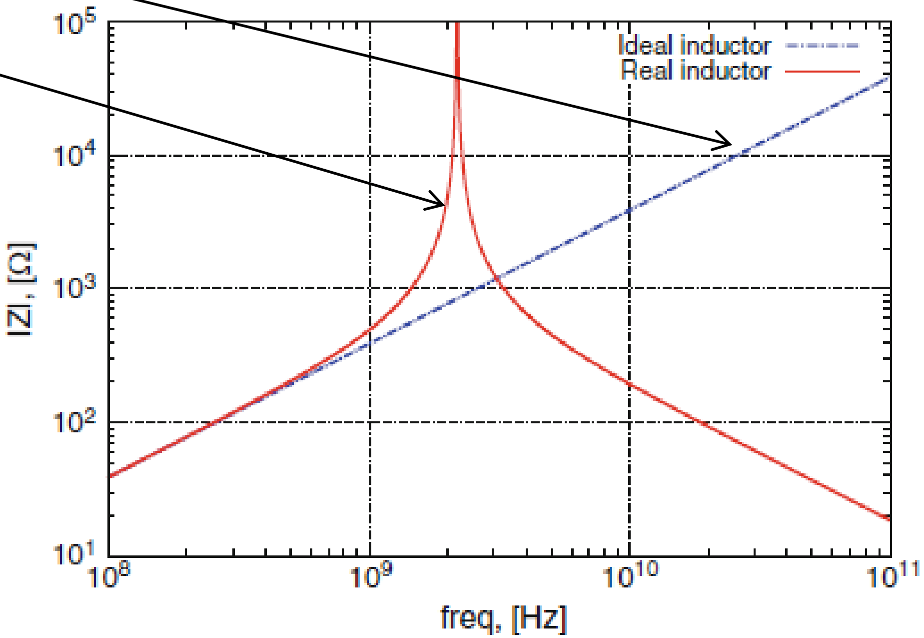
- Ideell induktor: Lineær sammenheng mellom impedans og frekvens
- I praksis mer komplisert, men allikevel enklere enn resistorer og kondensatorer



Nøyaktigere modell av induktor (2)



- Ideell karakteristikk:
- Fysisk karakteristikk
  - Under 1GHz: Følger ideell induktor
  - 1-10 GHz: Sterkt økning i impedansen (resonans)
  - Over 10 GHz: Parasittkapasitansen dominerer fullstendig og spolen oppfører seg som en kondensator



I, V og Z som komplekse variable (1)

- **En liten advarsel:** Det vi skal gjennomgå på de neste foilene om kompleks strøm, spenning og impedans er streng tatt ikke nødvendig for å forstå hvordan kretsene vi jobber med fungerer – det kan til og med virke mer forvirrende og unødig komplisert.

- **Men:** teknikkene og regnereglene som gjelder når vi er i det komplekse planet har på sett og vis blitt standardteknikker som forenkler mye og brukes til langt mer enn de få eksemplene vi skal se på. Det er med andre ord ikke uten grunn at det er «slik man gjør det»

- **Ambisjonen** er at dere skal få et lite innblikk i hva det hele dreier seg om i grove trekk. Dette kurset har dessverre ikke nok tid til å gå i dybden slik at dere får sett nytteverdien fullt ut.

I, V og Z som komplekse variable (2)

- Når strøm, spenning og impedans varierer med frekvensen har vi sett at det kreves endel regning (løsning av diffligninger) for å finne
  - Summen av ulike strømmer i kretser med reaktive elementer
  - Summen av ulike spenninger i kretser med reaktive elementer
- Nesten alltid er vi på jakt etter sammenhengen mellom inngangen og utgangen
  - Vi tenker på kretsen som en funksjon og vil vite hva strømmen eller spenningen er på utgangen når vi sender inn en strøm eller en spenning
  - Vi er vanligvis IKKE interessert i strømmer/spenninger inne i selve kretsen
- Når vi omformer strøm, spenning og impedans til komplekse variable blir diffligningene algebraiske ligninger som er mye lettere å løse
  - Vi er aller mest interessert i sammenhengene mellom inn- og utsignal

Kompleks notasjon

- Det første vi trenger er å finne ut hvordan strøm, spenning og impedans kan representeres i det komplekse planet
- Vi trenger to teoremer til dette:

1. Fouriers teorem: Et hvert periodisk ac-signal (strøm eller spenning) kan skrives som en (kanskje uendelig) sum av sinus- og cosinussignaler
2. Superposisjon: Hvis vi har et lineær krets og input består av en sum av mange uavhengige kilder, kan vi finne regne ut kretsens respons til hver enkelt inputkilde og så summere disse for å finne den samlede responsen

Vi kan dermed finne responsen på hvert enkelt sinus- og cosinussignal separat og så summere enkeltresponsene for å finne den totale responsen

Fouriers teorem

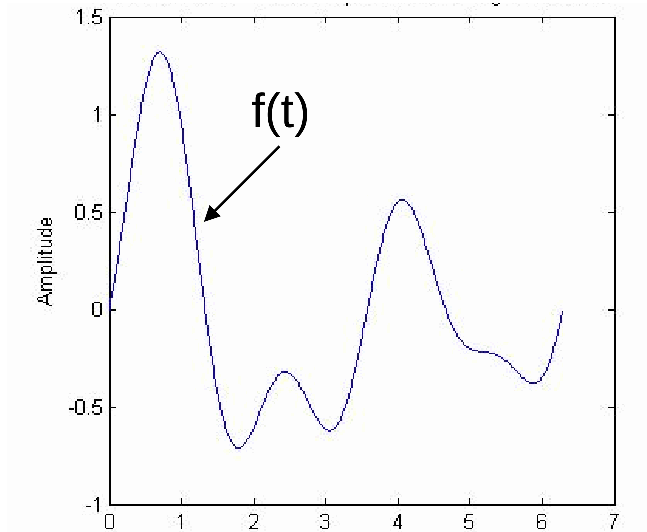
- Et periodisk signal kan skrives som en sum av sinus- og cosinussignaler vha Fourier-transform
  - Vi skal ikke bevise dette; kun se på et eksempel og bruke resultatet
- *Fourier-serien* beskriver hvordan et periodisk signal *f(t)* kan skrives som en funksjon *g(t)* som er en (uendelig) sum av sinus- og cosinusledd
- *Fourier-transform* er prosessen med å finne Fourier-serien
- Vi antar derfor at ethvert periodisk inputsignal kan skrives på denne formen:
  - Det kan også vises at vi strengt tatt kun trenger bare sinus eller bare cosinus

$$g(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2\pi mt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

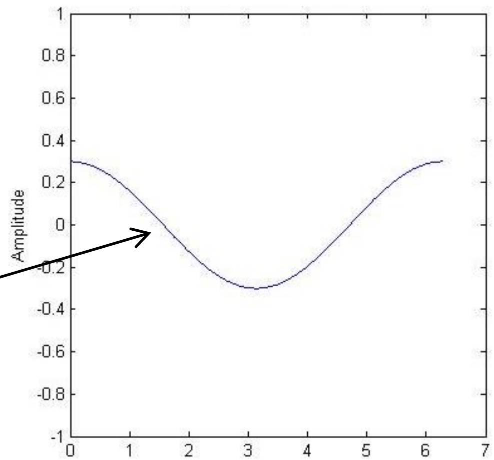
Fouriers teorem: eksempel 1

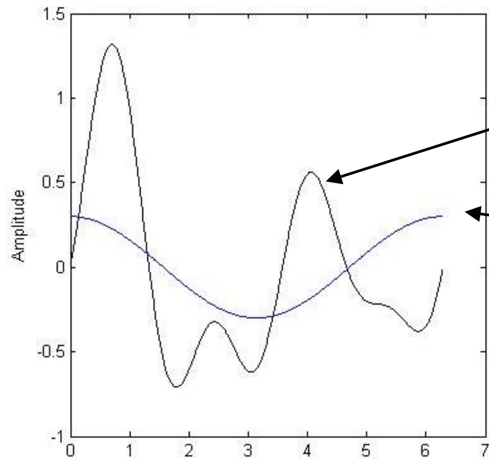
- Ønsker å finne hvilke sinuskomponenter som trengs for å beskrive f(t) som g(t), dvs Fourierserien til f(t)
- For å vise prosessen skal vi gradvis prøve med flere og flere ledd i g(t) og så se om g(t) er en god tilnærming til f(t)
- Starter med g(t) med ett enkelt ledd
- $a_i = 0.3$, $T=2\pi$ og $\theta=1/2\pi$



1. iterasjon

$a_1$sinus(Θ)





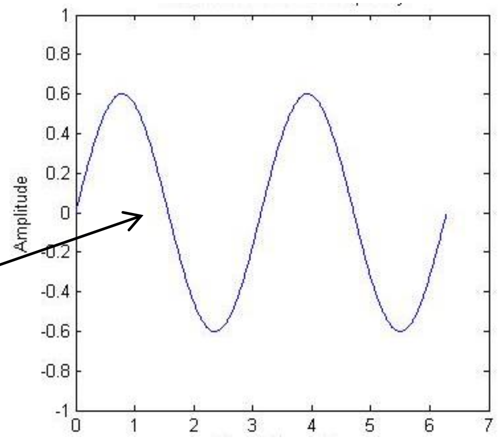
f(t)

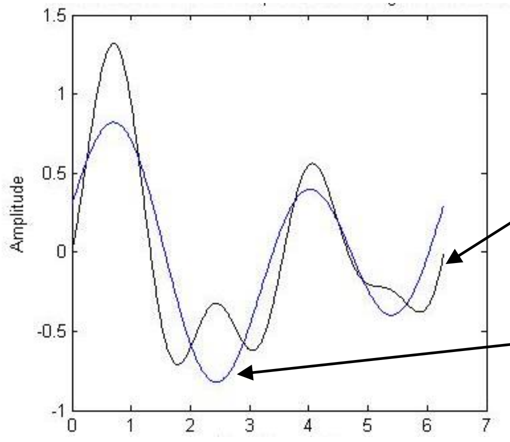
g(t)=$a_1$sinus(Θ)

Fouriers teorem: eksempel 1 (forts)

2. iterasjon

$a_3$sinus(3Θ)



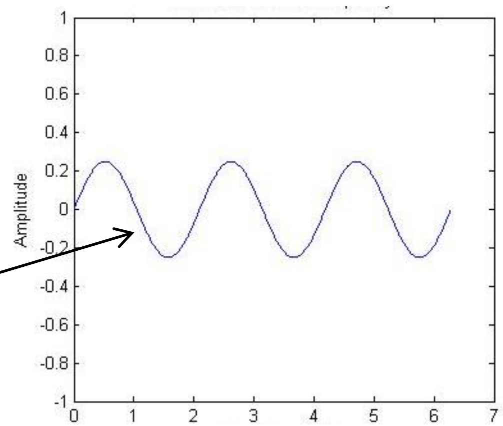


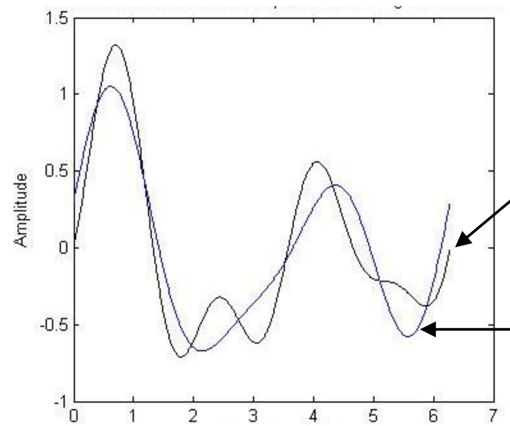
f(t)

g(t)= $a_1$sinus(Θ) + $a_3$sinus(3Θ)

3. iterasjon

$a_5$sinus(5Θ)





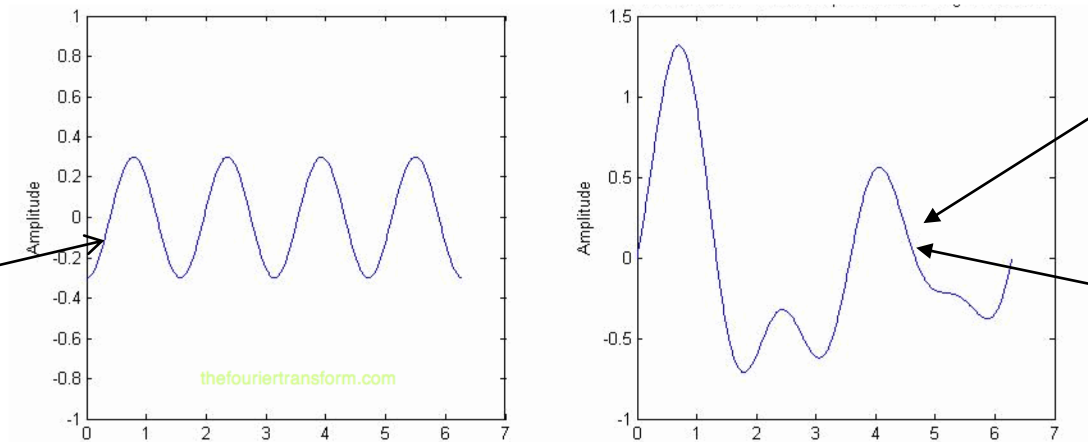
f(t)

g(t)= $a_1$sinus(Θ) + $a_3$sinus(3Θ) + $a_5$sinus(5Θ)

Fouriers teorem: eksempel 1 (forts)

4. iterasjon

$a_7$sinus(7Θ)



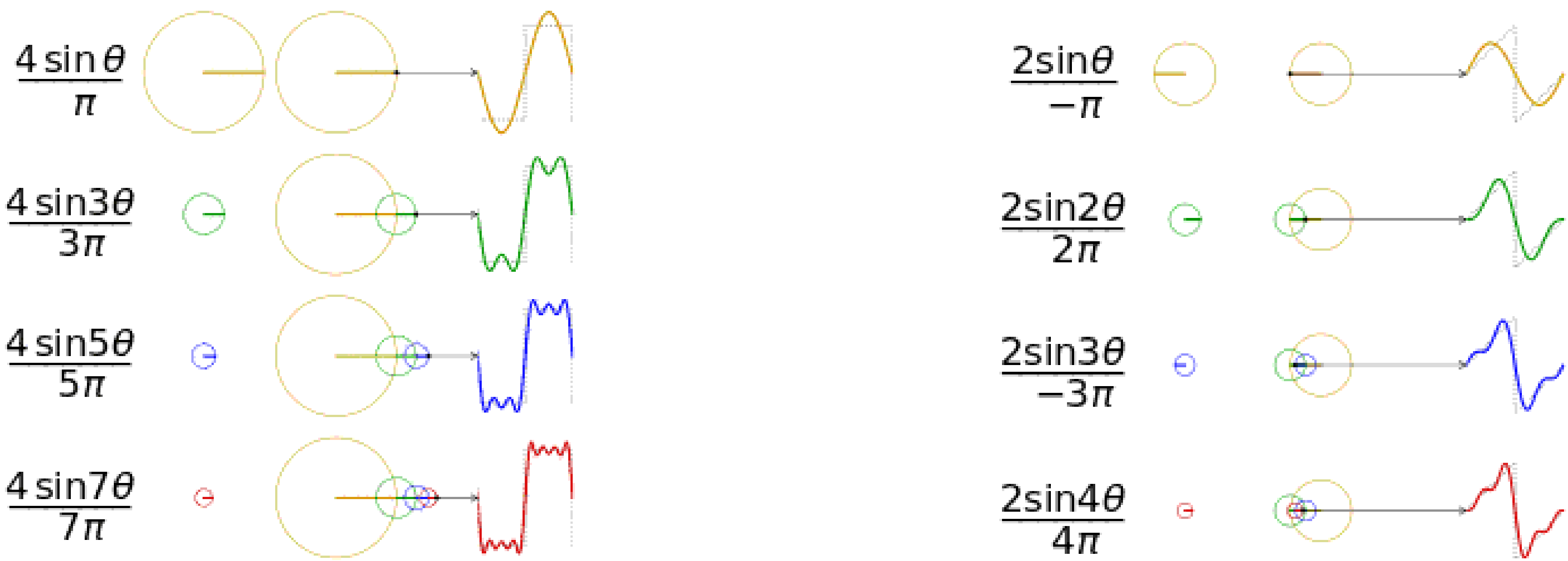
f(t)

g(t)= $a_1$sinus(Θ) +
$a_3$sinus(3Θ) +
$a_5$sinus(5Θ) +
$a_7$sinus(7Θ)

- For at g(t) ≈ f(t) trengte vi fire sinusledd med fire ulike frekvenser som er et helt antall ganger grunnfrekvensen θ (3θ, 5θ osv)
- Hvor mange ledd vi trenger avhenger bla av hvor nøyaktig vi trenger å være
- Legg merke til at vi ikke har vist hvordan man går frem for å finne g(t) generelt.

Fouriers teorem: eksempel 2

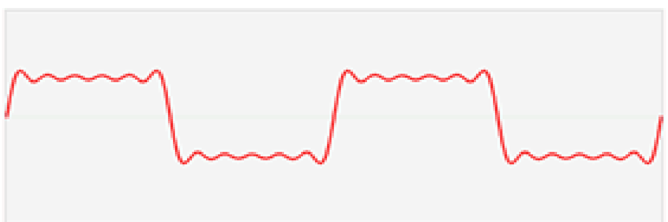
Tilnærming til firkantbølge og sagtannbølge som sum av fire grunnfrekvenser

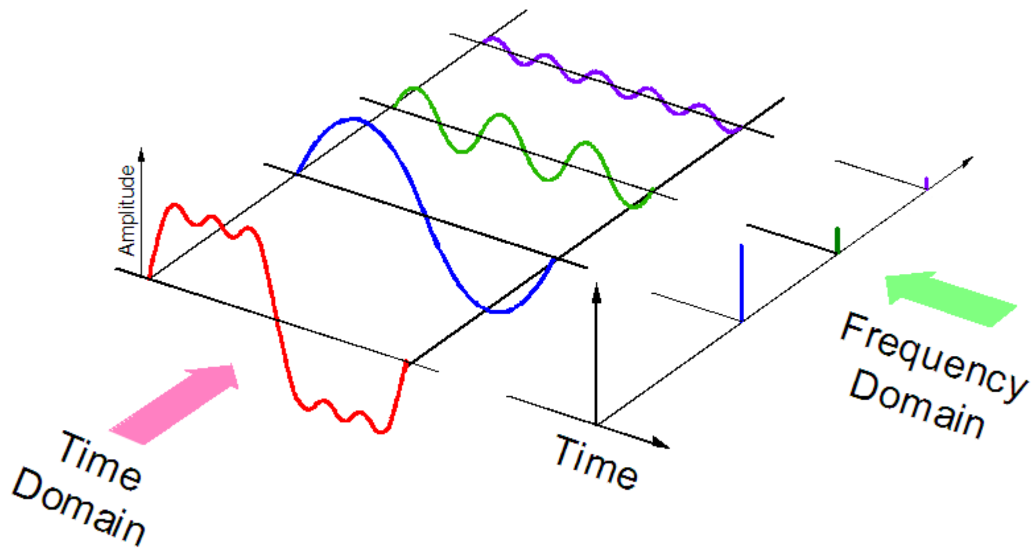


Vi kan defor beskrive digitale signaler som en fourier-serie

Sammenheng mellom frekvens og tid

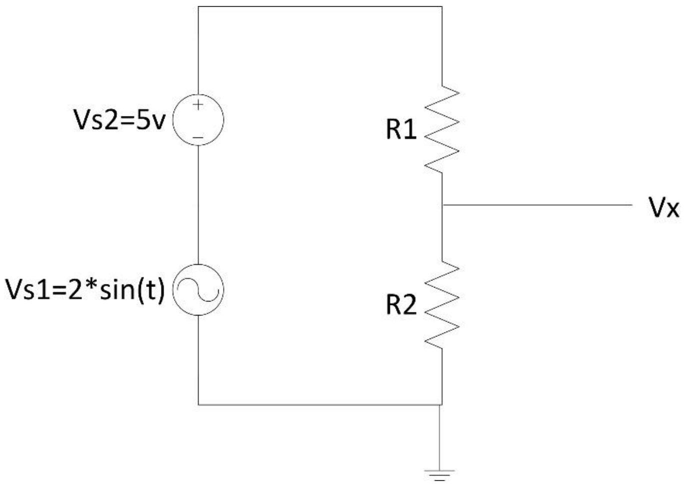
- Når vi beskriver et ac-signal er det noen ganger som funksjon av tid, andre ganger som funksjon av frekvens
- Signalets amplitude er den samme i begge tilfeller





Superposisjon

- "I enhver lineær krets med flere uavhengige kilder kan en spenning eller strøm i kretsen beregnes som en algebraisk sum av hver enkelt kilde som virker alene"



- **Uten** superposisjon:
  - Bruker KVL og summerer Vs1 og Vs2: Vs_tot = Vs1 + Vs2
  - $Vx = \frac{R2}{R1+R2} Vs\_tot$
- **Med** superposisjon:
  - Bidrag fra Vs1 (Vs2 kortsluttes): $Vx\_vs1 = \frac{R2}{R1+R2} Vs1$
  - Bidrag fra Vs2 (Vs1 kortsluttes): $Vx\_vs2 = \frac{R2}{R1+R2} Vs2$
  - Totalt: $Vx = Vx\_vs1 + Vx\_vs2 = \frac{R2}{R1+R2} Vs1 + \frac{R2}{R1+R2} Vs2 = \frac{R2}{R1+R2}(Vs1 + Vs2) = \frac{R2}{R1+R2}(Vs\_tot)$

- **Merk:** Eksemplet virker mer komplisert med superposisjon, men med mange kilder i en stor krets vil superposisjon forenkle utregningene

Hvordan omforme til kompleks strøm, spenning og impedans (1)?

- Vi bruker Fouriers teorem og superposisjon for å beskrive I, V og Z i det komplekse planet
- Eulers ligning $e^{j\omega t} = cos(\omega t) + jsin(\omega t)$
  - Den reelle delen er $Re(e^{j\omega t}) = cos(\omega t)$
  - Den imaginære delen er $Im(e^{j\omega t}) = jsin(\omega t)$
- Mao: vi kan uttrykke en sum av sinus og cosinussignaler i det komplekse planet som $e^{j\omega t}$
- Men: For at dette skal hjelpe oss må vi gjøre et par antagelser
  - Leddet $jsin(\omega t)$ trengs som en hjelpevariabel for at ligningen skal gjelde
  - $jsin(\omega t)$ har ingen fysisk tolkning; I, V og Z er alle langs Re()-aksen
  - Superposisjon gjør at vi kan legge $jsin(\omega t)$ til inngangssignalet men se bort fra det på utgangen; vi la til noe uten fysisk tolkning og fjerner det etterpå

Hvordan omforme til kompleks strøm, spenning og impedans (2)?

- For at dette skal hjelpe oss må vi gjøre et par antagelser:
  - Leddet $jsin(\omega t)$ trengs som en "hjelpeledd" for at ligningen skal gjelde matematisk
  - Fysisk har ikke $jsin(\omega t)$ noen tolkning; det finnes ikke et fysisk imaginært sinussignal
  - Superposisjon gjør at vi kan legge $jsin(\omega t)$ til inngangssignalet og deretter se bort fra bidraget det gir på utgangen.
  - Vi kan enkelt utvide Eulers ligning til å gjelde frekvens med faseforskyvning:

$$e^{j(\omega t+\varphi)} = cos(\omega t + \varphi) + jsin(\omega t + \varphi)$$

  - Ut fra dette ser vi at sinus og cosinus kan skrives summer av eksponensialfunksjoner:

$$cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}(e^{j(\omega t+\varphi)} + e^{-j(\omega t+\varphi)})$$

$$sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2j}(e^{j(\omega t+\varphi)} - e^{-j(\omega t+\varphi)})$$

Hvordan omforme til kompleks strøm, spenning og impedans (3)?

- Vi hopper over et par mellomsteg og slår fast at vi kan skrive strøm og spenning som komplekse størrelser:

$$I = I_0 cos(\omega t) + jI_0 sin(\omega t) = I_0 e^{j\omega t}$$

$$V = V_0 cos(\omega t) + jV_0 sin(\omega t) = V_0 e^{j\omega t}$$

- Leddene $jI_0 sin(\omega t)$ og $jV_0 sin(\omega t)$ må være med av matematiske hensyn, men de har ingen fysisk tolkning

- Kan nå utlede I-V relasjonen for kondensatorer
  - Antar at I_c og V_c er komplekse variable på formen

$$I_c = I_0 e^{j\omega t} \qquad V_c = V_0 e^{j\omega t}$$

Hvordan omforme til kompleks strøm, spenning og impedans (4)?

- Sammenhengen mellom strøm I_c og spenning V_c for en kondensator er gitt av

$$I_c = V_0 C \frac{dV_C}{dt} \Rightarrow I_c = V_0 C \frac{d}{dt}(e^{j\omega t}) = V_0 j\omega C e^{j\omega t}$$

- Sammenhengen mellom strøm I_L og spenning V_L for en spole er gitt av

$$V_L = I_0 L \frac{dI_L}{dt} \Rightarrow V_L = I_0 L \frac{d}{dt}(e^{j\omega t}) = I_0 j\omega L e^{j\omega t}$$

- Mao: Differensialligninger har blitt omformet til algebraiske ligninger som er lettere å løse

Hvordan omforme til kompleks strøm, spenning og impedans (5)?

- Impedansen er fortsatt definer som forholdet mellom spenning og strøm:

$$Z = \frac{V}{I}$$

- Z_R ligger på den reelle aksen: $V_R = Z_R I_R \Rightarrow Z_R = \frac{V_R}{I_R}$

- Z_C og Z_L ligger på den imaginære aksen:

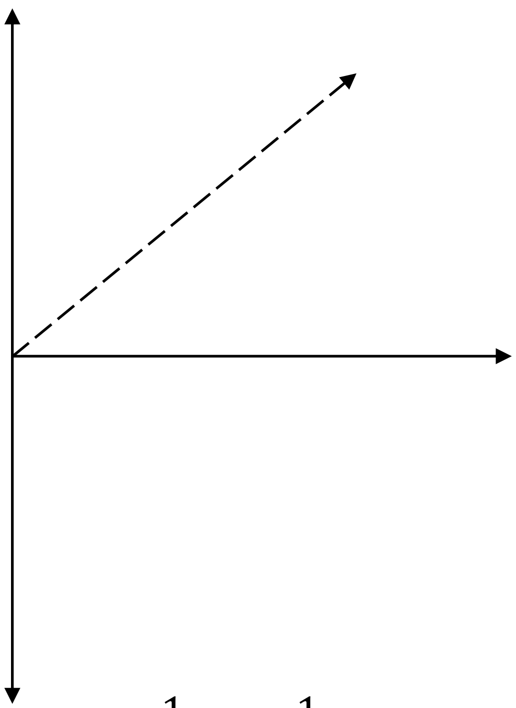
$$Z_c = \frac{V_c}{I_c} = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{V_0 j\omega C e^{j\omega t}} = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} \qquad Z_L = \frac{V_L}{I_L} = \frac{I_0 j\omega L e^{j\omega t}}{I_0 e^{j\omega t}} = j\omega L$$

Hvordan omforme til kompleks strøm, spenning og impedans (6)?

- Vi nå har fått med fasedreiningen mellom de Z_R, Z_C og Z_L i impedansformlene:

Impedans som vektorer

$$Z_L = XL = 2\pi f L = \omega L$$

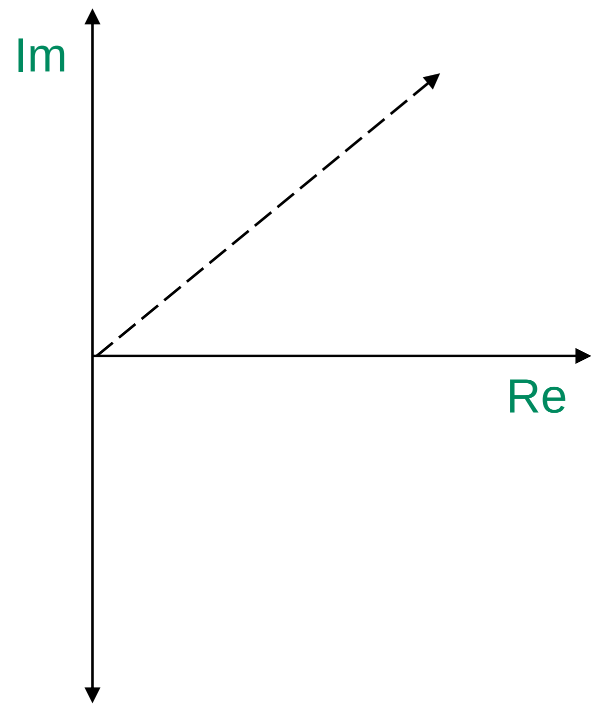


$$Z_R = R$$

$$Z_C = X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{\omega C}$$ fordi $\omega = 2\pi f$

Impedans som komplekse tall

$$Z_L = j\omega L$$

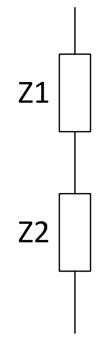


$$Z_R = R$$

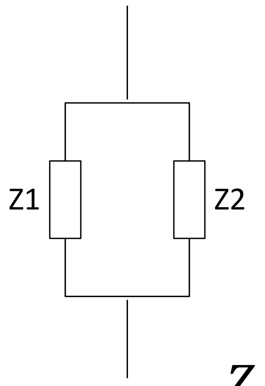
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\,\frac{1}{\omega C}$$

Impedans i RC, RL og RLC-kretser

- Kompleks notasjon gjør det enklere å beregne total impedans i kretser med resistorer, kondensatorer og induktorer
  - Ohms lov gjelder
  - KVL og KCL gjelder
  - Samme uttrykk for impedanser i parallell og serie



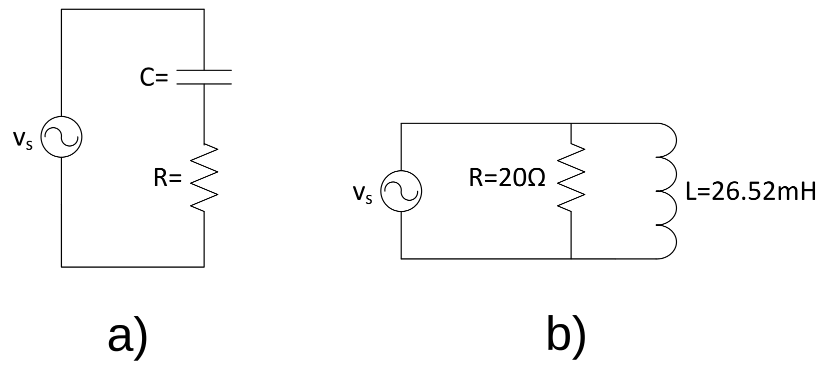
$$Z_{tot} = Z_1 + Z_2$$



$$Z_{tot} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

  - Vi bruker samme formel som for vektorer for å finne impedansen ved en bestemt frekvens

Oppgaver (4)



- Spm 1: Finn uttrykkene for den samlede impedansen Z til krets a) i kompleks notasjon
- Spm 2: Finn uttrykkene for den samlede impedansen Z til krets b) i kompleks notasjon
- Spm-3: På bakrgunn av svarene man fant i spm-1 og spm-2: Hvorfor tror du at man foretrekker å bruke serielle istedenfor parallelle RL/RC-kretser?
- Spm 4: Finn impedansen og fasevinkelen til krets a) når spenningskilden opererer på 60 Hz, R=2.5Ω og C= 0.05F
- Spm 5 : Finn impedansen og fasevinkelen til krets b) når spenningskilden opererer på 60 Hz, R=20Ω og L= 26.52 mH

Oppsummering (1)

- Nå kan man lure på om innføring av I, V og Z som komplekse variable faktisk er en forenkling
  - vi innfører ligninger med flere ledd
  - vi bruker ny notasjon
  - vi legger til ledd som ikke betyr noe
  - vi trekker de samme leddene uten betydning fra etterpå
  - Vi bruker fortsatt Pythagoras for å regne ut total impedans
- Vi har påstått (uten å regne på det) at strøm- og spenningsligninger blir enklere å løse for reaktive kretser når vi bruker I, V og Z som komplekse variable
- **Overføringsfunksjoner** blir nesten alltid beskrevet i det komplekse planet

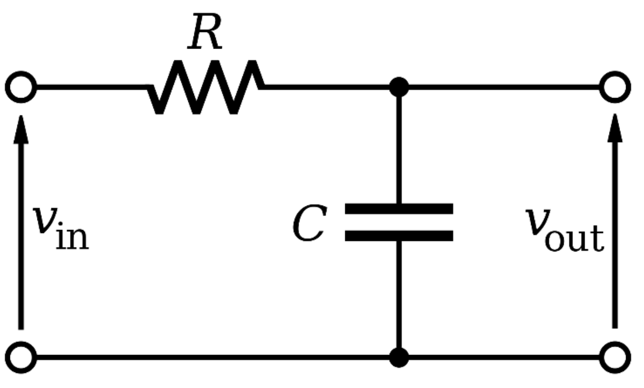
Overføringsfunksjoner (1)

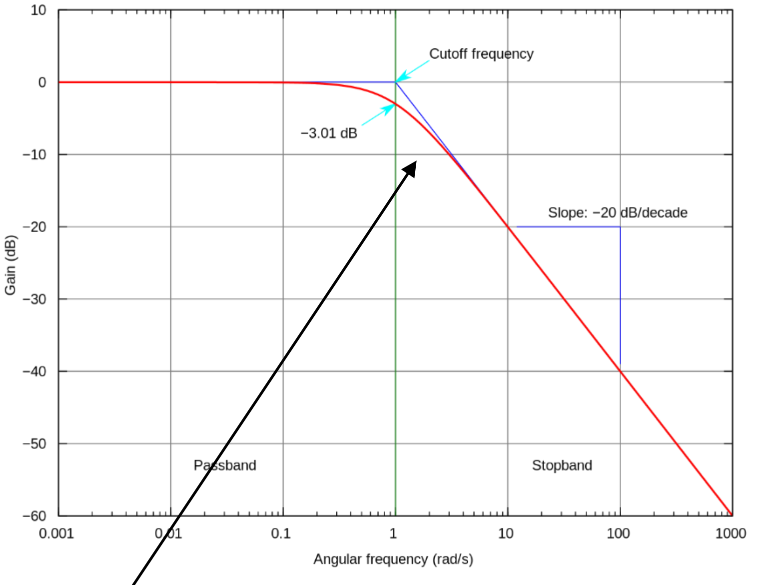
- I elektronikk tenker vi ofte på kretser som funksjoner som tar et inputsignal og produserer et outputsignal
- Når vi skal beskrive slike funksjonene ser vi typisk på forholdet mellom spenningen på utgangen og spenningen, for eksempel

$$H(\omega) = \frac{v_{out}(\omega t)}{v_{in}(\omega t)} \Leftrightarrow v_{out}(\omega t) = H(\omega) * v_{in}(\omega t)$$

- $H(\omega t)$ kalles for en overføringsfunksjon; den «overfører» et inngangssignal til utgangssignalet
- Når vi har “isolert” kretsens funksjon i en overføringsfunksjon $H(\omega)$ kan vi beskrive hva kretsen gjør med ethvert sinusformet signal vi sender inn

Overføringsfunksjoner – eksempel:





$$V_{out} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}} V_{in} = \frac{1}{j\omega RC+1} V_{in} \Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{j\omega RC+1}$$

Oppgaver (5)

- Spm 1: Hva slags krets er dette og hva gjør den?
- Spm 2: Finn overføringsfunksjonen på $j\omega$-form
- Spm 3: Hva er superposisjon?
- Spm 4: I hvilken annen sammenheng har vi brukt superposisjon?
- Spm 5: Hva er den fysiske tolkningen av leddet $jsin(\omega t + \varphi)$?
- Spm 6: Hvorfor må vi legge til dette leddet på inngangssignalet?
- Spm 7: Hvorfor kan vi fjerne det samme leddet fra utgangen?
- Spm 8: Hva er Fourierserien?
- Spm 9: Hva er Fouriertransform?